МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Стахановский инженерно-педагогический институт менеджмента
Кафедра информационных систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

для студентов направления подготовки
44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)
в 2-х частях. Часть 1

Луганск 2021

УДК 69.032/007, 612.313

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом
ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ»
(протокол № от 2021 г.)

Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине **«Математическое моделирование и математическая статистика»** для студентов направления подготовки **44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям) в 2-х частях. Часть 1**. / Сост.: А.П. Волков, И.В.Владарский. – **Стаханов**: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. – 67 с.

Методические указания к выполнению практических работ содержит девять практических работ по дисциплине «Математическое моделирование и математическая статистика», которые включают в себя теоретические сведения, примеры решения, задачи и варианты с данными для их выполнения. К каждой практической работе приведены вопросы для самопроверки. В методических рекомендациях представлен список использованных источников.

Предназначены для студентов бакалаврской программы «Информационные технологии и системы», «Профессиональная психология», «Безопасность технологических процессов и производств», «Электроснабжение», «Экономика и управление», «Управление персоналом», «Экономическая безопасность», «Подземная разработка пластовых месторождений», «Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Технологическая безопасность и горноспасательное дело».

Составители: доц., к.ф.-м.н. Волков А.П.
ас. Владарский И.В.

Ответственный за выпуск: доц. Карчевский В.П.

Рецензент: доц. Карчевская Н.В.

Содержание

Аннотация

В настоящее время вероятностные и статистические методы широко используются в технике и во многих отраслях нашего хозяйства: в теориях: надёжности, массового обслуживания, автоматического управления; при планировании и организации производства; анализе технологических процессов; проведении контроля качества продукции. Поэтому изучение математической статистики играет существенную роль в подготовке инженеров всех специальностей.

Цель данных методических указаний – помочь студентам овладеть методами решения задач по математической статистике.

В каждом разделе даны краткие теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач, а также решение типовых примеров. По каждой теме предложены варианты заданий для самостоятельной работы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1

Событие как результат испытания. Частость. Вероятность события. Теоремы теории вероятности

Цель работы:

– Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
– Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
– Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   – титульный лист;
   – расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   – выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Выборка. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака **X** из генеральной совокупности извлечена выборка объёма **n**. Наблюдающиеся значения $\mathbf{x_i}$ признака **X** называют вариантами; последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называют вариационным рядом. Если выборка объёма **n** содержит **k** различных значений $\mathbf{x_1, x_2,\ldots,x_k}$, причём значение $\mathbf{x_i}$ встречается $\mathbf{n_i}$ раз (**i=1,2,…,k**), то число $\mathbf{n_i}$ называется частотой варианты $\mathbf{x_i}$, а отношение $\boxed{w_i = \frac{n_i}{n}}$ называется относительной частотой варианты $\mathbf{x_i}$. Очевидно, что $\boxed{\sum_{i=1}^{k} n_i = n;\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1}$.

Статистическим распределением выборки в случае дискретного признака **X** называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическим распределением выборки в случае непрерывного признака **X** называют перечень интервалов и соответствующих им частот или относительных частот (в качестве частоты,

соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x)$,определяющую для каждого значения **x** относительную частоту события **X< x**: $\boxed{F^*(x) = \frac{n_x}{n}}$,

где $\mathbf{n_x}$ – число вариант, меньших **x**; **n** – объём выборки. Эмпирическая функция $F^*(x)$ служит оценкой неизвестной функции распределения $F(x)$ случайной величины **X**.

Функция обладает следующими свойствами:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0;1];
2) $F^*(x)$ – неубывающая функция;
3) Если $\mathbf{x_1}$ наименьшая, а $\mathbf{x_k}$ – наибольшая варианты, то $F^*(x)=0$ при $\mathbf{x \le x_1}$ и $F^*(x)=1$ при $\mathbf{x > x_k}$.

Пример. Найти эмпирическую функцию $F^*(x)$ по данному распределению выборки. Построить график этой функции.

$\mathbf{x_i}$	1	3	4	5
$\mathbf{n_i}$	6	8	6	5

Решение. Объём выборки n=6+8+6+5=25.Наименьшая варианта 1, поэтому $F^*(x)=0$ при $x \le 1$. Значение X<3, а именно $x_1=1$, наблюдалось 6 раз, следовательно, $F^*(x)=\frac{6}{25}=0{,}24$ при $1<x\le 3$. Если $3<x\le 4$, то $F^*(x)=\frac{14}{25}=0{,}56$, так как значения $x_1=1$ и $x_2=3$ наблюдались 6+8=14 раз. Если $4<x\le 5$, то $F^*(x)=\frac{20}{25}=0{,}80$, так как в этом случае $n_x=6+8+6=20$.

Так как наибольшая варианта равна 5, то $F^*(x)=1$ при x>1.

Следовательно, $F^*(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1; \\ 0{,}24 & при \quad 1 < x \le 3; \\ 0{,}56 & при \quad 3 < x \le 4; \\ 0{,}80 & при \quad 4 < x \le 5; \\ 1 & при \quad x > 5. \end{cases}$

График функции изображён на рис.1.

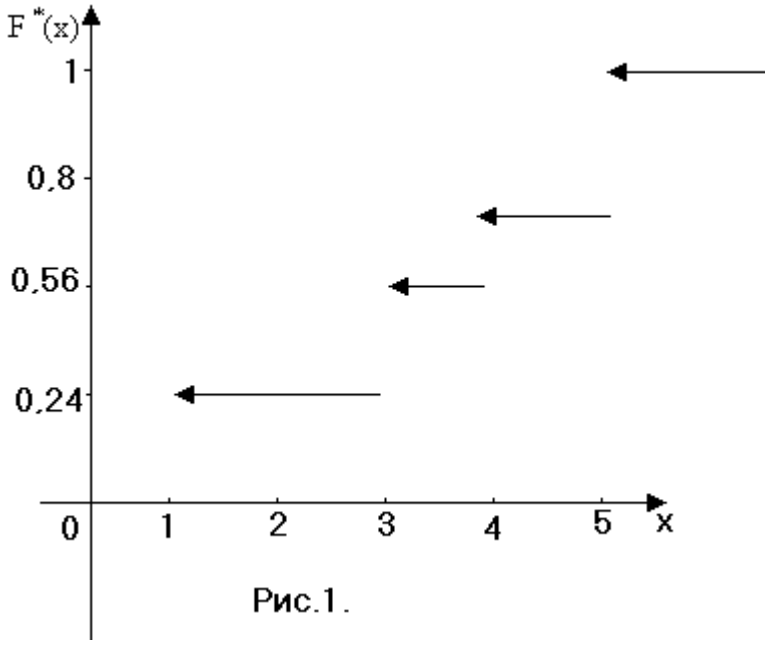

Рис.1.

<u>Полигоном частот</u> называют ломаную, отрезки которой соединяют точки **(x_1; n_1), (x_2; n_2)**,…, **(x_k; n_k)**, где **x_i** – варианты выборки; **n_i** – соответствующие им частоты (**i=1,2,…,k**).

Полигоном относительных частот называют ломаную отрезки которой соединяют точки **(x_1; w_1), (x_2; w_2)**,…, **(x_k; w_k)**, где **w_i** – соответствующие вариантам **x_i** относительные частоты .

<u>Пример.</u> Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки.

x_i	1	2	4	6
n_i	4	7	6	3

<u>Решение.</u> Найдём относительные частоты. Так как объём выборки n=4+7+6+3=20, то $w_1=\frac{4}{20}=0,2$; $w_2=\frac{7}{20}=0,35$; $w_3=\frac{6}{20}=0,3$; $w_4=\frac{3}{20}=0,15$. Следовательно, распределение относительных частот имеет вид

x_i	1	2	4	6
w_i	0,2	0,35	0,3	0,15

Построив точки (1; 0,2),(2; 0,35), (4; 0,3), (6; 0,15) и соединив их отрезками прямых, получим искомый полигон относительных частот (рис.2).

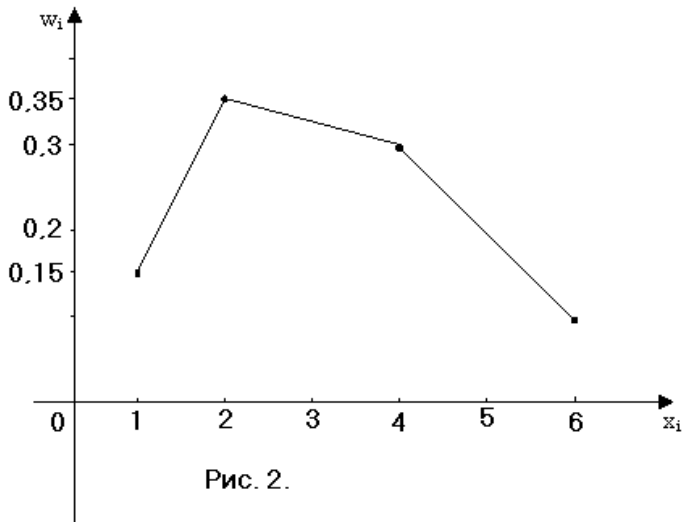

Рис. 2.

В случае непрерывного признака **X** интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения этого признака, разбивают на частичные интервалы длины **h**, и находят $\mathbf{n_i}$ – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длины **h**, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$ (плотность относительной частоты).

Площадь гистограммы относительных частот равна сумма всех относительных частот, т.е. единице.

Задача. Дано статическое распределение выборки. Требуется:

1) Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график;
2) Построить полигоны частот и относительных частот.

1.1

x_i	2	5	6	7	9
n_i	3	6	10	4	2

1.2

x_i	1	3	5	6	8
n_i	2	4	10	3	1

1.3

x_i	3	4	5	7	9
n_i	1	3	15	4	2

1.4

x_i	1	2	5	8	10
n_i	2	6	8	3	1

1.5

x_i	2	3	4	5	8
n_i	3	4	10	6	2

1.6	x_i	5	6	7	9	10
	n_i	1	5	12	4	3
1.7	x_i	0,8	1	2	3,5	4
	n_i	4	6	7	5	3
1.8	x_i	3	5	6	8	10
	n_i	2	4	6	5	3
1.9	x_i	1	1,5	3	4	5
	n_i	1	4	11	6	3
1.10	x_i	2	4	5	6,5	7,5
	n_i	1	3	10	4	2
1.11	x_i	4	6	7	8	10
	n_i	1	3	12	5	4
1.12	x_i	0,5	1,5	2	3	4
	n_i	2	3	10	4	1
1.13	x_i	2	4	5	6	7
	n_i	3	8	10	3	1
1.14	x_i	3	4	5	8	10
	n_i	1	4	8	5	2
1.15	x_i	2	2,5	3	5	5,5
	n_i	2	3	8	4	3
1.16	x_i	1	2	5	6	8
	n_i	3	5	12	4	1
1.17	x_i	2	4	5	6	9
	n_i	3	3	10	5	4
1.18	x_i	1,5	2,5	3	4	6
	n_i	2	4	8	3	3
1.19	x_i	3	5	6	8	9
	n_i	1	3	10	6	5
1.20	x_i	2	3	5	7	8
	n_i	1	4	8	5	2

1.21	x_i	3	5	6	8	9
	n_i	2	5	8	6	4
1.22	x_i	1	2	4	5	6
	n_i	3	6	10	4	2
1.23	x_i	1	4	5	7	10
	n_i	2	6	8	3	1
1.24	x_i	1,5	2	4,5	5	6
	n_i	2	5	9	6	3
1.25	x_i	1,3	2	3	4,5	5
	n_i	3	7	8	4	3
1.26	x_i	2,3	3	4	4,5	5,5
	n_i	2	4	10	3	1
1.27	x_i	1,2	2	2,5	3,5	4
	n_i	4	5	10	4	2
1.28	x_i	2	3	5	6	6,5
	n_i	3	4	8	3	2
1.29	x_i	0	2	3	4	6
	n_i	4	5	10	4	2
1.30	x_i	1	2	3	5	6
	n_i	5	9	6	3	2

Контрольные вопросы и задания:

1. Дано статическое распределение выборки.
   Требуется:

Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график;
Построить полигоны частот и относительных частот.

