

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Стахановский инженерно-педагогический институт менеджмента  
Кафедра информационных систем

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**  
по дисциплине  
**«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»**

для студентов направления подготовки  
44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)  
в 2-х частях. Часть 2

*Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом  
ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ»  
(протокол № от 2021 г.)*

Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине **«Математическое моделирование и математическая статистика»** для студентов направления подготовки **44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям) в 2-х частях. Часть 2.** / Сост.: А.П. Волков, И.В.Владарский. – Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. – 61 с.

Методические указания к выполнению практических работ содержит девять практических работ по дисциплине «Математическое моделирование и математическая статистика», которые включают в себя теоретические сведения, примеры решения, задачи и варианты с данными для их выполнения. К каждой практической работе приведены вопросы для самопроверки. В методических рекомендациях представлен список использованных источников.

Предназначены для студентов бакалаврской программы «Информационные технологии и системы», «Профессиональная психология», «Безопасность технологических процессов и производств», «Электроснабжение», «Экономика и управление», «Управление персоналом», «Экономическая безопасность», «Подземная разработка пластовых месторождений», «Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Технологическая безопасность и горноспасательное дело».

Составители:	доц., к.ф.-м.н. Волков А.П. ас. Владарский И.В.
Ответственный за выпуск:	доц. Карчевский В.П.
Рецензент:	доц. Карчевская Н.В.

## Содержание

Аннотация .....	4
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 10 .....	5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 11 .....	27
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 12 .....	32
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 13 .....	40
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 14 .....	43
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 15 .....	47
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 16 .....	50
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 17 .....	53
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 18 .....	56
Список использованных источников .....	59

## Аннотация

В настоящее время вероятностные и статистические методы широко используются в технике и во многих отраслях нашего хозяйства: в теориях: надёжности, массового обслуживания, автоматического управления; при планировании и организации производства; анализе технологических процессов; проведении контроля качества продукции. Поэтому изучение математической статистики играет существенную роль в подготовке инженеров всех специальностей.

Цель данных методических указаний – помочь студентам овладеть методами решения задач по математической статистике.

В каждом разделе даны краткие теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач, а также решение типовых примеров. По каждой теме предложены варианты заданий для самостоятельной работы.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 10

### Ряды Фурье. Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Ряд Фурье для функций с периодом $2l$ . Разложение в ряд Фурье непериодических функций

#### *Цель работы:*

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторов и с повторениями.

#### *Порядок выполнения работы (отчёт):*

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

#### *Теоретические сведения*

Тригонометрические ряды Фурье представляют собой эффективный математический аппарат, который широко применяется в прикладной математике для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Особенно широко применяются ряды Фурье при изучении колебательных и периодических процессов и явлений.

**Условия Дирихле. Теорема о разложимости функции в ряд Фурье**  
Функциональный ряд вида

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

называется **тригонометрическим рядом**, а постоянные  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  – коэффициентами тригонометрического ряда. Если ряд сходится, то его сумма  $S(x)$  определяет периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $2\pi$ .

Наиболее распространённым и важным для приложений примером

периодических функций являются функции вида

$$A \sin(nx + \varphi) = a \cos nx + b \sin nx,$$

называемые **гармониками**, так как они описывают гармонические колебания с амплитудой  $A$ , частотой  $n$  и начальной фазой  $\varphi$ .

Тригонометрические функции  $\cos nx$  и  $\sin nx$  обладают свойством **ортогональности**. Это означает, что на любом отрезке длиной, равной периоду  $2\pi$ , в частности на отрезке  $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \quad \text{при } n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad \text{для любых } n \text{ и } m.$$

Кроме того, тригонометрические функции вида  $\cos nx$  и  $\sin nx$  удовлетворяют на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , так называемым, **условиям Дирихле**. Говорят, что функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  удовлетворяет условиям Дирихле, если она на этом интервале кусочно-монотонна и ограничена. Функция  $f(x)$  кусочно-монотонна на отрезке  $[a, b]$ , если его можно разбить конечным числом точек  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  на интервалы  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$  так, что на каждом из них функция монотонна, то есть либо невозрастающая, либо неубывающая. Функция  $f(x)$  – кусочно-монотонная и ограниченная на  $[a, b]$ , может иметь на отрезке  $[a, b]$  только точки разрыва первого рода, то есть такие точки разрыва, для которых существуют конечные предельные значения функции при приближении её к точке разрыва  $x = c$  слева и справа (см. рис.1.1):

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0), \quad \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0).$$

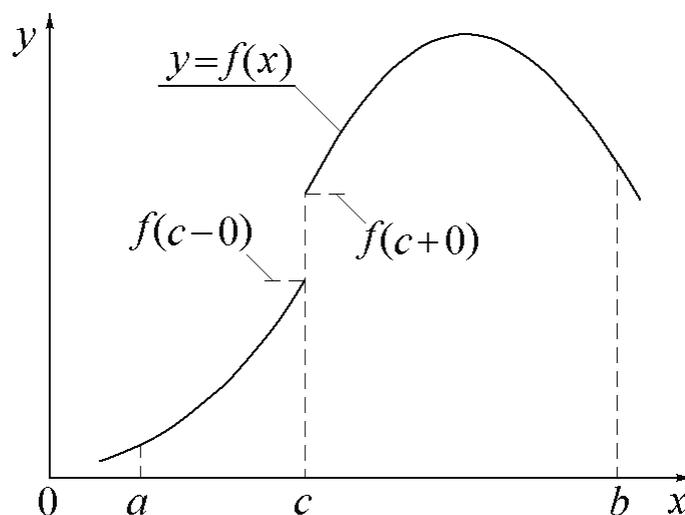


Рис.1.1.

**Основная задача теории рядов Фурье (гармонического анализа)** состоит в следующем: требуется выяснить, можно ли и при каких условиях представить произвольную периодическую функцию  $f(x)$  в виде суммы простых гармоник разной частоты.

Ответ на этот вопрос дается **теоремой о разложимости функции в ряд Фурье**: если периодическая функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  удовлетворяет условиям Дирихле, то она может быть представлена в виде равномерно сходящегося тригонометрического ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.1)$$

причём сумма членов полученного ряда  $S(x)$  равна значению функции  $f(x)$  в тех внутренних точках интервала  $(-\pi, \pi)$ , в которых функция  $f(x)$  непрерывна. В точках разрыва функции  $f(x)$  сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому предельных значений функции слева и справа от точки разрыва  $x = c$ , то есть

$$S(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}, \quad (1.2)$$

а на концах интервала сумма равна

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

Коэффициенты ряда Фурье определяются из условия ортогональности тригонометрических функций и с учётом того, что для равномерно сходящихся рядов допустима перестановка порядка суммирования и интегрирования. Поэтому, интегрируя сначала равенство (1.1) почленно в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , найдем  $a_0$ . Затем умножая обе части равенства (1.1) на  $\cos mx$  и интегрируя в тех же пределах, определим  $a_n$  и аналогичным приёмом (умножая на  $\sin mx$ ) находим  $b_n$ . В результате формулы для коэффициентов ряда Фурье будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Заметим, что условиям теоремы разложимости удовлетворяет весьма широкий класс функций. Так, для разложения функции в ряд Тейлора

требуется, чтобы функция была не только непрерывной, но и бесчисленное число раз дифференцируемой (так как коэффициенты ряда Тейлора выражаются через начальные значения функции и её производных), а в ряд Фурье можно разложить функцию не только непрерывную, но и имеющую точки разрыва первого рода.

### Ряды Фурье для чётных и нечётных функций с периодом $T = 2\pi$

Если функция  $f(x)$  является чётной, то есть  $f(-x) = f(x)$ , то её график симметричен относительно оси ординат и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)dx,$$

тогда формулы (1.3) упрощаются. Действительно, подынтегральная функция  $f(x)\sin nx$  является нечётной, и  $b_n = 0$  как интеграл от нечётной функции в симметричных пределах, а коэффициент  $a_n$  будет равен

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad (1.4)$$

так как подынтегральная функция является чётной.