1.

x_i	2	5	6	7	9
n_i	3	6	10	4	2

2.

x_i	1	3	5	6	8
n_i	2	4	10	3	1

2. Построить гистограммы частот и относительных частот по данному распределению выборки (в первом столбце указаны частичные интервалы, а во втором – соответствующие им частоты).

1.

(2;6)	10
(6;10)	16
(10;14)	32
(14;18)	24
(18;22)	12
(22;26)	6

2.

(1;4)	6
(4;7)	15
(7;10)	27
(10;13)	33
(13;16)	12
(16;19)	7

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2
Формулы полной вероятности Бейеса, Бернулли. Дискретные случайные величины. Законы распределения

Цель работы:
- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):
1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   - титульный лист;
   - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Выборка. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака **X** из генеральной совокупности извлечена выборка объёма **n**. Наблюдающиеся значения $\mathbf{x_i}$ признака **X** называют <u>вариантами</u>; последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называют <u>вариационным рядом</u>. Если выборка объёма **n** содержит **k** различных значений $\mathbf{x_1, x_2,\ldots,x_k}$, причём значение $\mathbf{x_i}$ встречается $\mathbf{n_i}$ раз (**i=1,2,…,k**), то число $\mathbf{n_i}$ называется <u>частотой варианты</u> $\mathbf{x_i}$, а отношение $\boxed{w_i = \frac{n_i}{n}}$ называется <u>относительной частотой варианты</u> $\mathbf{x_i}$. Очевидно, что $\boxed{\sum_{i=1}^{k} n_i = n;\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1}$.

<u>Статистическим распределением выборки в случае дискретного признака</u> **X** называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. <u>Статистическим распределением выборки в случае непрерывного признака</u> **X** называют перечень интервалов и соответствующих им частот или относительных частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x)$,определяющую для каждого значения **x** относительную частоту события **X< x**: $\boxed{F^*(x) = \frac{n_x}{n}}$,

где $\mathbf{n_x}$ – число вариант, меньших **x**; **n** – объём выборки. Эмпирическая функция $F^*(x)$ служит оценкой неизвестной функции распределения $F(x)$ случайной величины **X**.

Функция обладает следующими свойствами:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0;1];
2) $F^*(x)$ – неубывающая функция;
3) Если $\mathbf{x_1}$ наименьшая, а $\mathbf{x_k}$ – наибольшая варианты, то $F^*(x)=0$ при $\mathbf{x} \le \mathbf{x_1}$ и $F^*(x)=1$ при $\mathbf{x}>\mathbf{x_k}$.

Пример. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки объёма n=50.

Номер интервала	1	2	3	4	5
Частичный интервал $(x_i; x_{i+1})$	(1;3)	(3;5)	(5;7)	(7;9)	(9;11)
Сумма частот вариант, попавших в интервал	7	10	20	8	5

Решение. Найдём относительные частоты: $w_1=\frac{7}{50}=0{,}14$; $w_2=\frac{10}{50}=0{,}2$; $w_3=\frac{20}{50}=0{,}4$; $w_4=\frac{8}{50}=0{,}16$; $w_5=\frac{5}{50}=0{,}1$.

Найдём плотности относительных частот, учитывая, что длина частотного интервала h=2:

$$\frac{w_1}{h}=0{,}07;\ \frac{w_2}{h}=0{,}1;\ \frac{w_3}{h}=0{,}2;\ \frac{w_3}{h}=0{,}02;\ \frac{w_4}{h}=0{,}08;\ \frac{w_5}{h}=0{,}05.$$

Построим на оси абсцисс данные частные интервалы. Проведём над этим интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от неё на расстояниях, равных соответствующим плотностям относительной частоты. Искомая гистограмма относительных частот изображена на рис. 3.

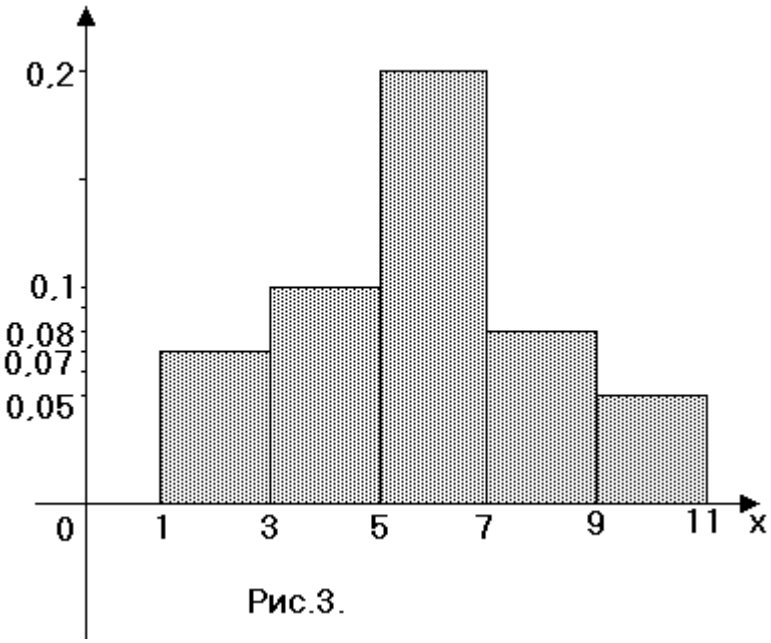

Рис.3.

<u>Задача.</u> Построить гистограммы частот и относительных частот по данному распределению выборки (в первом столбце указаны частичные интервалы, а во втором – соответствующие им частоты).

2.1.	(2;6)	10	2.2.	(1;4)	6
	(6;10)	16		(4;7)	15
	(10;14)	32		(7;10)	27
	(14;18)	24		(10;13)	33
	(18;22)	12		(13;16)	12
	(22;26)	6		(16;19)	7
2.3.	(4;6)	8	2.4.	(3;7)	9
	(6;8)	25		(7;11)	13
	(8;10)	30		(11;15)	25
	(10;12)	20		(15;19)	32
	(12;14)	10		(19;23)	13
	(14;16)	7		(23;27)	8
2.5.	(1;3)	7	2.6.	(5;10)	5
	(3;5)	14		(10;15)	12
	(5;7)	28		(15;20)	25
	(7;9)	34		(20;25)	30
	(9;11)	12		(25;30)	18
	(11;13)	5		(30;35)	10
2.7.	(2;7)	9	2.8.	(3;5)	15
	(7;12)	24		(5;7)	32
	(12;17)	30		(7;9)	25
	(17;22)	19		(9;11)	12

	(22;27)	10		(11;13)	10
	(27;32)	8		(13;15)	6
2.9.	(1;5)	8	2.10.	(6;9)	6
	(5;9)	10		(9;12)	12
	(9;13)	14		(12;15)	21
	(13;17)	8		(15;18)	10
	(17;21)	6		(18;21)	7
	(21;25)	4		(21;24)	4
2.11.		8	2.12.	(3;8)	3
	(5;9)	20		(8;13)	13
	(9;13)	30		(13;18)	25
	(13;17)	25		(18;23)	32
	(17;21)	12		(23;28)	22
	(21;25)	5		(28;33)	5
	(25;29)				
2.13.	(1;4)	9	2.14.	(8;10)	5
	(4;7)	10		(10;12)	17
	(7;10)	16		(12;14)	20
	(10;13)	12		(14;16)	10
	(13;16)	8		(16;18)	6
	(16;19)	5			2
2.15.	(1;6)	10	2.16.	(2;4)	9
	(6;11)	22		(4;6)	14
	(11;16)	28		(6;8)	24
	(16;21)	18		(8;10)	30
	(21;26)	14		(10;12)	16
	(26;31)	8		(12;14)	7
2.17.	(0;6)	5	2.18.	(4;8)	6
	(6;12)	15		(8;12)	10
	(12;18)	21		(12;16)	15
	(18;24)	10		(16;20)	12
	(24;30)	6		(20;24)	4
	(30;36)	3		(24;28)	3

2.19.	(5;7)	8	2.20.	(6;10)	12
	(7;9)	12		(10;14)	14
	(9;11)	20		(14;18)	28
	(11;13)	30		(18;22)	20
	(13;15)	19		(22;26)	15
	(15;17)	11		(26;30)	11
2.21.	(1;7)	2	2.22.	(2;7)	7
	(7;13)	5		(7;12)	14
	(13;19)	15		(12;17)	18
	(19;25)	20		(17;22)	8
	(25;31)	8		(22;27)	3
2.23.	(4;9)	18	2.24.	(5;8)	9
	(9;14)	30		(8;11)	24
	(14;19)	22		(11;14)	34
	(19;24)	14		(14;17)	18
	(24;29)	10		(17;20)	9
	(29;34)	6		(20;23)	6
2.25.	(2,0;4,5)	5	2.26.	(4,2;7,2)	3
	(4,5;7,0)	12		(7,2;10,2)	6
	(7,0;9,5)	18		(10,2;13,2)	15
	(9,5;12,0)	9		(13,2;16,2)	20
	(12,0;14,5)	6		(16,2;19,2)	6
2.27.	(1,5;3,5)	10	2.28.	(2,0;3,5)	12
	(3,5;5,5)	25		(3,5;5,0)	20
	(5,5;7,5)	32		(5,0;6,5)	35
	(7,5;9,5)	16		(6,5;8,0)	15
	(9,5;11,5)	10		(8,0;9,5)	13
	(11,5;13,5)	7		(9,5;11,0)	5
2.29.	(2,5;5,5)	5	2.30.	(0;2,5)	6
	(5,5;8,5)	6		(2,5;5,0)	10
	(8,5;11,5)	12		(5,0;7,5)	22
	(11,5;14,5)	16		(7,5;10,0)	18
	(14,5;17,5)	6		(10,0;12,5)	10
	(17,5;20,5)	5		(12,5;15,0)	4

Контрольные вопросы и задания:

1. Дано статическое распределение выборки.
   Требуется:
   Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график;
   Построить полигоны частот и относительных частот.

1.

x_i	3	4	5	7	9
n_i	x_i	x_i	x_i	4	2

2.

x_i	1	2	5	8	10
n_i	2	6	8	3	1

3.

x_i	5	6	7	9	10
n_i	1	5	12	4	3

4.

x_i	0,8	1	2	3,5	4
n_i	4	6	7	5	3

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3

Непрерывные случайные величины. Функция распределения. Дифференциальные функции распределения. Числовые характеристики случайных величин

Цель работы:

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   - титульный лист;
   - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Точечные оценки неизвестных параметров распределения.

Пусть требуется количественный признак X генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Поэтому возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение

Точечной называют статическую оценку, которая определяется одним числом

$$\Theta^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \textbf{(1)}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - наблюдаемые значения признака **X**.

Несмещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки.

Смещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещённой оценкой генеральной средней (математического ожидания случайной величины **X**) служит выборочная средняя

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}; \qquad \textbf{(2)}$$

где x_i (i=1,2,..,k) – варианты выборки; n_i (i=1,2,..,k) – соответствующие им частоты; n= $\sum_{i=1}^{k} n_i$ - объём выборки.

Смещённой оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия:

$$Д_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}{n}; \qquad \textbf{(3)}$$

Эта оценка является смещённой, так как M($Д_в$)= $\frac{n-1}{n} Д_г$.

Для вычисления $Д_в$ более удобна формула

$$Д_в = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} \right)^2. \quad \textbf{(4)}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии $\delta_в = \sqrt{Д_в}$.

(5)

Несмещённой оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} Д_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}{n-1}. \qquad \textbf{(6)}$$

Исправленным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из исправленной дисперсии.

Сравнивая формулы (3) и (6), видим, что они отличаются только знаменателями. Очевидно, что при достаточно больших значениях **n** выборочная и исправленная дисперсии отличаются мало.

<u>Замечание 1.</u> Если варианты x_i – больше числа, то для упрощения расчёта целесообразно перейти к условным вариантам $\mathbf{u_i = x_i - c}$ (в качестве **c** выгодно принять варианту, расположенную примерно в середине вариационного ряда). Тогда

$$\overline{x_в} = \overline{u_в} + c = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} + c; \quad Д_в(X) = Д_в(u) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} \right]^2 \quad \textbf{(7)}$$

Замечание 2.В случае равностоящих вариант для упрощения расчёта можно перейти к условным вариантам $u_i = \frac{x_i - c}{h}$, где **h** – шаг, т.е. разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами; **c**- ложный нуль (**c** выбирается также, как и в предыдущем случае). Тогда

$$\overline{x_в} = h\overline{u_в} + c; \quad Д_в(X) = h^2 Д_в(u) \qquad \textbf{(8)}$$

Пример. Найти выборочную среднюю $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $Д_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\delta_в$ и исправленную выборочную дисперсию S^2 по данному распределению выборки.

x_i	1	2	5	6
n_i	2	3	4	1

Решение. Объём выборки $n=\sum_{i=1}^{4} n_i = 10$; $\overline{x_в} = \frac{1}{10}(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 5 + 1\cdot 6) = 3{,}4.$

Для вычисления выборочной дисперсии используем формулу (4):

$$Д_в = \frac{2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 5^2 + 1\cdot 6^2}{10} - 3{,}4^2 = 15 - 11{,}56 = 3{,}44;$$

$$\delta_в = \sqrt{3{,}44} \approx 1{,}85;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} Д_в = \frac{10}{9}\cdot 3.44 \approx 3{,}82;$$

$$S = \sqrt{3{,}82 \approx 1{,}95}.$$

Задача. Найти выборочную среднюю $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $Д_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\delta_в$ и исправленную выборочную дисперсию S^2 по данному распределению выборки.

3.1	x_i	2	3	4	6	7
	n_i	1	2	5	8	4
3.2	x_i	1	3	4	5	7
	n_i	3	4	9	3	1
3.3	x_i	3	4	6	7	8
	n_i	2	3	7	2	1
3.4	x_i	2,2	3	3,5	4,5	5
	n_i	2	4	9	3	2
3.5	x_i	3	4	5	6	7
	n_i	1	3	10	4	2

3.6	x_i	1,5	2	4	5	6
	n_i	2	6	7	3	2
3.7	x_i	2	2,5	4	5,5	6
	n_i	2	3	7	2	1
3.8	x_i	1	3	4	5	8
	n_i	2	6	8	3	1
3.9	x_i	2	3	5	6	7
	n_i	1	3	9	5	2
3.10	x_i	4	6	8	9	10
	n_i	2	3	7	5	3
3.11	x_i	1	2	4	6	7
	n_i	2	5	8	4	1
3.12	x_i	2	4	5	7	8
	n_i	3	5	9	2	1
3.13	x_i	1,5	2	3,5	4	6
	n_i	2	3	6	5	4
3.14	x_i	3	5	6	7	10
	n_i	2	2	9	4	3
3.15	x_i	1	2	3	5	7
	n_i	2	4	11	2	1
3.16	x_i	3	3,5	4	6	6,5
	n_i	2	3	8	4	3
3.17	x_i	2	3	4	7	9
	n_i	1	4	8	5	2
3.18	x_i	3	5	6	7	8
	n_i	2	6	9	2	1

3.19	x_i	1,5	2,5	3	4	5
	n_i	1	4	10	3	2
3.20	x_i	4	5	7	8	10
	n_i	3	5	9	2	1
3.21	x_i	1	2	5	6,5	7
	n_i	2	4	10	3	1
3.22	x_i	2	2,5	4	5	6
	n_i	1	3	8	5	3
3.23	x_i	4	6	7	9	11
	n_i	3	5	6	4	2
3.24	x_i	1,2	2	3,5	4	5
	n_i	2	5	6	4	3
3.25	x_i	6	7	8	10	11
	n_i	2	3	9	5	1
3.26	x_i	3	4	5	6	9
	n_i	2	5	7	4	2
3.27	x_i	2	3	6	9	11
	n_i	1	3	8	6	2
3.28	x_i	4	5	6	8	10
	n_i	2	3	10	4	1
3.29	x_i	2	4	6	7	9
	n_i	1	3	10	4	2
3.30	x_i	3	6	7	8	10
	n_i	2	3	8	5	2

Контрольные вопросы и задания:

1. Найти выборочную среднюю $\bar{x}_b$, выборочную дисперсию D_b, выборочное среднее квадратическое отклонение σ_b и исправленную выборочную дисперсию S_2по данному распределению выборки.

1.

x_i	2	3	4	6	7
n_i	1	2	5	8	4

2.

x_i	1	3	4	5	7
n_i	3	4	9	3	1

3.

x_i	3	4	6	7	8
n_i	2	3	7	2	1

4.

x_i	2,2	3	3,5	4,5	5
n_i	2	4	9	3	2

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4
Равномерное распределение. Нормальное распределение. Генеральная совокупность и выборка. Устойчивость выборочных средних. Задачи математической статистики

Цель работы:
- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):
1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   - титульный лист;
   - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Точечные оценки неизвестных параметров распределения.

Пусть требуется количественный признак X генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Поэтому возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение

Точечной называют статическую оценку, которая определяется одним числом

$$\Theta^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \textbf{(1)}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - наблюдаемые значения признака **X**.

Несмещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки.

Смещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещённой оценкой генеральной средней (математического ожидания случайной величины **X**) служит выборочная средняя

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}; \qquad \textbf{(2)}$$

где x_i (i=1,2,..,k) – варианты выборки; n_i (i=1,2,..,k) – соответствующие им частоты; n= $\sum_{i=1}^{k} n_i$ - объём выборки.

Смещённой оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия:

$$Д_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}{n}; \qquad \textbf{(3)}$$

Эта оценка является смещённой, так как M($Д_в$)= $\frac{n-1}{n} Д_г$.

Для вычисления $Д_в$ более удобна формула

$$Д_в = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} \right)^2. \qquad \textbf{(4)}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии $\delta_в = \sqrt{Д_в}$. **(5)**

Несмещённой оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} Д_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}{n-1}. \qquad \textbf{(6)}$$

Исправленным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из исправленной дисперсии.

Сравнивая формулы (3) и (6), видим, что они отличаются только знаменателями. Очевидно, что при достаточно больших значениях **n** выборочная и исправленная дисперсии отличаются мало.

<u>Замечание 1.</u> Если варианты x_i – больше числа, то для упрощения расчёта целесообразно перейти к условным вариантам $\mathbf{u_i = x_i - c}$ (в качестве **c** выгодно принять варианту, расположенную примерно в середине вариационного ряда). Тогда

$$\overline{x_в} = \overline{u_в} + c = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} + c; \; Д_в(X) = Д_в(u) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} \right]^2 \quad \textbf{(7)}$$

Замечание 2. В случае равностоящих вариант для упрощения расчёта можно перейти к условным вариантам $u_i = \frac{x_i - c}{h}$, где **h** – шаг, т.е. разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами; **c**- ложный нуль (**c** выбирается также, как и в предыдущем случае). Тогда

$$\overline{x_в} = h\overline{u_в} + c; \quad Д_в(X) = h^2 Д_в(u) \qquad \textbf{(8)}$$

Пример. Найти выборочную среднюю $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $Д_в$ и выборочное среднее квадратичное отклонение $\delta_в$ по данному распределению выборки.

x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Решение. Объём выборки $n=\sum n_i=100$. Так как варианты равноотстоящие, то перейдём к условным вариантам $\mathbf{u_i}$; h=2. Пусть c=91 (варианта 91 расположена примерно в середине вариационного ряда). Тогда $u_i = \frac{x_i - 91}{2}$. Для упрощения вычислений составим расчётную таблицу.

x_i	n_i	u_i	$n_i\, u_i$	$n_i\, u_i^2$	$n_i\,(u_i+1)^2$
83	6	-4	-24	96	54
85	7	-3	-21	63	28
87	12	-2	-24	48	12
89	15	-1	-15	15	0
91	30	0	0	0	30
93	10	1	10	10	40
95	8	2	16	32	72
97	6	3	18	54	96
99	4	4	16	64	100
101	2	5	10	50	72
	n=100	$\sum n_i u_i$ = -14	$\sum n_i u_i^2$ =432		$\sum n_i (u_i+1)^2$ =504

Для контроля вычислений пользуемся тождеством

$\sum_{i=1}^{k} n_i (u_i+1)^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k} n_i u_i + n$. В данном случае $\sum n_i (u_i+1)^2$ =504;

$\sum_{i=1}^{k} n_i (u_i+1)^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k} n_i u_i + n$=432-28+100=504.

Совпадение контрольных сумм свидетельствует о правильности вычислений.

$\overline{u_в} = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = -0{,}14$; $Д_в$(u)=$\frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 - \left(\overline{u_в}\right)^2$ =4,32-0,0196=4,30.

Используя формулу (8), находим $\overline{x_в}$=-0,14·2+91=90,72; $Д_в$(X)=4,30·4=17,20; $\delta_в$(X)=$\sqrt{17,20} \approx$4,15.

<u>Задача</u>. Найти выборочную среднюю $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $Д_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\delta_в$ по данному распределению выборки.

4.1	x_i	12,5	14,5	16,5	18,5	20,5	22,5	24,5
	n_i	5	10	30	25	15	10	5
4.2	x_i	8	13	18	23	28	33	38
	n_i	4	6	15	35	22	10	8
4.3	x_i	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4	7,8
	n_i	5	15	45	12	10	8	5
4.4	x_i	124	134	144	154	164	174	184
	n_i	4	6	10	40	17	15	8
4.5	x_i	20	25	30	35	40	45	50
	n_i	5	10	20	40	13	8	4
4.6	x_i	70	80	90	100	110	120	130
	n_i	4	6	15	35	18	14	8
4.7	x_i	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	15,5
	n_i	4	16	30	35	6	6	3
4.8	x_i	20	27	34	41	48	55	62
	n_i	7	11	11	60	6	3	2
4.9	x_i	11,4	21,4	31,4	41,4	51,4	61,4	71,4
	n_i	3	17	20	45	7	5	3
4.10	x_i	30	34	38	42	46	50	54
	n_i	5	15	20	40	10	7	3
4.11	x_i	9,2	14,2	19,2	24,2	29,2	34,2	39,2
	n_i	2	15	16	57	5	3	2
4.12	x_i	15,0	20,1	25,2	30,3	35,4	40,5	45,6
	n_i	4	6	15	25	20	20	10

4.13	x_i	10,0	12,1	14,2	16,3	18,4	20,5	22,6
	n_i	5	10	15	30	25	11	4
4.14	x_i	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6
	n_i	5	8	10	12	50	10	5
4.15	x_i	15,1	15,4	15,7	16,0	16,3	16,6	16,9
	n_i	2	3	5	60	12	10	8
4.16	x_i	17,2	19,4	21,6	23,8	26,0	28,2	30,4
	n_i	3	4	8	40	25	15	5
4.17	x_i	8	11	14	17	20	23	26
	n_i	5	11	16	28	25	10	5
4.18	x_i	100	105	110	115	120	125	130
	n_i	2	3	5	60	12	10	8
4.19	x_i	18,4	18,5	18,6	18,7	18,8	18,9	19,0
	n_i	8	12	20	40	10	6	4
4.20	x_i	9,2	9,5	9,8	10,1	10,4	10,7	11,0
	n_i	5	8	9	13	50	11	4
4.21	x_i	20	23	26	29	32	35	38
	n_i	4	6	15	30	25	12	8
4.22	x_i	15,0	17,5	20,0	22,5	25,0	27,5	30,0
	n_i	7	10	13	30	25	10	5
4.23	x_i	13,5	15,5	17,5	19,5	21,5	23,5	25,5
	n_i	3	5	7	40	25	16	4
4.24	x_i	31,5	35,5	39,5	43,5	47,5	51,5	55,5
	n_i	3	4	13	10	20	16	4
4.25	x_i	10,2	13,2	16,2	19,2	22,2	25,2	28,2
	n_i	5	10	15	30	20	14	6
4.26	x_i	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
	n_i	4	5	9	34	26	16	6
4.27	x_i	93	96	99	102	105	108	111
	n_i	4	10	15	34	24	9	4

4.28	x_i	11	14	17	20	23	26	29
	n_i	9	13	20	36	10	7	5
4.29	x_i	18	22	26	30	34	38	42
	n_i	3	16	18	50	6	4	3
4.30	x_i	28	31	34	37	40	43	46
	n_i	6	9	11	13	44	11	6

Контрольные вопросы и задания:

1. Найти выборочную среднюю $\bar{x}_b$, выборочную дисперсию D_b, выборочное среднее квадратическое отклонение σ_b по данному распределению выборки.