Таким образом, **ряд Фурье для чётной функции**, удовлетворяющей условиям Дирихле, не содержит синусов и имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (1.5)$$

причём

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.6)$$

Если функция  $f(x)$  является нечётной, то есть  $f(-x) = -f(x)$ , то её график симметричен относительно начала координат. Тогда  $a_0 = 0$ , и так как функция  $f(x)\cos nx$  является нечётной, то  $a_n = 0$  как интеграл от нечётной функции в симметричных пределах, а коэффициент  $b_n$  будет

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx. \quad (1.7)$$

Поэтому **ряд Фурье для нечётной функции**, удовлетворяющей условиям Дирихле, содержит только синусы и имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (1.8)$$

причём

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.9)$$

### Ряд Фурье для функций с произвольным периодом $T = 2l$

Если  $f(x)$  – периодическая функция с периодом  $T = 2l$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, то, выполняя замену переменной по формуле  $x = lt/\pi$ , получим функцию переменной  $t$  с периодом  $2\pi$ . Её можно разложить в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Возвращаясь далее к старой переменной, получим разложение функции  $f(x)$  с произвольным периодом  $T = 2l$  в ряд Фурье вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Аналогично (1.5–1.6) и (1.8–1.9) получим **ряд Фурье для чётной функции с периодом  $T = 2l$** :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (1.12)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.13)$$

и **ряд Фурье для нечётной функции с периодом  $T = 2l$** :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (1.14)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.15)$$

## Разложение в ряд Фурье неперiodических функций

Пусть  $f(x)$  – неперiodическая, кусочно-монотонная и ограниченная функция, заданная на конечном промежутке  $[-l, l]$ . Присоединим к графику заданной функции все его горизонтальные смещения на расстояния, кратные  $2l$  (на рис.1.2 они показаны пунктиром). Тогда получим **периодическое продолжение** заданной функции на всю числовую ось. Получившаяся периодическая вспомогательная функция  $f^*(x)$ , определённая на всей числовой оси, в соответствии с теоремой о разложимости может быть представлена в виде ряда Фурье (1.10–1.11).

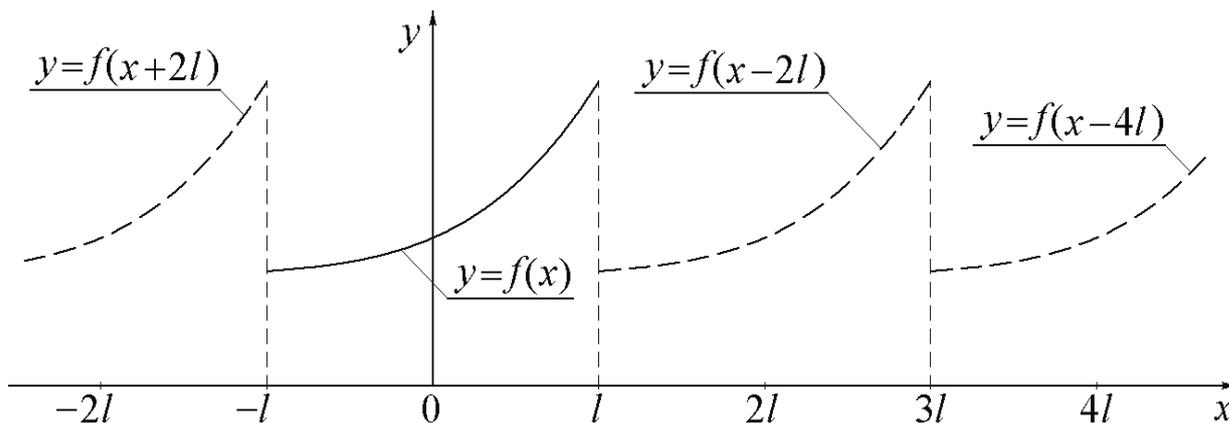


Рис.1.2.

Но для всех  $x \in (-l, l)$ , кроме точек разрыва  $x = \pm l$ , значения вспомогательной функции совпадают с заданной:  $f^*(x) = f(x)$ . Следовательно, сумма членов ряда Фурье для вспомогательной функции во всех точках  $x \in (-l, l)$ , кроме точек разрыва, даст значения заданной функции. Поэтому разложение неперiodической функции в ряд Фурье, в действительности, осуществляется без привлечения вспомогательной функции непосредственно по формулам (1.10–1.11).

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию  $y = f(x)$ , заданную на отрезке  $[-4, 4]$ :

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } -4 \leq x < 0, \\ x/2 & \text{при } 0 \leq x < 2, \\ x/2 - 1 & \text{при } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

*Решение.* График функции представлен на рис.1.3.

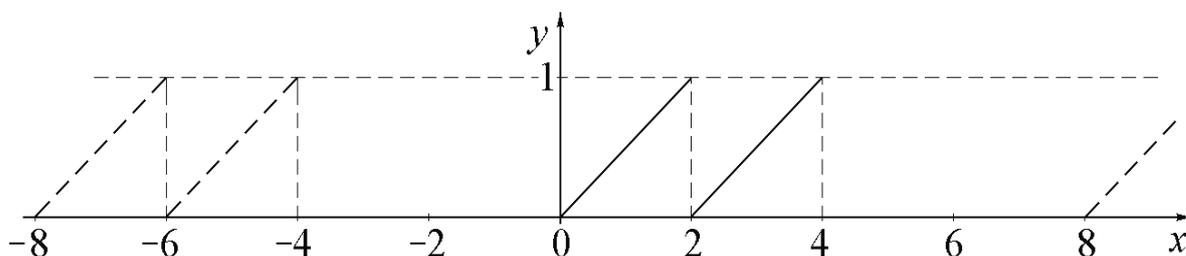


Рис.1.3.

Как видно из рисунка, функция  $y = f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Ряд Фурье для этой функции на промежутке  $x \in [-4, 4]$  примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{4} + b_n \sin \frac{n\pi x}{4} \right). \quad (1.16)$$

Коэффициенты ряда находим по формулам (1.11) при  $l = 4$ :

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) dx. \quad (1.17)$$

Так как функция  $f(x)$  имеет разные выражения на трёх участках промежутка  $[-4, 4]$ , то интеграл в (1.17) разбиваем на сумму трёх интегралов:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \left[ \int_{-4}^0 0 dx + \int_0^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^4 \left( \frac{x}{2} - 1 \right) dx \right] = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \int_{-4}^0 0 \cos \frac{n\pi x}{4} dx + \int_0^2 \frac{x}{2} \cos \frac{n\pi x}{4} dx + \int_2^4 \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \cos \frac{n\pi x}{4} dx \right] = \\ &= \frac{2}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Коэффициент  $b_n$  определяется аналогично:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(x) \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \int_{-4}^0 0 \cdot \sin \frac{n\pi x}{4} dx + \int_0^2 \frac{x}{2} \sin \frac{n\pi x}{4} dx + \int_2^4 \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \sin \frac{n\pi x}{4} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left( \cos \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi \right). \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции примет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{2(\cos n\pi - 1)}{(n\pi)^2} + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi x}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n\pi} \left( \cos \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi \right) \sin \frac{n\pi x}{4} \right]. \end{aligned}$$

Во всех точках непрерывности функции  $f(x)$  сумма ряда  $S(x)$  совпадает с её значениями, а в точках разрыва она будет равна:

$$S(-4) = S(2) = S(4) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

### Разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ , определённой на отрезке $[0, l]$

Функцию  $f(x)$ , определённую на отрезке  $[0, l]$  и являющуюся на этом отрезке кусочно-монотонной и ограниченной, можно разложить в ряд Фурье двумя способами. Для этого достаточно представить продолжение функции на промежуток  $[-l, 0]$ . Если продолжение  $f(x)$  на  $[-l, 0]$  чётное (симметричное относительно оси ординат), то ряд Фурье можно записать по формулам (1.12–1.13), то есть по косинусам. Если продолжить функцию  $f(x)$  на  $[-l, 0]$  нечётным образом, то разложение функции в ряд Фурье будет представлено формулами (1.14–1.15), то есть по синусам. При этом оба ряда будут иметь в интервале  $(0, l)$  одну и ту же сумму.

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию  $y = x$ , заданную на промежутке  $[0, 1]$  (см. рис.1.4).

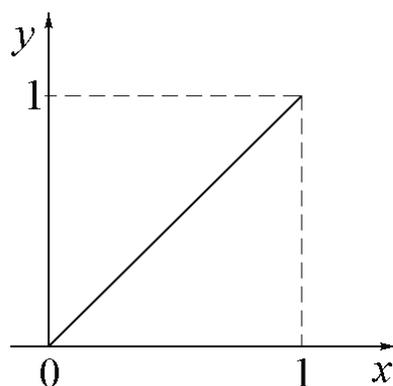


Рис.1.4.

*Решение.*

**а). Разложение в ряд по косинусам.** Строим чётное продолжение функции в соседний промежуток  $[-1, 0]$ . График функции вместе с её чётным продолжением на  $[-1, 0]$  и последующим продолжением (по периоду  $T = 2$ ) на всю ось  $Ox$  показан на рис.1.5.