1.	x_i	12,5	14,5	16,5	18,5	20,5	22,5	24,5
	n_i	5	10	30	25	15	10	5
2.	x_i	8	13	18	23	28	33	38
	n_i	4	6	15	35	22	10	8
3.	x_i	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4	7,8
	n_i	5	15	45	12	10	8	5
4.	x_i	124	134	144	154	164	174	184
	n_i	4	6	10	40	17	15	8
5.	x_i	20	25	30	35	40	45	50
	n_i	5	10	20	40	13	8	4
6.	x_i	70	80	90	100	110	120	130
	n_i	4	6	15	35	18	14	8

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5
Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки

Цель работы:
- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):
1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   - титульный лист;
   - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Метод доверительных интервалов для оценки неизвестных параметров распределения

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надёжностью **γ** покрывает неизвестный параметр.

1. Для оценки с надёжностью **γ** математического ожидания **a** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней $\overline{x_в}$ при известном генеральном среднем квадратическом отклонении δ служит доверительный интервал

$$\overline{x_в} - \frac{t\delta}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t\delta}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(9)}$$

где $\frac{t\delta}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ - точность оценки; n – объём выборки; t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, *при котором* $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

<u>Пример.</u> Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью γ=0,99 неизвестного математического ожидания нормального распределения **X** генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение δ=2, выборочная средняя $\overline{x_в}$=15,35 и объём выборки n=16.

<u>Решение.</u> Требуется найти доверительный интервал (9). Все величины, кроме t, известны. Найдём t из соотношения $\Phi(t)\frac{0.99}{2}=0.495$. По таблице значений функции Лапласа находим t=2,58. Подставив t=2,58; $\overline{x_в}$=15,35; δ=2; n=16 в (9), получим искомый доверительный интервал 14,06<**a**<16,64.

<u>Пример.</u> Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,95 точность оценки математического ожидания **a** нормального распределения признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней ε=0,2, если известно среднее квадратическое отклонение признака **X** δ=1,3.

<u>Решение.</u> Точность оценки (с надёжностью γ) математического ожидания, а нормального распределения признака X по выборочной средней определяется по формуле $\varepsilon=\frac{t\delta}{\sqrt{n}}$.

Отсюда находим, что $n=\frac{t^2\delta^2}{\varepsilon^2}$. По условию задачи γ=0,95; следовательно, $\Phi(t)\frac{0.95}{2}=0.475$. По таблице значений функции Лапласа находим t=1,96. Подставив t=1,96; δ=1,3 и ε=0,2 в данную формулу, получим искомый объём выборки n=163.

2. Если среднее квадратическое отклонение δ нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности неизвестно, то для оценки (с надёжностью γ) математического ожидания a признака **X** служит доверительный интервал

$$\overline{x_в}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\overline{x_в}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(10)}$$

где S – исправленное среднее квадратическое отклонение; n – объём выборки; t_γ - находят по таблице значений $t_\gamma=t(\gamma,n)$ по заданным **γ** и **n** [3, прил.3].

<u>Замечание</u>. Для нахождения доверительного интервала (10) используют тот факт, что случайная величина $T=\frac{\overline{x}-a}{S/\sqrt{n}}$, где $\overline{x}$ - выборочная средняя; S – исправленное среднее квадратическое отклонение, имеет распределение Стьюдента. При неограниченном возрастании объёма выборки n

распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому при достаточно больших n можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

<u>Задача.</u> Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью **γ** неизвестного математического ожидания **a** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение δ, выборочная средняя $\overline{x_в}$ и объём выборки n.

5.1.	δ=3	$\overline{x_в}$=10,2	n=36	γ=0,95
5.2.	δ=4	$\overline{x_в}$=11,4	n=64	γ=0,99
5.3.	δ=4	$\overline{x_в}$=15,6	n=100	γ=0,99
5.4.	δ=5	$\overline{x_в}$=13,2	n=64	γ=0,95
5.5.	δ=5	$\overline{x_в}$=11,0	n=144	γ=0,999
5.6.	δ=2	$\overline{x_в}$=18,2	n=36	γ=0,95
5.7.	δ=3,5	$\overline{x_в}$=12,4	n=64	γ=0,99
5.8.	δ=3	$\overline{x_в}$=11,6	n=81	γ=0,999
5.9.	δ=4,5	$\overline{x_в}$=19,4	n=100	γ=0,95
5.10.	δ=6	$\overline{x_в}$=18,6	n=81	γ=0,95
5.11.	δ=5	$\overline{x_в}$=17,7	n=100	γ=0,99
5.12.	δ=3	$\overline{x_в}$=24,6	n=81	γ=0,95
5.13.	δ=2,5	$\overline{x_в}$=14,4	n=100	γ=0,999
5.14.	δ=4	$\overline{x_в}$=20,3	n=64	γ=0,99
5.15.	δ=4	$\overline{x_в}$=15,8	n=64	γ=0,95
5.16.	δ=3	$\overline{x_в}$=16,5	n=100	γ=0,999
5.17.	δ=5	$\overline{x_в}$=19,2	n=49	γ=0,95
5.18.	δ=2	$\overline{x_в}$=12,2	n=64	γ=0,999
5.19.	δ=4	$\overline{x_в}$=18,7	n=100	γ=0,99
5.20.	δ=3,5	$\overline{x_в}$=11,9	n=49	γ=0,95
5.21.	δ=5	$\overline{x_в}$=20,8	n=100	γ=0,999
5.22.	δ=4	$\overline{x_в}$=13,6	n=144	γ=0,99
5.23.	δ=3	$\overline{x_в}$=14,8	n=81	γ=0,95
5.24.	δ=2	$\overline{x_в}$=10,4	n=64	γ=0,999
5.25.	δ=4,5	$\overline{x_в}$=15,2	n=81	γ=0,95
5.26.	δ=4	$\overline{x_в}$=15,6	n=49	γ=0,99
5.27.	δ=3	$\overline{x_в}$=22,4	n=64	γ=0,95
5.28.	δ=5	$\overline{x_в}$=26,8	n=81	γ=0,999

5.29. δ=2,4 $\overline{x_в}$=37,5 n=100 γ=0,999

5.30. δ=3,2 $\overline{x_в}$=21,9 n=49 γ=0,95

<u>Задача.</u> Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью **γ** точность оценки математического ожидания **a** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней равна ε, если известно среднее квадратическое отклонение δ признака X.

6.1. δ=2,0 ε=0,4 γ=0,975
6.2. δ=2,5 ε=0,5 γ=0,925
6.3. δ=1,5 ε=0,3 γ=0,95
6.4. δ=2,5 ε=0,4 γ=0,975
6.5. δ=1,3 ε=0,3 γ=0,99
6.6. δ=2,2 ε=0,3 γ=0,925
6.7. δ=1,8 ε=0,4 γ=0,999
6.8. δ=1,7 ε=0,2 γ=0,95
6.9. δ=1,5 ε=0,3 γ=0,989
6.10. δ=1,1 ε=0,25 γ=0,999
6.11. δ=1,2 ε=0,3 γ=0,999
6.12. δ=1,6 ε=0,25 γ=0,925
6.13. δ=2,1 ε=0,4 γ=0,95
6.14. δ=2,3 ε=0,3 γ=0,975
6.15. δ=1,4 ε=0,25 γ=0,99
6.16. δ=1,2 ε=0,2 γ=0,95
6.17. δ=1,7 ε=0,3 γ=0,975
6.18. δ=2,4 ε=0,4 γ=0,99
6.19. δ=1,3 ε=0,2 γ=0,95
6.20. δ=1,9 ε=0,25 γ=0,975
6.21. δ=1,0 ε=0,2 γ=0,925
6.22. δ=1,6 ε=0,4 γ=0,999
6.23. δ=2,2 ε=0,4 γ=0,99
6.24. δ=1,8 ε=0,3 γ=0,95
6.25. δ=1,3 ε=0,25 γ=0,975
6.26. δ=1,2 ε=0,35 γ=0,99
6.27. δ=2,8 ε=0,1 γ=0,925
6.28. δ=1,1 ε=0,2 γ=0,95
6.29. δ=0,9 ε=0,25 γ=0,99
6.30. δ=1,4 ε=0,4 γ=0,999

Контрольные вопросы и задания:

1. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью γ неизвестного математического ожидания а нормально распределённого признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x_в}$ и объём выборки n.

1.	σ=3	$\overline{x_в}$=10,2	n=36	γ=0,95
2.	σ=4	$\overline{x_в}$=11,4	n=64	γ=0,99
3.	σ=4	$\overline{x_в}$=15,6	n=100	γ=0,99
4.	σ=5	$\overline{x_в}$=13,2	n=64	γ=0,95
5.	σ=5	$\overline{x_в}$=11,0	n=144	γ=0,999

2. Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью γ точность оценки математического ожидания а нормально распределённого признака X генеральной совокупности по выборочной средней равна ε, если известно среднее квадратическое отклонение σ признака X.

1.	σ=2,0	ε=0,4	γ=0,975
2.	σ=2,5	ε=0,5	γ=0,925
3.	σ=1,5	ε=0,3	γ=0,95

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6
Метод наименьших квадратов

Цель работы:

– Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
– Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
– Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   – титульный лист;
   – расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   – выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Метод доверительных интервалов для оценки неизвестных параметров распределения

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надёжностью **γ** покрывает неизвестный параметр.

Для оценки с надёжностью **γ** математического ожидания **a** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней $\overline{x_в}$ при известном генеральном среднем квадратическом отклонении δ служит доверительный интервал

$$\overline{x_в} - \frac{t\delta}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t\delta}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(9)}$$

где $\frac{t\delta}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ - точность оценки; n – объём выборки; t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, *при котором* $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

<u>Пример.</u> Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью **γ**=0,99 неизвестного математического ожидания **a** нормального распределённого признака **X** генеральной совокупности, если известны выборочная средняя $\overline{x_в}$=48,5; исправленное среднее квадратическое отклонение S=4,0 и объём выборки n=16.

<u>Решение.</u> Требуется найти доверительный интервал (10). Все величины, кроме t_γ, известны. По таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ по **γ**=0,99 и n=16 находим t_γ=2,95. Поставив $\overline{x_в}$=48,5; S=4,0; n=16; t_γ=2,95 в формулу (10), получим искомый доверительный интервал: 45,55<a<51.45.

3. Интервальной оценкой с надёжностью **γ** среднего квадратического отклонения δ нормально распределённого признака X генеральной совокупности по исправленному среднему квадратическому отклонению S служит доверительный интервал

$$S(1-q) < \delta < S(1+q) \quad (\text{при } q<1); \qquad \textbf{(11)}$$
$$0 < \delta < S(1+q) \quad (\text{при } q>1).$$

где q находят по таблице значений q=q(**γ**,n) [3, прил.3].

<u>Пример.</u> Произведено n=20 измерений одним прибором (без систематических ошибок) некоторой физической величины, причём исправленное среднее квадратическое отклонение S случайных ошибок измерений оказалось равным 0,7. Найти точность прибора с надёжностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

<u>Решение.</u> Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала, покрывающего δ с заданной надёжностью **γ**=0,95. По данным **γ**=0,95 иn=20 по таблице значений q=q(**γ**,n) найдём q=0,37. Так как q<1, то доверительный интервал имеет вид S (1-q)<δ<S (1+q). Подставив S=0,7; q=0,37 в это соотношение, получим искомый доверительный интервал 0,441<δ<0,959.

<u>Задача.</u> Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью **γ** неизвестного математического ожидания **a** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности, если известны выборочная средняя $\overline{x_в}$, исправленное среднее квадратическое отклонение S и объём выборки n.

7.1.	n=9	$\overline{x_в}$=35,3	S=4,5	γ=0,95
7.2.	n=16	$\overline{x_в}$=98,7	S=4	γ=0,999
7.3.	n=12	$\overline{x_в}$=74,6	S=5	γ=0,99
7.4.	n=25	$\overline{x_в}$=57,3	S=5	γ=0,999
7.5.	n=18	$\overline{x_в}$=132,2	S=8	γ=0,99
7.6.	n=16	$\overline{x_в}$=84,8	S=6,4	γ=0,95

7.7.	n=30	$\overline{x_в}$=117,5	S=5,5	γ=0,999
7.8.	n=16	$\overline{x_в}$=89,1	S=6	γ=0,99
7.9.	n=10	$\overline{x_в}$=49,9	S=3	γ=0,95
7.10.	n=18	$\overline{x_в}$=67,5	S=4	γ=0,999
7.11.	n=15	$\overline{x_в}$=103,7	S=4,5	γ=0,99
7.12.	n=16	$\overline{x_в}$=78,3	S=5	γ=0,95
7.13.	n=12	$\overline{x_в}$=91,6	S=3,5	γ=0,99
7.14.	n=25	$\overline{x_в}$=132,2	S=6	γ=0,999
7.15.	n=12	$\overline{x_в}$=59,4	S=4	γ=0,95
7.16.	n=10	$\overline{x_в}$=76,8	S=3,5	γ=0,95
7.17.	n=20	$\overline{x_в}$=138,1	S=3	γ=0,999
7.18.	n=25	$\overline{x_в}$=51,3	S=7,5	γ=0,95
7.19.	n=25	$\overline{x_в}$=49,7	S=5	γ=0,99
7.20.	n=16	$\overline{x_в}$=74,9	S=2	γ=0,999
7.21.	n=12	$\overline{x_в}$=58,4	S=3	γ=0,95
7.22.	n=16	$\overline{x_в}$=49,3	S=4	γ=0,99
7.23.	n=35	$\overline{x_в}$=94,8	S=4	γ=0,999
7.24.	n=20	$\overline{x_в}$=84,7	S=5	γ=0,95
7.25.	n=9	$\overline{x_в}$=79,2	S=3	γ=0,99
7.26.	n=18	$\overline{x_в}$=98,7	S=3,5	γ=0,999
7.27.	n=25	$\overline{x_в}$=73,6	S=4	γ=0,95
7.28.	n=20	$\overline{x_в}$=67,8	S=3	γ=0,95
7.29.	n=15	$\overline{x_в}$=71,3	S=2,5	γ=0,999
7.30.	n=18	$\overline{x_в}$=63,5	S=4	γ=0,95

Задача. По данным выборки объёма n из генеральной совокупности нормально распределённого признака X найдено исправленное среднее квадратическое отклонение S. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение δ с надёжностью **γ**.

8.1.	n=20	S=0,5	γ=0,999
8.2.	n=10	S=1,5	γ=0,99
8.3.	n=6	S=4,5	γ=0,95
8.4.	n=30	S=0,8	γ=0,999
8.5.	n=9	S=2,4	γ=0,99
8.6.	n=12	S=2,3	γ=0,95
8.7.	n=25	S=0,7	γ=0,999
8.8.	n=18	S=0,6	γ=0,99
8.9.	n=15	S=1,3	γ=0,95
8.10.	n=35	S=0,9	γ=0,999

8.11.	n=20	S=1,8	γ=0,99
8.12.	n=16	S=0,7	γ=0,95
8.13.	n=40	S=1,0	γ=0,999
8.14.	n=25	S=2,1	γ=0,99
8.15.	n=18	S=1,5	γ=0,95
8.16.	n=45	S=1,1	γ=0,999
8.17.	n=30	S=0,8	γ=0,99
8.18.	n=20	S=0,6	γ=0,95
8.19.	n=50	S=0,6	γ=0,999
8.20.	n=35	S=1,0	γ=0,99
8.21.	n=25	S=1,1	γ=0,95
8.22.	n=16	S=2,5	γ=0,999
8.23.	n=40	S=1,4	γ=0,99
8.24.	n=30	S=0,9	γ=0,95
8.25.	n=15	S=1,8	γ=0,999
8.26.	n=8	S=2,8	γ=0,99
8.27.	n=11	S=1,5	γ=0,95
8.28.	n=14	S=2,0	γ=0,999
8.29.	n=45	S=1,9	γ=0,99
8.30.	n=35	S=0,5	γ=0,95

Контрольные вопросы и задания:

Экспериментально получены пять значений искомой функции y=f(x) при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию y=f(x) в виде y=ax+b.

x	1	2	3	4	5
y	4.3	5.3	3.8	1.8	2.3

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7
Линейная корреляция

Цель работы:

– Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
– Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
– Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   – титульный лист;
   – расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   – выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Элементы теории корреляции.

Две случайные величины могут быть либо независимыми, либо связаны функциональной зависимостью, либо связаны зависимостью другого рода, называемой статистической. Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечёт изменение распределения другой случайной величины. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой. В этом случае статистическую зависимость называют корреляционной. Одной из задач математической статистики является исследование корреляционной зависимости между случайными величинами.
Пусть рассматривается система количественных признаков (Х, У). Условной средней $\overline{y_x}$ называют среднее арифметическое наблюдавшихся значений У, соответствующих значению Х=х. Например, если при x_1=4 величина У приняла значения y_1=2; y_2=5; y_3=7; y_4=10, то условная средняя

$\overline{y_{x_1}} = \frac{2+5+7+10}{4} = 6$. Аналогично определяется условная средняя $\overline{x_y}$.

Условна средняя $\overline{y_x}$ является функцией от х, т.е. $\overline{y_x} = f^*(x)$. Это уравнение называют выборочным уравнением регрессии У на Х; функцию $f^*(x)$ называют выборочной регрессией У на Х, а её график – выборочной

линией регрессии У на Х.

Аналогично уравнение $\overline{x_y} = \varphi^*(y)$ называют выборочным уравнением регрессии Х на У; функцию $\varphi^*(y)$ называют выборочной регрессией Х на У, а её график – выборочной линией регрессией Х на У. Если обе линии регрессии У на Х и Х на У являются прямыми, то корреляцию называют линейной.

Нахождение параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по не сгруппированным данным

Пусть в результате n независимых опытов получены n пар чисел (x_1; y_1), (x_2; y_2),…(x_n; y_n). Найдём по этим данным наблюдений выборочное уравнение прямой линии регрессии У на Х. Так как различные значение x признака Х и соответствующие значения y признака У наблюдались по одному разу, то нет надобности использовать понятие условной средней. Поэтому искомое уравнение можно записать в виде

$$y = \rho_{yx} x + в. \qquad \textbf{(12)}$$

Угловой коэффициент выборочной прямой линии регрессии У на Х называют выборочным коэффициентом регрессии У на Х и обозначают ρ_{yx}.

Используя метод наименьших квадратов, получаем систему линейных уравнений для определения параметров ρ_{yx} и $в$:

$$\begin{cases} \rho_{yx} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + в \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \rho_{yx} \sum_{i=1}^{n} x_i + вn = \sum_{i=1}^{n} y_i; \end{cases} \qquad \textbf{(13)}$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Х на У.

Пример. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии У на Х по данным n=6 наблюдений.

x_i	1,5	2,0	3,0	3,5	4,5	5,0
y_i	1,3	2,0	2,1	2,7	2,6	3,3

Решение. Составим расчётную таблицу.

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1,5	1,3	2,25	1,95
2,0	2,0	4,00	4,00
3,0	2,1	9,00	6,30
3,5	2,7	14,25	9,45
4,5	2,6	20,25	11,70
5,0	3,3	25,00	16,50
Σx_i=19,5	Σy_i=14,0	Σx_i^2=74,75	Σx_iy_i=49,90

Для определения параметров ρ_{yx} и $в$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 74{,}75\rho + 19{,}5в = 49{,}9; \\ 19{,}5\rho + 6в = 14. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём $\rho_{yx} \approx 0{,}39$; $в \approx 1{,}08$. Запишем искомое уравнение прямой линии регрессии: y=0,39x+1,08.

Сделаем чертёж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построим экспериментальные точки и прямую линию регрессии.

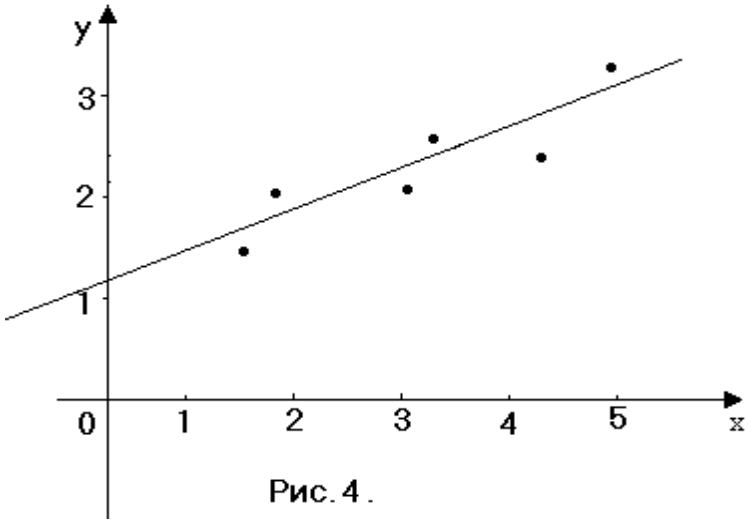

Рис. 4 .

Контрольные вопросы и задания:

1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии У на Х по данным n=5 наблюдений. Сделать чертёж, на котором построить экспериментальные точки и прямую линию регрессии.

1.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,9	5,9	4,4	3,4	2,9

2.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	3,5	5,8	7,1	6,1	7,5

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8
Криволинейная корреляция

Цель работы:
- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):
1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   - титульный лист;
   - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Нахождение параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным

При большом числе наблюдений одно и то же значение x может встретиться n_x одно и то же значение y – n_y одна и та же пар (x; y) может наблюдаться n_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений группируют, т.е. подсчитывают частоты n_x, n_y, n_{xy}. Все сгруппированные данные записывают в иде таблицы, которую называют корреляционной (см. пример 2).

Обозначив $\bar{x}$, $\bar{y}$ - выборочные средние признаков X и У; δ_x^*, δ_y^* - выборочные средние квадратические отклонения этих признаков; n- объём выборки. Введём также следующие обозначение:

$$r_в = \rho_{xy}\frac{\delta_x^*}{\delta_y^*}; \qquad \textbf{(14)}$$

$r_в$ называется <u>выборочным коэффициентом корреляции</u>. Выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\delta_x^*\delta_y^*} \qquad \textbf{(15)}$$

служит для оценки силы линейной корреляционной связи между признаками X и У.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии У на Х в этом случае имеет вид

$$\overline{y_x} - \bar{y} = r_в \frac{\delta_y^*}{\delta_x^*}(x - \bar{x}). \qquad \textbf{(16)}$$

Это уравнение можно записать в более симметричной форме:

$$\frac{\overline{y_x} - \bar{y}}{\delta_y^*} = r_в \frac{(x - \bar{x})}{\delta_x^*} \qquad \textbf{(16´)}$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Х на У имеет вид

$$\overline{x_y} - \bar{x} = r_в \frac{\delta_x^*}{\delta_y^*}(y - \bar{y}) \qquad \textbf{(17)}$$

или

$$\frac{\overline{x_y} - \bar{x}}{\delta_x^*} = r_в \frac{(y - \bar{y})}{\delta_y^*} \qquad \textbf{(17´)}$$

Если данные наблюдений над признаками Х и У заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то целесообразно перейти к условным вариантам

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}; \ \upsilon_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}, \qquad \textbf{(18)}$$

где c_1 –«ложный нуль» вариант Х; h_1- шаг, т.е. разность между двумя соседними вариантами Х; c_2 – «ложный нуль» вариант У; h_2 – шаг вариант У.