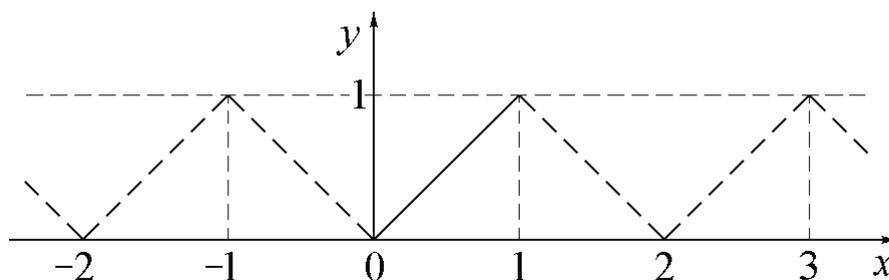


Рис.1.5.

Так как  $l = 1$ , то ряд Фурье для данной функции при чётном разложении будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \quad (1.18)$$

при этом

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

В результате получим при  $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \left( 2 \cos \pi x + \frac{2}{9} \cos 3\pi x + \frac{2}{25} \cos 5\pi x + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

На всей оси  $Ox$  ряд сходится к функции, изображенной на рис.1.4.

**2). Разложение в ряд по синусам.** Строим нечётное продолжение функции в соседний промежуток  $[-1, 0]$ . График функции вместе с её нечётным продолжением на  $[-1, 0]$  и последующим периодическим продолжением на всю числовую ось  $Ox$  показан на рис.1.6.

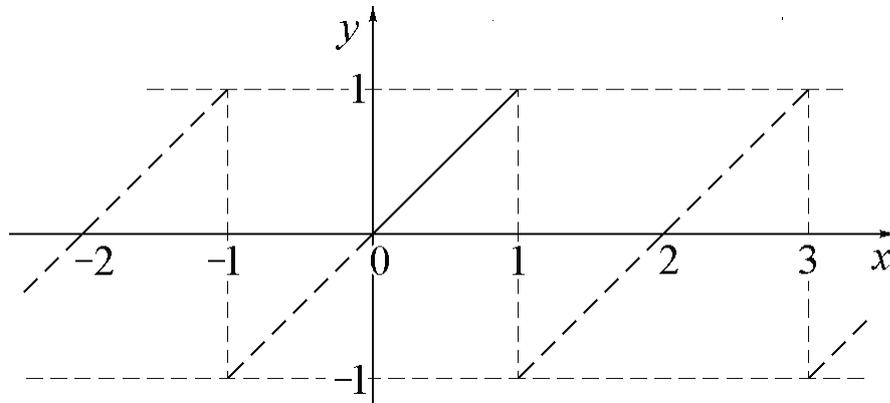


Рис.1.6.

При нечётном разложении

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad (1.20)$$

где

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Поэтому ряд Фурье по синусам для данной функции при  $0 \leq x < 1$  будет иметь вид

$$x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x = \frac{2}{\pi} \left( \sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x - \dots \right). \quad (1.21)$$

В точке  $x=1$  сумма ряда будет равна нулю, хотя исходная функция равна 1. Это обусловлено тем, что при таком периодическом продолжении точка  $x=1$  становится точкой разрыва.

Из сравнения выражений (1.19) и (1.21) следует, что скорость сходимости ряда (1.19) выше, чем ряда (1.21): она определяется в первом случае множителем  $1/n^2$ , а во втором случае множителем  $1/n$ . Поэтому разложение в ряд по косинусам в данном случае предпочтительнее.

В общем случае можно показать, что если функция  $f(x)$  не обращается в нуль хотя бы на одном из концов промежутка  $[0, l]$ , то предпочтительнее её разложение в ряд по косинусам. Это обусловлено тем, что при чётном продолжении в соседний промежуток  $[-l, 0]$  функция будет непрерывной (см. рис.1.5), и скорость сходимости получающегося ряда будет выше, чем ряда по синусам. Если функция, заданная на  $[0, l]$ , обращается в нуль на обоих концах интервала, то предпочтительнее её разложение в ряд по синусам, так как при этом будет непрерывной не только сама функция  $f(x)$ , но и её первая производная.

### Обобщённый ряд Фурье

Функции  $\varphi_n(x)$  и  $\varphi_m(x)$  ( $n, m = 1, 2, 3, \dots$ ) называются **ортогональными** на отрезке  $[a, b]$ , если при  $n \neq m$

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0. \quad (1.22)$$

При этом предполагается, что

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx > 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b \varphi_m^2(x) dx > 0.$$

Рассмотрим разложение функции  $f(x)$ , которая определена на отрезке  $[a, b]$ , в ряд по системе ортогональных функций  $\varphi_n(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n + \dots, \quad (1.23)$$

где коэффициенты  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) являются постоянными числами.

Для определения коэффициентов разложения  $a_i$  умножим равенство (1.23) на  $\varphi_m(x)$  и проинтегрируем почленно на отрезке  $[a, b]$ . Получим равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = a_0 \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_m(x)dx +$$

$$+ a_1 \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_m(x)dx + \dots + a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx + \dots$$

В силу ортогональности функций  $\varphi_i(x)$  все интегралы в правой части равенства будут равны нулю, кроме одного (при  $n = m$ ). Отсюда следует, что

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx} \quad (1.24)$$

Ряд (1.23) по системе ортогональных функций, коэффициенты которого определяются по формуле (1.24), называется **обобщённым рядом Фурье** для функции  $f(x)$ .

Для упрощения формул для коэффициентов применяют, так называемое, **нормирование функций**. Система функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  называется **нормированной** на промежутке  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1. \quad (1.25)$$

Справедлива теорема: **всякую ортогональную систему функций можно нормировать**. Это означает, что можно подобрать постоянные числа  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$  так, чтобы система функций  $\mu_0\varphi_0(x), \mu_1\varphi_1(x), \dots, \mu_n\varphi_n(x), \dots$  была не только ортогональной, но и нормированной. Действительно, из условия

$$\int_a^b (\mu_n\varphi_n)^2 dx = \mu_n^2 \int_a^b \varphi_n^2 dx = 1$$

получим, что

$$\mu_n = \left( \int_a^b \varphi_n^2(x)dx \right)^{-1}.$$

Число

$$\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx} = 1/\mu_n$$

называется **нормой функции**  $\varphi_n(x)$  и обозначается через  $\|\varphi_n(x)\|$ .

Если система функций нормирована, то, очевидно,  $\|\varphi_n(x)\| = 1$ . Последовательность функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ , определённых на отрезке  $[a, b]$ , является **ортонормированной** на этом отрезке, если все функции нормированы и взаимно ортогональны на  $[a, b]$ .

Для ортонормированной системы функций коэффициенты обобщённого ряда Фурье равны

$$a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (1.26)$$

**Пример.** Разложить функцию  $y = 2 - 3x$  на отрезке  $0 \leq x \leq 3/2$  в обобщённый ряд Фурье по системе ортогональных на этом отрезке функций, в качестве которых взять собственные функции задачи на собственные значения

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (0 \leq x \leq 2, \lambda \geq 0), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(3/2) = 0,$$

предварительно проверив их на квадратичную интегрируемость и ортогональность.

**Замечание.** Говорят, что функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , есть функция с интегрируемым квадратом, если она сама и её квадрат интегрируемы на  $[a, b]$ , то есть, если существуют интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и

$$\int_a^b f^2(x) dx.$$

*Решение.* Сначала решаем задачу на собственные значения. Общее решение уравнения этой задачи будет

$$\varphi(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x,$$

а его производная запишется в виде

$$\varphi'(x) = -A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x.$$

Поэтому из граничных условий следует:

$$A = 0, \quad B\lambda \cos \frac{3\lambda}{2} = 0.$$

Для существования нетривиального решения необходимо принять

$$\cos \frac{3\lambda}{2} = 0,$$

откуда следует  $\frac{3\lambda}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ . Поэтому собственные значения параметра  $\lambda$  равны

$$\lambda_n = \frac{\pi(1+2n)}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а соответствующие им собственные функции с точностью до множителя будут

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{\pi(1+2n)x}{3}. \quad (1.27)$$

Проверим полученные собственные функции на ортогональность на отрезке  $[0, 3/2]$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{3/2} \sin \frac{\pi(1+2n)x}{3} \sin \frac{\pi(1+2m)x}{3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{3/2} \left[ \cos \frac{2(n-m)\pi x}{3} - \cos \frac{2(1+n+m)\pi x}{3} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2(n-m)\pi} \sin \frac{2(n-m)\pi x}{3} - \frac{3}{2(1+n+m)\pi} \sin \frac{2(1+n+m)\pi x}{3} \right] \Bigg|_0^{3/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi - \frac{3}{2(1+n+m)\pi} \sin(1+n+m)\pi \right] = 0 \end{aligned}$$

так как  $\sin(n-m)\pi = \sin(1+n+m)\pi = 0$  при целых  $n \neq m$ . При этом

$$\int_0^{3/2} \sin^2 \frac{(1+2n)\pi x}{3} dx = \frac{1}{2} \int_0^{3/2} \left[ 1 - \cos \frac{2(1+2n)\pi x}{3} \right] dx = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, найденные собственные функции ортогональны на отрезке  $[0, 3/2]$ .

Разложим заданную функцию в обобщённый ряд Фурье по системе ортогональных собственных функций (1.27):

$$y = 2 - 3x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{(1+2n)\pi x}{3}, \quad (1.28)$$

коэффициенты которого вычисляются по (1.24):

$$a_n = \frac{\int_0^{3/2} (2-3x) \sin \frac{(1+2n)\pi x}{3} dx}{\int_0^{3/2} \sin^2 \frac{(1+2n)\pi x}{3} dx} = \dots = \frac{4}{(1+2n)\pi} \left[ 2 - \frac{9(-1)^n}{(1+2n)\pi} \right]. \quad (1.29)$$

Подставляя (129) в (1.28), окончательно получим

$$2 - 3x \cong \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^m \frac{1}{(1+2n)} \left[ 2 - \frac{9(-1)^n}{(1+2n)\pi} \right] \sin \frac{(1+2n)\pi x}{3}.$$

### Применение рядов Фурье к интегрированию дифференциальных уравнений

Рассмотрим применение рядов Фурье к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений на примере краевой задачи об изгибе балки постоянного поперечного сечения, различным образом закреплённой на концах.

Дифференциальное уравнение изгиба балки может быть записано в виде

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x), \quad (1.30)$$

где  $y(x)$  – прогиб балки в произвольном поперечном сечении с абсциссой  $x$ ,  $EI_z = const$  – изгибная жёсткость балки ( $E$  – модуль упругости материала,  $I_z$  – момент инерции поперечного сечения).

Пусть поперечная нагрузка на разных участках балки задана в виде (см. рис.1.7)

$$q(x) = \begin{cases} -\frac{8q_0 x}{l} & \text{при } 0 \leq x < \frac{l}{4}, \\ 0 & \text{при } \frac{l}{4} \leq x < \frac{l}{2}, \\ -q_0 & \text{при } \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Рассмотрим два варианта граничных условий.

1). Пусть граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0: \quad y(0) = y''(0) = 0, \\ \text{при } x=l: \quad y(l) = y'(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

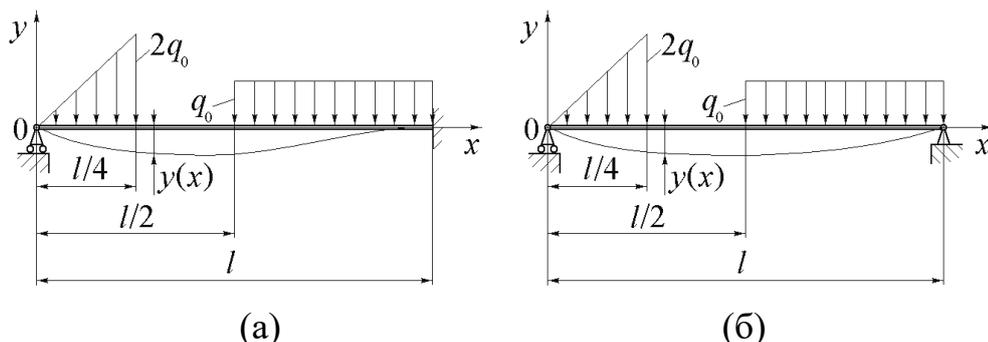


Рис.1.7.

Эти граничные условия соответствуют балке, свободно опёртой на левом конце и жестко защемлённой на правом (см. рис.1.7а).

*Решение.* Раскладываем функцию  $q(x)$  в ряд Фурье по синусам на промежутке  $[0, l]$

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \left[ - \int_0^{l/4} \frac{8q_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/4}^{l/2} 0 \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \int_{l/2}^l q_0 \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \\ &= \frac{2q_0}{\pi n} \left( 2 \cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi - \frac{8}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Подставляем (1.32) в уравнение (1.30)

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1.34)$$

и интегрируем это уравнение методом понижения порядка. Интегрируя первый раз

$$EI_z \int \frac{d^4 y}{dx^4} dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

получим

$$EI_z \frac{d^3 y}{dx^3} = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} + C_1.$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{l}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} + C_1 x + C_2, \\ EI_z \frac{dy}{dx} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{l}{n\pi} \right)^3 \cos \frac{n\pi x}{l} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Вновь разделяя переменные и интегрируя последнее уравнение, получим общее решение дифференциального уравнения (1.30) в виде:

$$EI_z y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{l}{n\pi} \right)^4 \sin \frac{n\pi x}{l} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. \quad (1.35)$$

Для определения произвольных постоянных  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  подставляем

решение (1.35) в граничные условия (1.31). Из первого условия при  $x = 0$  следует

$$C_4 = 0. \quad (1.36)$$

Из второго условия при  $x = 0$  находим

$$C_2 = 0.$$

При  $x = l$  из третьего и четвертого граничных условий получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_3$

$$\begin{cases} C_1 \frac{l^3}{6} + C_3 l = 0, \\ C_1 \frac{l^2}{2} + C_3 = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{l}{n\pi} \right)^3 \cos n\pi. \end{cases} \quad (1.37)$$

Разрешая систему (1.37) и учитывая то, что  $\cos n\pi = (-1)^n$ , находим

$$C_1 = 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \frac{l}{(n\pi)^3}, \quad C_3 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \left( \frac{l}{n\pi} \right)^3. \quad (1.38)$$

Подставляя значения произвольных постоянных в (1.35), получим решение краевой задачи в виде

$$EI_z y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{l}{n\pi} \right)^4 \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} b_m \frac{l}{(m\pi)^3} x^3 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_m \left( \frac{l}{m\pi} \right)^3 x$$

или после подстановки  $b_n$  и элементарных преобразований

$$y(x) = \frac{2q_0 l^4}{\pi^4 EI_z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left[ 2 \cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{2} + (-1)^n - \frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} + (-1)^n \frac{x}{2l} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \right].$$

При  $x = l/2$  прогиб балки будет

$$y(l/2) = \frac{2q_0 l^4}{\pi^4 EI_z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left[ 2 \cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{2} + (-1)^n - \frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{3}{16} (-1)^n \right].$$

Ограничиваясь тремя первыми членами ряда, найдём значение прогиба балки в середине пролёта

$$y(l/2) = 0.0033 \frac{q_0 l^4}{EI_z}.$$

2). Пусть балка свободно опёрта на обоих концах (рис.1.76). Тогда граничные условия запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0: \quad y(0) = y''(0) = 0, \\ \text{при } x = l: \quad y(l) = y''(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

*Решение.* Для данного варианта граничных условий искомая функция  $y(x)$  может быть разложена в ряд Фурье по синусам на промежутке  $[0, l]$ , равном длине балки:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (1.40)$$

так как каждый член ряда (1.40) удовлетворяет всем граничным условиям (1.39).

Подставляя (1.40) в уравнение (1.30), получим

$$EI_z \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{n\pi x}{l} = q(x). \quad (1.41)$$

Далее раскладываем в ряд Фурье по синусам на промежутке  $[0, l]$ , правую часть уравнения (1.41), то есть принимаем

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

При этом коэффициент  $b_n$  для заданной нагрузки (см. рис.1.7) будет определяться по формуле (1.33). Подставляя (1.32) в (1.41), получим равенство

$$EI_z \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

из которого следует

$$EI_z Y_n \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 = b_n \quad (1.42)$$

Из (1.42) с учетом (1.33) неизвестный коэффициент разложения прогиба  $Y_n$  выразится через известный коэффициент разложения нагрузки по формуле

$$Y_n = \frac{b_n l^4}{EI_z (n\pi)^4} = \frac{2q_0 l^4}{(n\pi)^5 EI_z} \left[ 2 \cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{2} + (-1)^n - \frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} \right].$$

Итак, решение краевой задачи (1.30), (1.39) примет вид

$$y(x) = \frac{2q_0 l^4}{\pi^5 EI_z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[ 2 \cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{2} + (-1)^n - \frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

В частности, прогиб в середине пролета при  $x = l/2$  и для  $n = 1$  будет равен

$$y(l/2) \approx 0.0091 \frac{q_0 l^4}{EI_z}.$$

## Индивидуальные задания

### Задание №1

1. Разложить функцию

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } -3 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3}x & \text{при } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \end{cases}$$

в ряд Фурье:

- построить график заданной функции на отрезке её определения;
- вычислить коэффициенты её ряда Фурье;
- записать ряд Фурье для заданной функции;
- построить график полученного ряда Фурье на отрезке определения заданной функции.