В этом случае выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{\sum n_{u\upsilon} u\upsilon - n\bar{u}\bar{\upsilon}}{n\delta_u \delta_\upsilon}; \qquad \textbf{(19)}$$

где $\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n}$; $\bar{\upsilon} = \frac{\sum n_\upsilon \upsilon}{n}$; $\delta_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}$; $\delta_\upsilon = \sqrt{\overline{\upsilon^2} - (\bar{\upsilon})^2}$. **(20)**

Зная $\bar{u}$, $\bar{\upsilon}$, δ_u, δ_υ можно определить

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + c_1; \ \bar{y} = \bar{\upsilon}h_2 + c_2; \quad \delta_x^* = \delta_u h_1; \ \delta_y^* = \delta_\upsilon h_2. \qquad \textbf{(21)}$$

<u>Пример.</u> Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии У на Х и Х на У по данным, приведённым в корреляционной таблице. Сделать чертёж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить условные средние, вычисленные по корреляционной таблице, и прямые линии регрессии У на Х и Х на У.

y \ x	5	10	15	20	n_y
10	2	-	-	-	2
20	5	4	1	-	10
30	3	8	6	3	20
40	-	3	6	6	15
50	-	-	2	1	3
n_x	10	15	15	10	n=50

<u>Решение.</u> Составим корреляционную таблицу в условных вариантах, выбрав в качестве «ложных нулей» c_1=10; c_2=30. В данном примере h_1=5; h_2=10/

υ \ u	-1	0	1	2	n_υ
-2	2	-	-	-	2
-1	5	4	1	-	10
0	3	8	6	3	20
1	-	3	6	6	15
2	-	-	2	1	3
n_u	10	15	15	10	n=50

По формулам (20) получаем:

$$\bar{u} = \frac{20+15-10}{50} = 0{,}50;$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{-4-10+15+6}{50} = 0{,}14;$$

$$\overline{u^2} = \frac{10+15+40}{50} = 1{,}30;$$

$$\overline{\upsilon^2} = \frac{8+10+15+12}{50} = 0{,}90;$$

$$\delta_u = \sqrt{1{,}30-0{,}25} = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}02;$$

$$\delta_\upsilon = \sqrt{0{,}90-0{,}0196} = \sqrt{0{,}8804} \approx 0{,}94.$$

Далее определяем

$\sum n_{u\upsilon} u\upsilon$ = -1⊙(-2⊙2-1⊙5)+1⊙(-1⊙1+1⊙6+2⊙2)+ +2⊙(1⊙6+2⊙1)=34 и

искомый выборочный коэффициент $r_в = \frac{34-50\cdot 0{,}5\cdot 0{,}14}{50\cdot 1{,}02\cdot 0{,}94} \approx 0{,}64.$

Вычислим $\bar{x} = \bar{u}h_1 + c_1$=0,5⊙5+10=12,5; $\bar{y} = \bar{\upsilon}h_2 + c_2$=0,14⊙10+30=31,4; $\delta_x^* = \delta_u h_1$=1,02⊙5=5,1; $\delta_y^* = \delta_\upsilon h_2$=0,94⊙10=9,4.

Подставим найденные значения в соотношение (16), получим искомое уравнение прямой линии регрессии У на Х: $\overline{y_x} - 31{,}4 = 0{,}64\frac{9{,}4}{5{,}1}(x - 12{,}5)$ или окончательно $\overline{y_x}$ =1,18x+16,65. **(I)**

Аналогично получим выборочное уравнение прямой линии регрессии Х на У: $\overline{x_y} - 12{,}5 = 0{,}64\frac{5{,}1}{9{,}4}(y - 31{,}4)$ т.е. $\overline{x_y}$ =0,35y+1,51. **(II)**

По данным, приведённым в корреляционной таблице, вычислим условные средние:

$$\overline{y_5} = \frac{2\cdot 10 + 5\cdot 20 + 3\cdot 30}{10} = 21;$$

$$\overline{y_{10}} = \frac{4\cdot 20 + 8\cdot 30 + 3\cdot 40}{15} = 29{,}33;$$

$$\overline{y_{15}} = \frac{1\cdot 20 + 6\cdot 30 + 6\cdot 40 + 2\cdot 50}{15} = 36;$$

$$\overline{y_{20}} = \frac{3\cdot 30 + 6\cdot 40 + 1\cdot 50}{10} = 38.$$

Аналогично найдём $\overline{x_{10}}$ =5; $\overline{x_{20}}$ =8; $\overline{x_{30}}$ =12,25; $\overline{x_{40}}$ =16; $\overline{x_{50}}$ =16,67.

Полученные прямые линии регрессии У на Х и Х на У вместе с вычисленными условными средними изображены на рис.5.

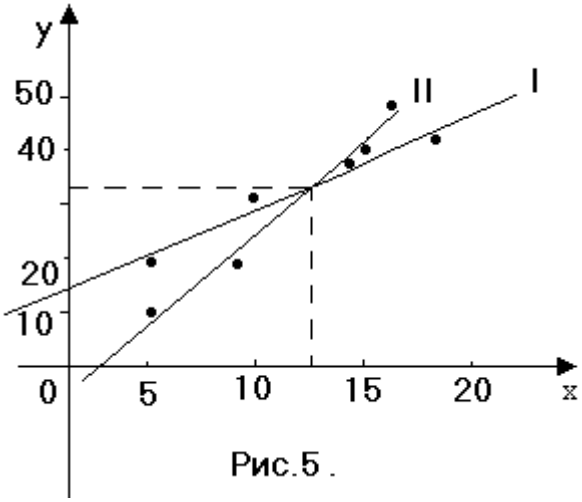

Рис.5 .

<u>Задача.</u> Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии У на Х по данным n=5 наблюдений. Сделать чертёж, на котором построить экспериментальные точки и прямую линию регрессии.

9.1	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	4,9	5,9	4,4	3,4	2,9
9.2	x_i	2	4	6	8	10
	y_i	3,5	5,8	7,1	6,1	7,5
9.3	x_i	1	3	4	6	7
	y_i	0,9	2,9	2,5	5,1	4,0

9.4	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	4,7	5,7	4,2	2,3	2,7
9.5	x_i	0	2	4	6	7
	y_i	3,5	3,8	1,8	1,5	1,4
9.6	x_i	1	3	4	5	6
	y_i	1,5	4,5	4,1	6,4	6,8
9.7	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	4,5	5,5	3,9	2,1	2,5
9.8	x_i	2	3	4	5	6
	y_i	5,3	6,3	4,9	2,9	3,3
9.9	x_i	0	1	2	3	4
	y_i	1,2	2,1	1,5	2,9	2,5
9.10	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	4,2	5,2	3,7	1,7	2,2
9.11	x_i	2	3	4	5	6
	y_i	4,9	5,7	4,4	2,4	2,9
9.12	x_i	0	1	2	3	4
	y_i	3,7	4,2	2,7	3,3	1,5
9.13	x_i	2	3	4	6	7
	y_i	1,5	2,8	2,4	4,8	3,8
9.14	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	2,9	3,9	2,4	0,8	1,3
9.15	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	4,1	4,9	3,6	1,9	2,1
9.16	x_i	0	1	3	5	7
	y_i	4,3	2,5	3,1	2,1	0,3
9.17	x_i	1	3	5	7	9
	y_i	2,5	4,8	5,9	4,9	6,5

9.18	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	3,9	4,8	3,4	1,4	1,9
9.19	x_i	0	2	4	6	8
	y_i	3,5	6,1	6,9	6,5	7,5
9.20	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	2,3	2,5	4,5	4,1	5,5
9.21	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	3,7	4,7	3,2	1,4	1,7
9.22	x_i	2	3	4	5	6
	y_i	5,5	6,5	5,1	3,2	3,6
9.23	x_i	2	4	6	8	10
	y_i	4,5	7,1	8,1	7,5	8,5
9.24	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	3,5	4,5	2,9	1,5	1,8
9.25	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	3,3	4,3	2,9	1,1	1,4
9.26	x_i	1	3	5	7	9
	y_i	2,5	1,8	3,1	4,9	6,1
9.27	x_i	2	4	6	7	8
	y_i	2,5	2,8	5,1	3,9	5,3
9.28	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	0,9	3,3	4,5	4,1	6,2
9.29	x_i	1	2	3	4	5
	y_i	3,1	2,6	3,4	2,5	0,9
9.30	x_i	0	2	4	6	8
	y_i	0,8	2,5	2,6	4,8	3,9

Задача. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии У на Х и Х на У по данным, приведённым в корреляционной таблице. Сделать чертёж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить условные средние, вычисленные по корреляционной таблице, и прямые линии регрессии У на Х и Х на У.

10.1.

y \ x	10	15	20	25	30	35	n_y
12	4	2	-	-	-	-	6
22	-	4	4	-	-	-	8
32	-	-	4	46	5	-	55
42	-	-	2	8	7	-	17
52	-	-	-	4	7	3	14
n_x	4	6	10	58	19	3	n=100

10.2.

y \ x	5	10	15	20	25	30	n_y
7	2	3	-	-	-	-	5
17	-	6	4	-	-	-	10
27	-	-	40	2	8	-	50
37	-	-	4	10	6	-	20
47	-	-	-	5	7	3	15
n_x	2	9	48	17	21	3	n=100

10.3.0

y \ x	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4	-	-	-	-	
35	-	5	3	-	-	-	8
45	-	-	7	45	4	-	56
55	-	-	2	8	5	-	15
65	-	-	-	4	6	5	15
n_x	2	9	12	57	15	5	n=100

10.4.

y \ x	1	6	11	16	21	26	n_y
10	2	4	-	-	-	-	6
20	-	5	3	-	-	-	8
30	-	-	4	49	2	-	55
40	-	-	2	10	5	-	17
50	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	9	9	63	14	3	n=100

10.5.

y \ x	4	9	14	19	24	29	n_y
8	3	3	-	-	-	-	6
12	-	3	7	-	-	-	10
16	-	-	6	30	10	-	46
20	-	-	7	11	8	-	26
24	-	-	-	4	5	3	12
n_x	3	6	20	45	23	3	n=100

10.6.

y \ x	10	15	20	25	30	35	n_y
7	4	2	-	-	-	-	6
13	-	5	3	-	-	-	8
19	-	-	6	40	4	-	50
25	-	-	2	7	8	-	17
31	-	-	-	3	8	8	19
n_x	4	7	11	50	20	8	n=100

10.7.

y \ x	6	10	14	18	22	26	n_y
20	2	4	-	-	-	-	6
30	-	5	4	-	-	-	9
40	-	-	8	40	2	-	50
50	-	-	4	11	6	-	21
60	-	-	-	3	7	4	14
n_x	2	9	16	54	15	4	n=100

10.8.

y \ x	16	21	26	31	36	41	n_y
5	2	3	-	-	-	-	5
10	-	5	6	-	-	-	11
15	-	-	6	45	2	-	53
20	-	-	2	7	7	-	16
25	-	-	-	4	7	4	15
n_x	2	8	14	56	16	4	n=100

10.9.

y \ x	9	14	19	24	29	34	n_y
30	3	6	-	-	-	-	9
40	-	2	5	-	-	-	7
50	-	-	8	35	7	-	50
60	-	-	3	9	8	-	20
70	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	8	16	49	21	3	n=100

10.10.

y \ x	4	9	14	19	24	29	n_y
10	2	3	-	-	-	-	5
20	-	6	4	-	-	-	10
30	-	-	3	48	3	-	54
40	-	-	2	9	6	-	17
50	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	9	9	61	16	3	n=100

10.11.

y \ x	5	10	15	20	25	30	n_y
14	2	4	-	-	-	-	6
24	-	5	3	-	-	-	8
34	-	-	2	50	3	-	55
44	-	-	2	10	16	-	28
54	-	-	-	-	2	1	3
n_x	2	9	13	56	18	2	n=100

10.12.

y \ x	10	15	20	25	30	35	n_y
12	2	4	-	-	-	-	6
22	-	5	4	-	-	-	9
32	-	-	7	40	4	-	51
42	-	-	2	10	8	-	20
52	-	-	-	6	6	2	14
n_x	2	9	13	56	18	2	n=100

10.13.

y \ x	20	25	30	35	40	45	n_y
24	1	5	-	-	-	-	6
30	-	5	3	-	-	-	8
36	-	-	7	45	4	-	56
42	-	-	2	8	6	-	16
48	-	-	-	5	6	3	14
n_x	1	10	12	58	16	3	n=100

10.14.

y \ x	11	16	21	26	31	36	n_y
10	3	3	-	-	-	-	6
16	-	4	5	-	-	-	9
22	-	-	8	39	3	-	50
28	-	-	4	10	6	-	20
34	-	-	-	5	7	3	15
n_x	3	7	17	54	16	3	n=100

10.15.

y \ x	5	10	15	20	25	30	n_y
11	4	2	-	-	-	-	6
21	-	5	3	-	-	-	8
31	-	-	5	45	6	-	56
41	-	-	2	8	7	-	17
51	-	-	-	4	7	2	13
n_x	4	7	10	57	20	2	n=100

10.16.

y \ x	4	9	14	19	24	29	n_y
8	3	3	-	-	-	-	6
18	-	5	4	-	-	-	9
28	-	-	40	2	8	-	50
38	-	-	5	10	6	-	21
48	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	n=100

10.17.

y \ x	5	8	11	14	17	20	n_y
11	1	5	-	-	-	-	6
16	-	5	4	-	-	-	9
21	-	11	40	4	-	-	55
26	-	-	2	9	5	-	16
31	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	21	46	17	12	3	n=100

10.18.

y \ x	2	7	12	17	22	27	n_y
9	3	3	-	-	-	-	6
19	-	7	12	-	-	-	19
29	-	-	3	40	2	-	45
39	-	-	1	10	6	-	17
49	-	-	-	4	7	2	13
n_x	3	10	16	54	15	2	n=100

10.19.

y \ x	2	8	14	20	26	32	n_y
8	2	4	-	-	-	-	6
12	-	3	7	-	-	-	10
16	-	-	5	30	10	-	45
20	-	-	7	10	6	-	23
24	-	-	-	7	6	3	16
n_x	2	7	19	47	22	3	n=100

10.20.

y \ x	10	15	20	25	30	35	n_y
6	4	2	-	-	-	-	6
12	-	6	2	-	-	-	8
18	-	-	5	40	5	-	50
24	-	-	4	7	8	-	19
30	-	-	-	2	8	7	17
n_x	4	8	11	49	21	7	n=100

10.21.

y \ x	5	-	13	17	21	25	n_y
20	1	3	-	-	-	-	4
26	2	5	4	-	-	-	11
32	-	-	9	40	1	-	50
38	-	-	4	11	6	-	21
44	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	17	55	14	3	n=100

10.22.

y \ x	4	8	12	16	20	24	n_y
5	1	2	-	-	-	-	3
10	3	6	4		-	-	13
15	-	-	6	45	2	-	53
20	-	-	2	8	6	2	18
25	-	-	-	4	7	2	13
n_x	4	8	12	57	15	4	n=100

10.23.

y \ x	5	9	13	17	21	25	n_y
15	2	4	-	-	-	-	6
18	-	6	2	-	-	-	8
21	-	2	3	50	-	-	55
24	-	-	2	10	5	-	17
27	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	12	7	64	12	3	n=100

10.24.

y \ x	9	16	23	30	37	44	n_y
5	4	5	-	-	-	-	9
9	-	3	7	-	-	-	10
13	-	-	4	25	18	-	47
17	-	-	2	10	8		20
21	-	-	-	5	6	3	14
n_x	4	8	13	40	32	3	n=100

10.25.

y \ x	2	7	12	17	22	27	n_y
6	2	2	-	-	-	-	4
14	-	7	3	-	-	-	10
22	-	-	12	40	2	-	54
30	-	-	1	10	6	-	17
38	-	-	-	4	7	4	15
n_x	2	9	16	54	15	4	n=100

10.26.

y \ x	7	10	13	16	19	22	n_y
5	3	5	-	-	-	-	8
10	-	6	3	-	-	-	9
20	-	-	7	30	3	-	40
25	-	-	10	12	8	-	30
	3	-	-	5	6	2	13
n_x		11	20	47	17	2	n=100

10.27.

y \ x	10	20	30	40	50	60	n_y
8	2	3	-	-	-	-	5
13	-	4	6	-	-	-	10
18	-	-	5	40	5	-	50
23	-	-	2	8	10	-	20
28	-	-	-	3	7	5	15
n_x	2	7	13	51	22	5	n=100

10.28.

y \ x	6	12	18	24	30	36	n_y
10	3	4	-	-	-	-	7
15	-	6	4	-	-	-	10
20	-	-	4	42	4	-	50
25	-	-	5	10	5	-	20
30	-	-	-	3	6	4	13
n_x	3	10	13	55	15	4	n=100

10.29.

y \ x	4	8	12	16	20	24	n_y
2	6	4	-	-	-	-	10
7	-	5	7	-	-	-	12
12	-	-	35	6	4	-	45
17	-	-	4	10	6	-	20
22	-	-	-	2	8	3	13
n_x	6	9	46	18	18	3	n=100

10.30.

y \ x	2	12	22	32	42	52	n_y
4	5	3	-	-	-	-	8
10	-	8	7	-	-	-	15
16	-	-	9	30	6	-	45
22	-	-	4	10	8	-	22
28	-	-	-	2	4	4	10
n_x	5	11	20	42	18	4	n=100

Контрольные вопросы и задания:

1. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии У на Х и Х на У по данным, приведённым в корреляционной таблице. Сделать чертёж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить условные средние, вычисленные по корреляционной таблице, и прямые линии регрессии У на Х и Х на У.

y \ x	10	15	20	25	30	35	n_y
12	4	2	-	-	-	-	6
22	-	4	4	-	-	-	8
32	-	-	4	46	5	-	55
42	-	-	2	8	7	-	17
52	-	-	-	4	7	3	14
n_x	4	6	10	58	19	3	n=100

y \ x	5	10	15	20	25	30	n_y
7	2	3	-	-	-	-	5
17	-	6	4	-	-	-	10
27	-	-	40	2	8	-	50
37	-	-	4	10	6	-	20
47	-	-	-	5	7	3	15
n_x	2	9	48	17	21	3	n=100

2. Экспериментально получены пять значений искомой функции y=f(x) при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию y=f(x) в виде $y=ax^2+bx+c$.

x	1	2	3	4	5
y	4.3	5.3	3.8	1.8	2.3

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9
Методы расчета сводных характеристик выборки. Критерий Пирсона. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Цель работы:
- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

Порядок выполнения работы (отчёт):
1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
   - титульный лист;
   - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
   - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

Теоретические сведения

Статистическая проверка статистических гипотез. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой гипотезе.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, её называют статистической. В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют уровнем значимости, и обозначают α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают β.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют

случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым значением $K_{набл}$ называют то значение критерия, которое вычислено по данным вы0борки.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение принадлежит области принятия гипотезы, то нулевую гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) $к_{кр}$ называют точ, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают правостороннюю, левостороннюю и двустороннюю критические области. Рассмотрим, например, вопрос об отыскании правосторонней критической области. Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > к_{кр}$, где $к_{кр}$ – положительное число. Для нахождения правосторонней критической области нужно найти критическую точку. Для этого задают достаточно малую вероятность – уровень значимости α. Затем ищут критическую точку $к_{кр}$ исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значение больше $к_{кр}$, была равна принятому уровню значимости, т.е. $P(K > к_{кр}) = \alpha$. Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку, удовлетворяющую этому требованию.

Когда критическая точка найдена, вычисляют по данным выборки наблюдаемое значение критерия и, если окажется, что $K_{набл} > к_{кр}$, нулевую гипотезу отвергают; если же $K_{набл} < к_{кр}$, нулевую гипотезу принимают.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения генеральной совокупности.

Имеются несколько критериев согласия: χ^2 Пирсона, Комогорова, Смирнова и др.

Ограничимся описанием применения критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении признака X генеральной совокупности.

Пусть из генеральной совокупности получена выборка n:

$$\begin{matrix} (x_1; x_2), & (x_2; x_3), \ldots, & (x_s; x_{s+1}) \\ n_1 & n_2 \ldots & n_s \end{matrix} \qquad \textbf{(22)}$$

Здесь в первой строке указаны частичные интервалы (x_i; x_{i+1}), во второй – соответствующие им частоты n_i: $\Sigma n_i = n$.

Допустим, что в предложении нормального распределения признака X генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n_i. При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{s}(n_i - n_i')^2}{n_i'} \qquad \textbf{(23)}$$

К. Пирсон доказал, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины (23) стремится к закону распределения χ^2 с **к** степенями свободы. Поэтому случайная величина (23) обозначена χ^2, а сам критерий называют <u>критерием согласия</u> “хи квадрат”. Число степеней свободы находят по формуле **к=s-1-r**, s – число частичных интервалов выборки; r – число параметров предполагаемого распределения. В частности, если предполагаемое распределение является нормальным, то r=2. Следовательно, к=s-3.

Строим правостороннюю критическую область исходя из требования, чтобы в предположении справедливости нулевой гипотезы $P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha;к)] = \alpha$.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0 (признак X генеральной совокупности распределён нормально), надо:

1) вычислить наблюдаемое значения критерия $\chi^2_{набл} = \frac{\sum_{i=1}^{s}(n_i - n_i')^2}{n_i'}$;
2) по таблице критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы к=s-3 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha;к)$.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}(\alpha;к)$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, т.е. данные наблюдений согласуются с нулевой гипотезой.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}(\alpha;к)$, то нулевую гипотезу отвергают.

В заключение этого параграфа рассмотрим методику вычисления теоретических частот нормального распределения.

Рассмотрим выборку объёма n, статистическое распределение имеет вид (22). Для того, чтобы найти теоретические частоты в предположении, что признак X генеральной совокупности распределён нормально, надо:

а) вычислить выборочную среднюю $\overline{x_в}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\delta_в$, приняв в качестве вариант x_i^* середины

частичных интервалов: $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$;

б) пронормировать X, т.е. прейти к случайной величине $Z = \frac{x - \overline{x_в}}{\delta_в}$ и вычислить концы интервалов (z_i; z_{i+1}): $z_i \frac{x_i - \overline{x_в}}{\delta_в}$; $z_{i+1} \frac{x_{i+1} - \overline{x_в}}{\delta_в}$, причём наименьшее значение z_1 положить равным $-\infty$, а наибольшее значение z_{s+1} положить равным $+\infty$;

в) вычислить теоретически вероятности P_i попадания X в интервалы (x_i; x_{i+1}) по формуле P_i=Ф(z_{i+1})-Ф(z_i), где Ф(z)- функция Лапласа, и найти искомые теоретические частоты n_i=nP_i.

<u>Пример.</u> Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α=0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении признака X генеральной совокупности с заданным статистическим распределением выборки объёма n=300.

Номер интервала i	Частичный интервал (x_i; x_{i+1})	Частота n_i
1	(-20; -10)	20
2	(-10; 0)	47
3	(0; 10)	80
4	(10; 20)	89
5	(20; 30)	40
6	(30; 40)	16
7	(40; 50)	8

<u>Решение.</u> Найдём $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$; в итоге получим распределение

x_i^*	-15	-5	5	15	25	35	45
n_i	20	47	80	89	40	16	8

Найдём выборочную среднюю $\overline{x_в}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\delta_в$: $\overline{x_в}$=10,40; $\delta_в$=13,67 (см. разд.2, пример 2).

Найдём интервалы (z_i; z_{i+1}), теоретические вероятности P_i и теоретические частоты n_i=300P_i. Для этого составим расчётную таблицу.

i	*Интервал* $(z_i; z_{i+1})$	$\Phi(z_i)$,	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	$n_i=300P_i$
1	$(-\infty$; -1,49)	-0,5000	-0,4319	0,0681	20,43
2	(-1,49; -0,76)	-0,4319	-0,2764	0,1555	46,65
3	(-0,76; -0,03)	-0,2764	-0,0120	0,2644	79,32
4	(-0,03; 0,70)	-0,0120	0,2580	0,2700	81,00
5	(0,70; 1,43)	0,2580	0,4236	0,1656	49,68
6	(1,43; 2,16)	0,4236	0,4846	0,0610	18,30
7	(2,16; $+\infty$)	0,4846	0,5000	0,0154	4,62
				ΣP_i=1	Σn_i=300

Вычислим наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл}$. Для этого составим следующую расчётную таблицу, (последний столбец служит для контроля вычислений).