2. В виде ряда Фурье найти решение  $y = y(x)$  краевой задачи

$$y'' = q(x), \quad (0 \leq x \leq 3), \quad y(0) = 0, \quad y'(3) = 0,$$

где  $q(x)$  – ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке  $[0, 3]$  функция

$$q = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{при } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ 3 & \text{при } \frac{3}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

3. Разложить функцию  $y = x/2$  на отрезке  $0 \leq x \leq 2$  в обобщённый ряд Фурье по системе ортогональных на этом отрезке функций, в качестве которых взять собственные функции задачи на собственные значения

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (0 \leq x \leq 2, \lambda \geq 0), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(2) = 0,$$

предварительно проверив их на квадратичную интегрируемость и ортогональность.

4. Найти решение  $u = u(x, t)$  начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2-x)e^{-t}, \quad (0 \leq x \leq 2, t \geq 0),$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(2, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

в виде обобщённого ряда Фурье.

### Задание №2

1. Разложить функцию

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } -4 \leq x < 0 \\ x & \text{при } 0 \leq x < 2 \\ 3 - \frac{x}{2} & \text{при } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

в ряд Фурье:

- построить график заданной функции на отрезке её определения;
- вычислить коэффициенты её ряда Фурье;
- записать ряд Фурье для заданной функции;
- построить график полученного ряда Фурье на отрезке определения заданной функции.

2. В виде ряда Фурье найти решение  $y = y(x)$  краевой задачи

$$y'' = q(x), \quad (0 \leq x \leq 4), \quad y(0) = 0, \quad y'(4) = 0,$$

где  $q(x)$  – ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке  $[0, 4]$  функция

$$q = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x < 2 \\ 3 - \frac{x}{2} & \text{при } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

3. Разложить функцию  $y = 1 - 3x$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1/3$  в обобщённый ряд Фурье по системе ортогональных на этом отрезке функций, в качестве которых взять собственные функции задачи на собственные значения

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (0 \leq x \leq 1/3, \lambda \geq 0), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1/3) = 0,$$

предварительно проверив их на квадратичную интегрируемость и ортогональность.

4. Найти решение  $u = u(x, t)$  начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(1 - e^{-t}), \quad (0 \leq x \leq 1, t \geq 0),$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = 0$$

в виде обобщённого ряда Фурье.

### Задание №3

1. Разложить функцию

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{при } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

в ряд Фурье:

- построить график заданной функции на отрезке её определения;
- вычислить коэффициенты её ряда Фурье;
- записать ряд Фурье для заданной функции;
- построить график полученного ряда Фурье на отрезке определения заданной функции.

2. В виде ряда Фурье найти решение  $y = y(x)$  краевой задачи

$$y'' = q(x), \quad (0 \leq x \leq 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(2) = 0,$$

где  $q(x)$  – ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке  $[0, 2]$  функция

$$q = \begin{cases} 2x - 1 & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{при } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

3. Разложить функцию  $y = 1 - x/2$  на отрезке  $0 \leq x \leq 4$  в обобщённый ряд Фурье по системе ортогональных на этом отрезке функций, в качестве которых взять собственные функции задачи на собственные значения

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (0 \leq x \leq 4, \lambda \geq 0), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(4) = 0,$$

предварительно проверив их на квадратичную интегрируемость и ортогональность.

4. Найти решение  $u = u(x, t)$  начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 36 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 \leq x \leq 3, t \geq 0),$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(3,t)}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = 3 - x$$

в виде обобщённого ряда Фурье.

#### Задание №4

1. Разложить функцию

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } -4 \leq x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leq x < 2 \\ 3 - x & \text{при } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

в ряд Фурье:

- построить график заданной функции на отрезке её определения;
- вычислить коэффициенты её ряда Фурье;
- записать ряд Фурье для заданной функции;
- построить график полученного ряда Фурье на отрезке определения заданной функции.

2. В виде ряда Фурье найти решение  $y = y(x)$  краевой задачи

$$y'' = q(x), \quad (0 \leq x \leq 4), \quad y(0) = 0, \quad y'(4) = 0,$$

где  $q(x)$  – ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке  $[0, 4]$  функция

$$q = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leq x < 2 \\ 3 - x & \text{при } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

3. Разложить функцию  $y = x - 1$  на отрезке  $0 \leq x \leq 2$  в обобщённый ряд Фурье по системе ортогональных на этом отрезке функций, в качестве которых взять собственные функции задачи на собственные значения

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (0 \leq x \leq 2, \lambda \geq 0), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(2) = 0,$$

предварительно проверив их на квадратичную интегрируемость и ортогональность.

4. Найти решение  $u = u(x, t)$  начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 32 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 \leq x \leq 2, t \geq 0),$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(2, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = 2x$$

в виде обобщённого ряда Фурье.

## Задание №5

1. Разложить функцию

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x < 0 \\ 1 - \frac{2x}{\pi} & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2x}{\pi} & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье:

- построить график заданной функции на отрезке её определения;
- вычислить коэффициенты её ряда Фурье;
- записать ряд Фурье для заданной функции;
- построить график полученного ряда Фурье на отрезке определения заданной функции.

2. В виде ряда Фурье найти решение  $y = y(x)$  краевой задачи

$$y'' = q(x), \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0,$$

где  $q(x)$  – ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке  $[0, \pi]$  функция

$$q = \begin{cases} 1 - \frac{2x}{\pi} & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2x}{\pi} & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

3. Разложить функцию  $y = 4x$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1/4$  в обобщённый ряд Фурье по системе ортогональных на этом отрезке функций, в качестве которых взять собственные функции задачи на собственные значения

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (0 \leq x \leq 1/4, \lambda \geq 0), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1/4) = 0,$$

предварительно проверив их на квадратичную интегрируемость и ортогональность.

4. Найти решение  $u = u(x, t)$  начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2-x)e^{-t}, \quad (0 \leq x \leq 2, t \geq 0),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(2,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$$

в виде обобщённого ряда Фурье.

### Контрольные вопросы и задания:

1. Как определяются ряды Фурье для четных и нечетных функций?
2. Напишите разложение в ряд Фурье функции с периодом  $2l$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 11

### Интеграл Фурье

#### **Цель работы:**

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторов и с повторениями.

#### **Порядок выполнения работы (отчёт):**

3. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
4. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
5. Сформировать отчет по практической работе.
6. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
7. Оформить отчет.

#### **Теоретические сведения**

Если  $f(x)$  – 1) абсолютно интегрируемая на  $(-\infty, +\infty)$  функция, т.е. удовлетворяющая условию  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ ; 2) кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке, то ее *интеграл Фурье*

$$\int_0^{+\infty} (a(\alpha) \cos \alpha x + b(\alpha) \sin \alpha x) d\alpha \quad (1.43)$$

где 
$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt \quad (1.44)$$

$$b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt \quad (1.45)$$

равен  $f(x)$  в каждой точке непрерывности  $f(x)$  и  $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$  в каждой точке разрыва  $f(x)$ .

Если  $f(x)$  – четная, то

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \\ b(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Если  $f(x)$  – нечетная, то

$$a(\alpha) = 0;$$

$$b(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt \quad (1.47)$$

Для представления интегралом Фурье функции, заданной лишь в промежутке  $[0, +\infty)$  и продолженной четным образом на  $(-\infty, 0)$ , используем формулы (1.46), а продолженной нечетным образом – формулы (1.47).

Если  $a(\alpha)$  и  $b(\alpha)$ , найденные по формулам (1.46), подставить в (1.43), то получим двойной интеграл Фурье для четной функции  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \alpha t d\alpha \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt$$

Положив

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt dt, \quad (1.48)$$

получим

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt dt \quad (1.49)$$

Равенство (4.6) называется косинус – преобразованием  $f(x)$ , а (1.49) – косинус – преобразованием  $\varphi(x)$ .

Аналогично, если  $f(x)$  – нечетная, то

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin xt dt \quad (1.50)$$

называется синус – преобразованием  $f(x)$ , а

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xt dt \quad (1.51)$$

называется синус – преобразованием  $\varphi(x)$ .

*Комплексная форма* интеграла Фурье имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (1.52)$$

где

$$c(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (1.53)$$

Связь между  $a(\alpha), b(\alpha)$  и  $c(\alpha)$ :  $c(\alpha) = \pi(a(\alpha) - ib(\alpha)), -\infty < \alpha < +\infty$

Функция  $c(\alpha)$  называется *спектральной характеристикой* функции  $f(x)$ .  $|c(\alpha)|$  называется *спектром* функции  $f(x)$ .

Функция  $c(\alpha)$  называется также преобразованием Фурье функции

$f(t)$ , в этом случае ее обычно обозначают

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t} dt$$

**Пример.** Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \end{cases}$$

▽ Построим график данной функции.

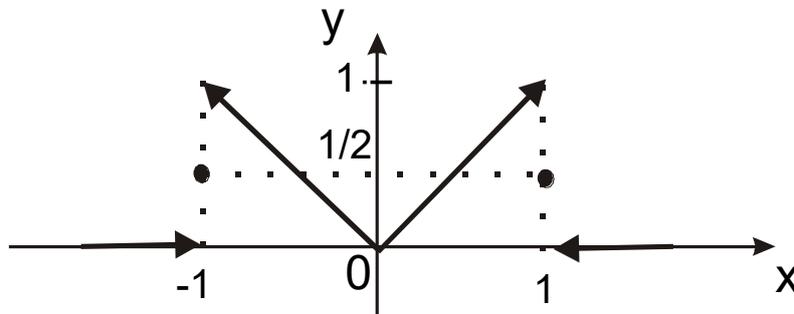


Рис.1.8

Данная функция 1) имеет 2 точки разрыва I рода ( $x = \pm 1$ ); 2) абсолютно интегрируема на всей оси  $Ox$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$ . 3) данная функция – четная, поэтому на основании (1.46)

$$\begin{aligned} b(\alpha) &= 0; a(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 t \cos \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha^2} \cos \alpha t + \frac{t}{\alpha} \sin \alpha t \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha^2} \cos \alpha + \frac{1}{\alpha} \sin \alpha - \frac{1}{\alpha^2} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi \alpha^2} (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1). \end{aligned}$$

Данная функция является непрерывной в интервалах  $(-\infty, -1)$ ;  $(-1, 1)$ ;  $(1, +\infty)$ , кроме того, в точках разрыва среднее арифметическое односторонних пределов функции совпадает со значением ее в этих точках, поэтому можно

записать интеграл Фурье 
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\alpha^2} \cos \alpha x d\alpha = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \end{cases} . \#$$

**Пример.** Показать, что спектральной характеристикой функции  $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  ,  $a > 0$  является функция  $c(\alpha) = \frac{1}{a + i\alpha}$  . Построить график спектра  $f(x)$  .

∇ Построим график данной функции.

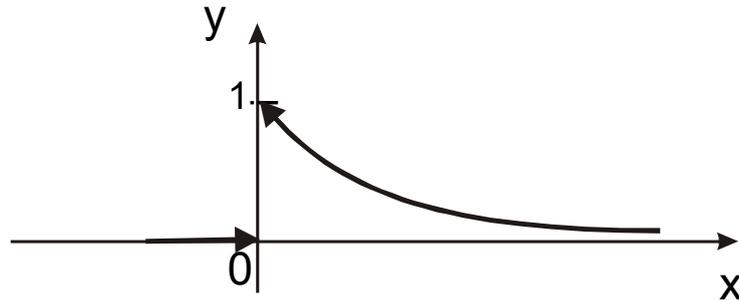


Рис. 1.9

Найдем  $c(\alpha)$  по формуле (4.11) 
$$c(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-i\alpha x} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x(a+i\alpha)} dx = -\frac{1}{a+i\alpha} e^{-x(a+i\alpha)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+i\alpha} .$$

Спектр  $f(x)$  – это  $|c(\alpha)|$  . 
$$|c(\alpha)| = \frac{1}{|a+i\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} .$$

Построим график  $|c(\alpha)|$  .

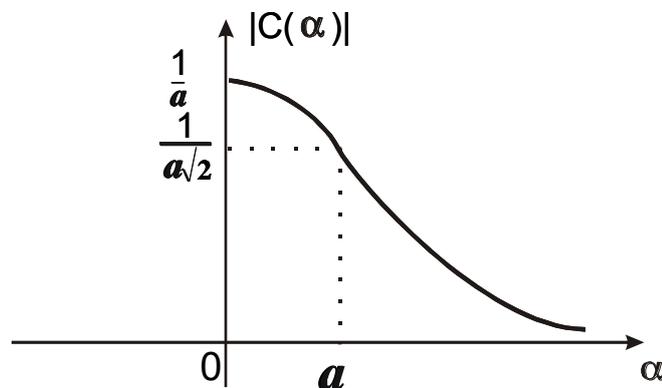


Рис. 1.10

## Индивидуальные задания

Представить интегралом Фурье следующие функции:

$$1. f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} -x - 2, & -2 < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ -x + 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

5. Функцию  $f(x) = e^{-x}$ ,  $0 < x < +\infty$ , представить интегралом Фурье, продолжая ее 1) четным образом, 2) нечетным образом на промежуток  $(-\infty, 0)$ . Найти

значения интегралов  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$  и  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$ .

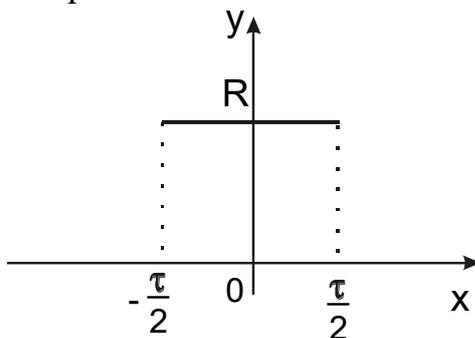
6. Используя результат задачи 18, представить интегралами Фурье функции

$$1) f(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad 2) f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

7. Написать интеграл Фурье в комплексной форме для функций

$$1) f(x) = e^{-a|x|}, \quad 2) f(x) = xe^{-a|x|}, \quad (a > 0).$$

8. Вычислить спектр прямоугольного импульса высотой  $h$  и длительностью  $\tau$  и построить график спектра.



9. Записать преобразование Фурье для следующих функций:

$$1) f(t) = e^{-|t|}; \quad 2) f(t) = te^{-|t|}.$$

### Контрольные вопросы и задания:

1. Напишите интеграл Фурье для некоторой непрерывной функции.
2. Сформулируйте условие существования интеграла Фурье.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 12

### Основные типы уравнений математической физики. Формулировка краевых задач

#### ***Цель работы:***

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторов и с повторениями.

#### ***Порядок выполнения работы (отчёт):***

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

#### ***Теоретические сведения***

Предметом математической физики является построение и исследование математическим моделированием физического процесса и явления.

#### Этапы



Большинство задач классической математической физики сводится к дифференциальным уравнениям и краевым задачам для этих уравнений – уравнений математической физики. Поэтому математическая физика тесно связана с такими разделами математики как теория дифференциальных уравнений, теория функций, функциональный анализ, теория вероятностей,

приближенные методы и вычислительная математика.

Изучение математических моделей квантовой физики потребовало привлечения таких новых областей математики, как теория обобщенных функций, теория функций многих комплексных переменных, геометрических, топологических, алгебраических и теоретико-числовых методов.

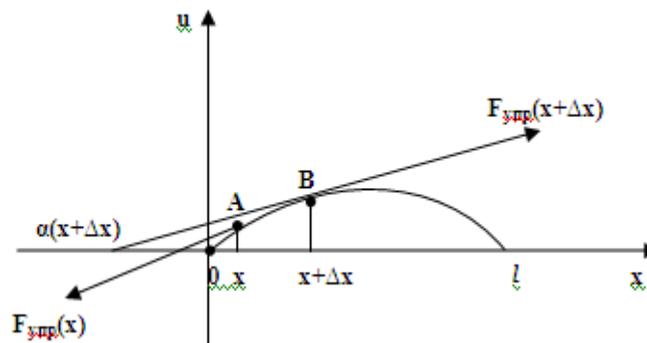
Важное место в современной математической физике занимает нелинейный анализ. Исследование нелинейных физических систем получило широкое распространение со второй половины XX века благодаря созданию и внедрению мощных средств вычислительной техники. Оказалось, что практически все физические явления нелинейны. Линейное приближение, исследуемое ранее, либо описывает очень частные случаи поведения физических систем, либо является чрезвычайно грубым.

Тем не менее, исследованию линейных физических систем по-прежнему уделяется значительное внимание, так как:

1. Линейные математические модели описывают большинство физических явлений, изученных до середины XX века.
2. Изучение методов постановки и решения линейных начально-краевых задач создает необходимую базу для дальнейшего исследования нелинейных систем.

В процессе исследования математической модели представляется полезным абстрагироваться от ее физического содержания. Это связано с тем, что совершенно различные по своей природе процессы могут описываться одинаковыми уравнениями. Например, уравнение Пуассона  $\Delta u = a$  в зависимости от смысла, придаваемого величинам  $u$  и  $a$ , может описывать распределение тепла в среде с источниками, распределение потенциала электростатического поля в электростатике.