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
1	20	20,43	-0,43	0,1849	0,0091	19,5791
2	47	46,65	0,35	0,1225	0,0026	47,3526
3	80	79,32	0,68	0,4624	0,0058	80,6858
4	89	81,00	8,00	64,0000	0,7901	97,7901
5	40	49,68	-9,68	93,7024	1,8861	32,2061
6	16	18,30	-2,30	5,2900	0,2891	13,9890
7	8	4,62	3,38	11,4244	2,4728	13,8528
Σ	300	300			$\chi^2_{набл}$=5,46	305,46

Для контроля вычислений используем формулу $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{s}(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = \sum_{i=1}^{s}\frac{n_i^2}{n'_i} - n$. В рассмотренном примере $\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i^2}{n'_i} - n$=305,46-300=5,46= $\chi^2_{набл}$. Вычисления выполнены правильно.

По таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы к=s-3=7-3=4 находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0{,}05;4) = 9{,}5$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}(\alpha;к)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Следовательно, данные наблюдений согласуется с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

<u>Задача.</u> Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении признака X генеральной совокупности с заданным распределением выборки (в таблице указаны частичные интервалы, во втором – соответствующие им частоты).

11.1.	α=0,05		11.2.	α=0,05	
	(2;12)	7		(1,5;3,5)	4
	(12;22)	8		(3,5;5,5)	18
	(22;32)	15		(5,5;7,5)	12
	(32;42)	36		(7,5;9,5)	35
	(42;52)	15		(9,5;11,5)	15
	(52;62)	11		(11,5;13,5)	10
	(62;72)	8		(13,5;15,5)	6
11.3.	α=0,05		11.4.	α=0,01	
	(1;6)	6		(3,0;3,6)	6
	(6;11)	12		(3,6;4,2)	8
	(11;16)	16		(4,2;4,8)	31
	(16;21)	40		(4,8;5,4)	43
	(21;26)	13		(5,4;6,0)	22
	(26;31)	8		(6,0;6,6)	15
	(31;36)	5		(6,6;7,2)	5
11.5.	α=0,025		11.6.	α=0,01	
	(0;2,2)	14		(-4;0)	8
	(2,2;4,4)	18		(0;4)	16
	(4,4;6,6)	32		(4;8)	40
	(6,6;8,8)	70		(8;12)	72
	(8,8;11,0)	20		(12;16)	36
	(11,0;13,2)	36		(16;20)	18
	(13,2;15,4)	10		(20;24)	10
11.7.	α=0,05		11.8.	α=0,05	
	(2;7)	10		(-10;-5)	14
	(7;12)	26		(-5;0)	18
	(12;17)	25		(0;5)	32
	(17;22)	30		(5;10)	70
	(22;27)	26		(10;15)	36
	(27;32)	21		(15;20)	20
	(32;37)	12		(20;25)	10
11.9.	α=0,025		11.10.	α=0,05	
	(4;6)	12		(0;10)	10
	(6;8)	15		(10;20)	27
	(8;10)	40		(20;30)	60
	(10;12)	16		(30;40)	70
	(12;14)	10		(40;50)	20
	(14;16)	7		(50;60)	13

11.11.	α=0,025		11.12.	α=0,05	
	(1,8;2,8)	5		(10;13)	12
	(2,8;3,8)	15		(13;16)	23
	(3,8;4,8)	23		(16;19)	30
	(4,8;5,8)	27		(19;22)	29
	(5,8;6,8)	19		(22;25)	29
	(6,8;7,8)	6		(25;28)	16
	(7,8;8,8)	5		(28;31)	11
11.13.	α=0,01		11.14.	α=0,05	
	(1,2;5,2)	8		(1,5;4,5)	5
	(5,2;9,2)	28		(4,5;7,5)	12
	(9,2;13,2)	32		(7,5;10,5)	34
	(13,2;17,2)	66		(10,5;13,5)	50
	(17,2;21,2)	36		(13,5;16,5)	28
	(21,2;25,2)	20		(16,5;19,5)	14
	(25,2;29,2)	10		(19,5;22,5)	7
11.15.	α=0,025		11.16.	α=0,05	
	(10,5;12,5)	15		(10;16)	9
	(12,5;14,5)	25		(16;22)	24
	(14,5;16,5)	32		(22;28)	34
	(16,5;18,5)	50		(28;34)	48
	(18,5;20,5)	12		(34;40)	20
	(20,5;22,5)	10		(40;46)	9
	(22,5;24,5)	6		(46;52)	6
11.17.	α=0,01		11.18.	α=0,05	
	(2,0;3,5)	5		(9;11)	6
	(3,5;5,0)	16		(11;13)	8
	(5,0;6,5)	21		(13;15)	15
	(6,5;8,0)	42		(15;17)	32
	(8,0;9,5)	32		(17;19)	18
	(9,5;11,0)	8		(19;21)	14
	(11,0;12,5)	6		(21;23)	7
11.19.	α=0,05		11.20.	α=0,025	
	(0,5;5,5)	13		(12;15)	10
	(5,5;10,5)	20		(15;18)	13
	(10,5;15,5)	30		(18;21)	20
	(15,5;20,5)	60		(21;24)	65
	(20,5;25,5)	35		(24;27)	55
	(25,5;30,5)	30		(27;30)	24
	(30,5;35,5)	12		(30;33)	13

11.21. α=0,05

(2,6;6,6)	6
(6,6;10,6)	10
(10,6;14,6)	17
(14,6;18,6)	45
(18,6;22,6)	35
(22,6;26,6)	22
(26,6;30,6)	15

11.22. α=0,01

(2;8)	12
(8;14)	18
(14;20)	22
(20;26)	38
(26;32)	24
(32;38)	20
(38;44)	16

11.23. α=0,05

(3,5;7,5)	5
(7,5;11,5)	10
(11,5;15,5)	23
(15,5;19,5)	45
(19,5;23,5)	36
(23,5;27,5)	22
(27,5;31,5)	9

11.24. α=0,025

(8;18)	15
(18;28)	20
(28;38)	26
(38;48)	40
(48;58)	26
(58;68)	16
(68;78)	7

11.25. α=0,05

(-6;0)	20
(0;6)	27
(6;12)	45
(12;18)	68
(18;24)	80
(24;30)	40
(30;36)	12
(36;42)	8

11.26. α=0,025

(-4;6)	7
(6;16)	13
(16;26)	44
(26;36)	82
(36;46)	60
(46;56)	50
(56;66)	28
(66;76)	16

11.27. α=0,01

(-3;1)	7
(1;5)	12
(5;9)	25
(9;13)	52
(13;17)	30
(17;21)	18
(21;25)	6

11.28. α=0,05

(0,5;2,5)	12
(2,5;4,5)	24
(4,5;6,5)	38
(6,5;8,5)	64
(8,5;10,5)	34
(10,5;12,5)	18
(12,5;14,5)	10

Контрольные вопросы и задания:

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении признака X генеральной совокупности с заданным распределением выборки (в таблице указаны частичные интервалы, во втором – соответствующие им частоты).

1.	α=0,05		2.	α=0,05	
	(2;12)	7		(1,5;3,5)	4
	(12;22)	8		(3,5;5,5)	18
	(22;32)	15		(5,5;7,5)	12
	(32;42)	36		(7,5;9,5)	35
	(42;52)	15		(9,5;11,5)	15
	(52;62)	11		(11,5;13,5)	10
	(62;72)	8		(13,5;15,5)	6
3.	α=0,05		4.	α=0,01	
	(1;6)	6		(3,0;3,6)	6
	(6;11)	12		(3,6;4,2)	8
	(11;16)	16		(4,2;4,8)	31
	(16;21)	40		(4,8;5,4)	43
	(21;26)	13		(5,4;6,0)	22
	(26;31)	8		(6,0;6,6)	15
	(31;36)	5		(6,6;7,2)	5

2. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью γ неизвестного математического ожидания а нормально распределённого признака X генеральной совокупности, если известны выборочная средняя $\overline{x_в}$, исправленное среднее квадратическое отклонение S и объём выборки n.

1. n=9 $\overline{x_в}$=35,3 S=4,5 γ=0,95
2. n=16 $\overline{x_в}$=98,7 S=4 γ=0,999

3. По данным выборки объёма n из генеральной совокупности нормально распределённого признака X найдено исправленное среднее квадратическое отклонение S. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью γ.

1. n=20 S=0,5 γ=0,999
2. n=10 S=1,5 γ=0,99

.

Список использованных источников

1. ПЕЧАТНЫЕ И (ИЛИ) ЭЛЕКТРОННЫЕ УЧЕБНЫЕ ИЗДАНИЯ (ВКЛЮЧАЯ УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ

а) основная литература:

1. Коробова Л.А., Математическое моделирование. Практикум : учеб. пособие / Л.А. Коробова, Ю.В. Бугаев, С.Н. Черняева, Ю.А. Сафонова - Воронеж : ВГУИТ, 2017. - 112 с. - ISBN 978-5-00032-247-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785000322475.html.

2. Бизнес-статистика: учебник и практикум для академического бакалавриата / И. И. Елисеева [и др.] ; под ред. И. И. Елисеевой. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 411 с. — (Серия: Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-05724-9. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/book/biznes-statistika-433866 .

3. Судоплатов, С. В. Математика: математическая логика и теория алгоритмов: учебник и практикум / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 255 с. — (Серия: Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10930-6. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/book/matematika-matematicheskaya-logika-i-teoriya-algoritmov-432449

4. Пригарин, С. М. Статистическое моделирование многомерных гауссовских распределений: учеб. пособие для вузов / С. М. Пригарин. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 83 с. — (Серия: Университеты России). — ISBN 978-5-534-10209-3. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/book/statisticheskoe-modelirovanie-mnogomernyh-gaussovskih-raspredeleniy-442392.

б) дополнительная литература:

1. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Васильева А.В. - Красноярск : СФУ, 2016. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785763835113.html

2. Михайлов, Г. А. Статистическое моделирование. Методы монте-карло: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 371 с. — (Серия: Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-06881-8. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/book/statisticheskoe-modelirovanie-metody-monte-karlo-441997

3. Журнал целочисленных последовательностей [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/

4. Математическое моделирование [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: http://keldysh.ru/e-biblio/mmod.htm

5. Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: http://www.ulsu.ru/ru/page/page_2743

6. Информатизация образования и науки [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: http://informika.ru/pechatnye-izdaniya/zhurnal-informatizaciya-obrazovaniya-i-nauki/

7. Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: http://keldysh.ru/future

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ИЗДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Волков А.П. Математическое моделирование и математическая статистика. Учебная программа по дисциплине «Математическое моделирование и математическая статистика» для студентов направления подготовки 44.03.04.09 «Профессиональное обучение. Информационные технологии и системы». – Стаханов: СУНИГОТ, 2018. – 11 с.

2. Карчевский В.П., Карчевская Н.В., Ефремова О.В. Курсовое проектирование. Примеры: учебно-методическое пособие по курсовому проектированию для студентов дневной и заочной форм обучения специальности «Профессиональное обучение. Информационные технологи и системы» / В.П. Карчевский, Карчевская Н.В., Ефремова О.В. – Луганск: СУНИГОТ ЛНУ им. В.Даля, 2017. – 1024 с. (консультант Волков А.П.)

3. ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

г) Интернет-ресурсы:

1. Министерство образования и науки Луганской Народной Республики – https://minobr.su

2. Народный совет Луганской Народной Республики – https://nslnr.su

3. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования – http://fgosvo.ru

4. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» – http://window.edu.ru/

Электронные библиотечные системы и ресурсы

Электронно-библиотечная система «Консультант студента» – http://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x

Информационный ресурс библиотеки образовательной организации

Научная библиотека имени А. Н. Коняева – http://biblio.dahluniver.ru/

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
по дисциплине
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
для студентов направления подготовки
44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)
в 2-х частях. Часть 1

С о с т а в и т е л ь:
Александр Павлович Волков
Игорь Васильевич Владарский

Печатается в авторской редакции.
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать _____
Формат 60x84 1/16. Бумага типограф. Гарнитура Times
Печать офсетная. Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____
Тираж 100 экз. Изд. №_____. Заказ №_____. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного
университета имени Владимира Даля

Свидетельство о государственной регистрации издательства
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015г.

Адрес издательства: 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60
E-mail: uni@snu.edu.ua **http**: www.snu.edu.ua