### Постановка краевой задачи поперечных колебаний тонкой струны.



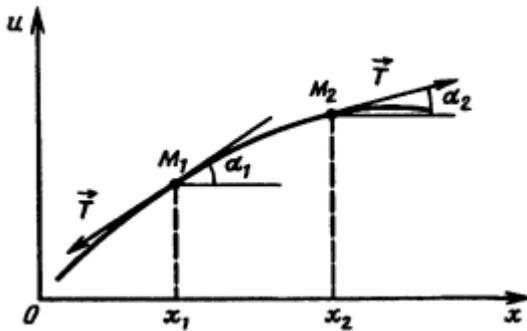
Рассмотрим процесс колебаний тонкой струны длины  $l$ . В момент времени  $t = 0$  точкам струны сообщают начальные отклонения и скорости. Поставим задачу для определения малых поперечных колебаний точек струны при  $t > 0$ , если:

- а) концы струны жестко закреплены;
- б) концы струны свободны;
- в) концы струны закреплены упруго;

г) концы струны движутся в поперечном направлении по заданному закону.

Рассмотрим процесс колебаний тонкой упругой нити, которая может свободно изменять свою форму. Тогда напряжения, возникающие в упругой нити, направлены по касательной к ее мгновенному профилю, такую нить будем называть **струной**.

Пусть в положении равновесия струна расположена вдоль  $Ox$ . Будем рассматривать только поперечные колебания струны, считая, что перемещение частиц струны происходит в одной плоскости и все точки струны движутся перпендикулярно  $Ox$ .



Обозначим через  $u(x,t)$  отклонение от оси положения равновесия точки струны с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$ . В момент  $t$  график функции  $u(x,t)$  в плоскости  $UX$  представляет собой профиль струны. Рассматриваем только малые колебания, такие, что смещение  $u(x,t)$  и производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  столь малы, что

квадратами этих величин и их произведениями можно пренебречь. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \approx 1; \quad 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 1.$$

По этой же причине не происходит удлинения участков струны.

$$dl' = \sqrt{du^2 + dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} dx;$$

$$L' = \int_{x_1}^{x_2} dl' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \approx x_2 - x_1 = L.$$

В этом случае, согласно закону Гука, натяжение  $T$  в каждой точке струны не будет изменяться. Покажем, что натяжение  $T$  можно считать независимым от точки приложения  $x$ . Для поперечных колебаний струны сумма проекций на ось  $Ox$  сил натяжения равна нулю:

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

где  $\alpha_1 \approx \alpha_2$  – малые углы, следовательно  $\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx 1$ .

$$-T_1 + T_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 \Rightarrow T = T_0 = \text{const.}$$

В случае вынужденных колебаний на струну действует внешняя распределенная сила  $F(x,t)$ , направление которой будем считать перпендикулярным оси  $Ox$ .

Распределение масс в струне будем характеризовать линейной плотностью  $\rho(x)$ , которая в общем случае изменяется вдоль струны. Для однородной струны постоянного сечения  $\rho = \rho_0 = \text{const.}$

Перейдем к построению математической модели. Используя 2 закон

Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1.54)$$

где  $\vec{P}$  – импульс системы, равный сумме импульсов всех ее частиц;  
 $F$  – результирующая внешняя сила.

В качестве такой механической системы рассмотрим выделенный участок струны  $m_1 m_2$ , в нем  $x_1 < x < x_2$ . Учитывая, что движение этой системы происходит в направлении, перпендикулярном оси  $Ox$ , запишем уравнение (1.54) в проекции на ось  $Ou$ :

$$\frac{dP}{dt} = F \quad (1.55)$$

Так как проекция суммарного импульса системы

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx,$$

то

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \quad (1.56)$$

Проекция внешних сил на направление  $Ou$  состоит из двух слагаемых. Одно из них учитывает действие сил натяжения на концах выделенного участка струны, а другое – суммарную вынуждающую силу, действующую на частицы этого участка струны. Эти проекции определяются следующими соотношениями:

$$F_1 = T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1 \approx T_0 \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right) = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx; \quad (1.57)$$

$$F = \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx \quad (1.58)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(x, t) \right) dx = 0 \quad (1.59)$$

В силу произвольности выбора отрезка  $[x_1, x_2]$  из (1.59) следует, что в любой точке струны в любой момент времени  $t$  подынтегральное выражение  $=0$ , т. е.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (1.60)$$

Полученное соотношение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка относительно искомой

функции  $u(x, t)$ . Оно описывает процесс малых поперечных колебаний струны, и его называют неоднородным одномерным **волновым уравнением** (уравнением плоских волн). Это уравнение гиперболического типа.

В случае постоянной линейной плотности  $\rho = \text{const}$  уравнение колебаний однородной струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1.61)$$

где  $a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}$ ;  $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho_0}$

Если внешних сил нет, то  $f(x, t) = 0$ , и однородное волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.62)$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$  – трехмерное однородное уравнение.

Поставим начальные и граничные условия. Из постановки задачи следует, что начальные отклонения точек струны и начальные скорости известны:

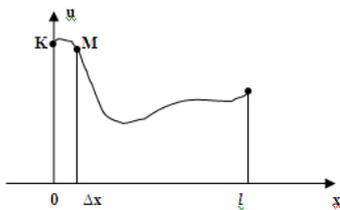
$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \quad (1.63)$$

$\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – известные функции.

Рассмотрим условия на границе струны.

а) Если концы струны жестко закреплены, то граничные условия принимают вид:

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0 \quad (1.64)$$



б) Рассмотрим случай, когда концы струны свободны. Выберем участок КМ на левой границе струны. Длина этого участка  $\Delta x$ , причем  $\Delta x < l$ .

При рассмотрении колебаний участка КМ струну в его окрестности нельзя считать бесконечно тонкой. Поэтому помимо деформаций растяжения – сжатия следует учитывать деформацию изгиба. Натяжение струны вследствие изгиба

$$F = k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Поскольку струна является свободной, последнее выражение необходимо приравнять нулю, откуда следует  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$  (1.65)

Аналогично для  $x = l$  запишем:  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$  (1.65)

в) Если концы струны закреплены упруго, то на них действует сила

упругости  $F' = ku$ . По закону Гука  $k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha u$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - hu \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} - h'u \right|_{x=l} = 0 \quad (1.66)$$

где  $h = \frac{\alpha}{k}, h' = \frac{\alpha}{k'}$ .

г) Если концы струны движутся в поперечном направлении по заданному закону, то граничные условия имеют вид:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \mu_2(t) \quad (1.67)$$

Здесь  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  – известные функции времени. В силу непротиворечивости постановки начально-краевой задачи функции  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \mu_1(0) &= \varphi(0) \\ \mu_2(0) &= \varphi(l) \end{aligned} \quad (1.68)$$

Итак, малые поперечные колебания струны описываются уравнением (1.60), (1.61), (1.62) с начальными условиями (1.63) и парой граничных условий вида (1.64) – (1.68).

## Пример

### Некоторые вспомогательные утверждения

Если для  $\forall x \in [a; b]$  функция  $y = f(x)$  непрерывна и имеет производную первого порядка  $y'$ , то говорят, что  $y = f(x)$  относится к классу  $C^{(1)}$ .

Пусть  $y = f(x) \in C^{(1)}, x \in [a; b]$ .

Пусть  $\alpha$  – угол, образованный касательной к графику функции  $y = f(x)$  в любой точке  $x \in [a; b]$  с положительным направлением оси  $Ox$ .

Пусть  $\alpha$  – малый угол, т. е.

$$\alpha^2 \approx 0.$$

Так как для  $\forall \alpha \in (-\infty; \infty)$  справедливо

$$\sin \alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots,$$

то из (1) и (2) вытекает  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

Далее:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2} \approx 0, \text{ т. е. } \alpha \approx 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = \sin \alpha \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) \approx 0, \text{ т. е. } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha,$$

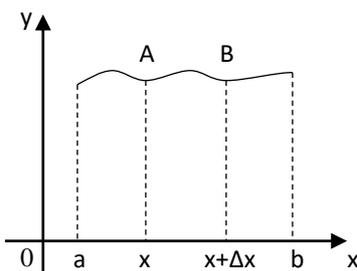
тогда  $\operatorname{tg}^2 \alpha \approx 0$ .

Пусть  $y = f(x) \in C^{(1)}, x \in [a; b]$ , длина дуги  $\overline{AB}$ :

$$l_{\overline{AB}} = \int_a^{x+\Delta x} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

К последнему интегралу применим теорему о среднем: если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то найдется точка  $c \in (a; b)$  такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c).$$



Тогда равенство (3) примет вид

$$l_{\overline{AB}} = \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot \Delta x,$$

где  $c \in (x; x + \Delta x)$  (см. рисунок).

Используем геометрический смысл производной:

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha, \text{ а } f'^2(c) = \operatorname{tg}^2 \alpha \approx \alpha^2$$

При нашем предположении, что  $\alpha$  угол малый, получаем  $f'^2(c) \approx \alpha^2 = 0$ , т. е.

$$l_{\overline{AB}} \approx x.$$

## Пример 2

### Уравнения поперечных колебаний струны

Рассмотрим струну длиной  $l$ , которая в положении равновесия находится вдоль оси  $Ox$ . Ее поперечные колебания в каждый момент времени  $t$  для каждой точки  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) характеризуется вектором смещения  $Q(x, t)$  и описывается уравнением вида:

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t),$$

где,  $a$  – волновая скорость, м/с;

$f(x, t)$  – удельная сила (сила, действующая на единицу массы струны), м/с<sup>2</sup>.

Волновая скорость определяется согласно выражению:

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

где  $T_0$  – сила натяжения струны, Н;

$\rho$  – линейная плотность (масса, приходящаяся на единицу длины струны), кг/м.

Удельная сила, в свою очередь, может быть представлена в виде:

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} g(x, t),$$

где  $g(x, t)$  – линейная плотность внешней силы, Н/м.

Если внешней силы нет  $f(x, t) = 0$ , получаем уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Для выбора начальных условий к данной задаче необходимо задать:

– профиль начальных смещений струны:

$$Q(x, 0) = Q_0(x);$$

– профиль начальных скоростей:

$$\frac{\partial Q(x, 0)}{\partial t} = Q_1(x).$$

Также необходимо задать граничные условия (условия на концах струны).

1) Если концы струны закреплены, то имеем следующие граничные условия:

$$Q(0,t) = g_1(t) = 0;$$

$$Q(l,t) = g_2(t) = 0.$$

2) Если концы струны свободны, т. е. могут свободно перемещаться по прямому, параллельным направлению отклонения  $Q(x,t)$ , то граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = g_1(t) = 0;$$

$$\frac{\partial Q(l,t)}{\partial x} = g_2(t) = 0.$$

3) Если концы струны закреплены упруго, т.е. каждый конец испытывает со стороны заделки сопротивление, пропорциональное отклонению и направленное противоположно ему, то ГУ:

$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} - hQ(0,t) = g_1(t) = 0;$$

$$\frac{\partial Q(l,t)}{\partial x} - hQ(l,t) = g_2(t) = 0,$$

где  $h = k/T_0$ ;

$k$  – коэффициент упругости упругого закрепления концов струны.

4) Если концы струны двигаются в поперечном направлении по заданным законам, то ГУ:

$$Q(0,t) = g_1(t) = \mu_1(t);$$

$$Q(l,t) = g_2(t) = \mu_2(t),$$

где  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  – определяют закон движения концов.

### Индивидуальные задания

1. Движение струны, натянутой и закрепленной в двух точках на расстоянии  $l$ , начинается посредством смещения струны в положение  $y = a \cdot \sin(\pi x/l)$ , из которого струну отпускают в момент времени  $t=0$ . Сформулировать краевую задачу для данного условия.
2. Сформулировать краевую задачу о колебаниях однородной струны ( $0 < x < l$ ), закрепленной на концах, под действием внешней непрерывно распределенной силы с плотностью  $g(x,t) = A \sin(\omega t)$ , где  $\omega \neq (k\pi a/t)$  ( $k=1,2,\dots$ ). Начальные условия нулевые.
3. Сформулировать краевую задачу о вынужденных поперечных колебаниях струны, закрепленной на одном конце ( $x=0$ ) и подверженной на другом конце ( $x=l$ ) действию возмущающей силы, которая вызывает смещение, равное  $A \cdot \sin(\omega t)$ , где  $\omega \neq (k\pi a/t)$  ( $k=1,2,\dots$ ). В момент времени  $t=0$  смещения и скорости равны нулю.

### Контрольные вопросы и задания:

1. Перечислите основные типы уравнений математической физики.
2. Сформулируйте основные краевые задачи для этих уравнений.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 13

### Вывод уравнения колебания струны

#### Цель работы:

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторов и с повторениями.

#### Порядок выполнения работы (отчёт):

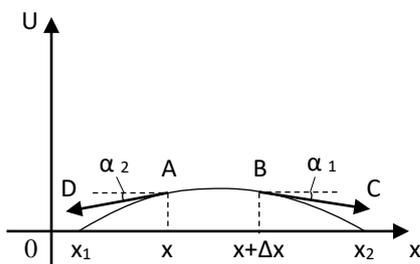
1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

#### Теоретические сведения

##### Математическая модель малых колебаний струны

Струна – тонкая нить, не сопротивляющаяся изгибу, причем:

- 1) силы натяжения струны направлены по касательной к ней;
- 2) колебания происходят только в одной плоскости и вектор смещения перпендикулярен оси  $Ox$ ;
- 3) рассматриваем малые колебания, т.е. если  $\alpha$  – угол между касательной и осью  $Ox$ , то  $\alpha^2 \approx 0$ ;
- 4) струна однородна, т.е. линейная плотность  $\rho = const$ .



Пусть струна закреплена в точках  $x_1$  и  $x_2$ , т.е.  $[x_1; x_2]$  – натянутая струна. Поставим задачу описать колебательный процесс, т.е. найти функцию  $U(x; t)$ ,  $x \in [x_1; x_2]$ ,  $t > 0$  ( $t$  – время), которая бы определяла отклонение каждой точки струны от положения равновесия в произвольный момент времени  $t$ . Если зафиксировать  $x$ , то

$U(x; t)$  будет описывать закон движения этой точки и  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$  – ускорение, с которым движется точка. Возьмем на струне точки  $A$  и  $B$ , т.е. рассмотрим элемент струны  $[x; x + \Delta x]$ . Докажем, что силы  $\vec{AD}$  и  $\vec{BC}$  по величине постоянны и равны. Для этого найдем сумму проекций этих сил на ось  $Ox$ . В нашей модели эта сумма должна равняться нулю, т. к. вектор смещения

перпендикулярен оси  $OX$  (см. рисунок).

$$\text{Пр}_{OX}\vec{BC} = |\vec{BC}| \cdot \cos \alpha_1; \quad \text{Пр}_{OX}\vec{AD} = |\vec{AD}| \cdot \cos \alpha_2.$$

По доказанному в пункте 1  $\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx 1$ , тогда

$$\text{Пр}_{OX}\vec{BC} + \text{Пр}_{OX}\vec{AD} = |\vec{BC}| \cdot \cos \alpha_1 - |\vec{AD}| \cdot \cos \alpha_2 = |\vec{BC}| - |\vec{AD}| = 0,$$

т. е.  $|\vec{BC}| = |\vec{AD}| = T$ .

Для определения функции  $U(x; t)$  найдем сумму проекций сил  $\vec{BC}$  и  $\vec{AD}$  на оси  $OU$ :

$$\text{Пр}_{OX}\vec{BC} = T \cdot \sin \alpha_1 = T \cdot \text{tg} \alpha_1 = T \cdot \frac{\partial U(x + \Delta x; t)}{\partial x}, \quad (1.69)$$

$$\text{Пр}_{OX}\vec{AD} = -T \cdot \sin \alpha_2 = -T \cdot \text{tg} \alpha_2 = -T \cdot \frac{\partial U(x; t)}{\partial x}.$$

Воспользуемся принципом Даламбера, из которого следует, что главный вектор системы сил равен произведению массы системы на ускорение, с которым она движется, тогда из (1.69) получаем:

$$T \cdot \left( \frac{\partial U(x + \Delta x; t)}{\partial x} - \frac{\partial U(x; t)}{\partial x} \right) = m \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (1.70)$$

В (2)  $= \rho \cdot \Delta x$ , где  $\rho$  – линейная плотность струны, а  $\Delta x$  – длина элемента струны  $[x; x + \Delta x]$ . К левой части (1.70) применим теорему Лагранжа о среднем:

$$T \cdot \frac{\partial^2 U(c; t)}{\partial x^2} \cdot \Delta x = \rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1.71)$$

где  $c \in (x; x + \Delta x)$ . Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $c \rightarrow x$ , тогда из (1.71) получим:

$$T \cdot \frac{\partial^2 U(x; t)}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Так как  $\frac{T}{\rho} > 0$ , то  $\frac{T}{\rho} = a^2$ . Окончательно:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (1.72)$$

Уравнение (1.72) называется уравнением колебания струны. Этому уравнению удовлетворяет бесконечное множество функций. Из этого множества нужно выбрать функцию, удовлетворяющую условиям:

$$U(x_1; t) = U(x_2; t) = 0 \quad (1.73)$$

Условия (1.73) называются краевыми и означают, что струна закреплена в точках  $x_1$  и  $x_2$ .

$$\begin{cases} U(x; 0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \end{cases} \quad (1.74)$$

Условия (1.74) называются начальными условиями, где  $f(x)$  задает форму струны в начальный момент времени, а  $F(x)$  задает скорость движения точек струны в начальный момент времени. Условий (1.73) и (1.74) необходимо и достаточно, чтобы функция, описывающая колебания струны и удовлетворяющая уравнению (1.72), существовала и была бы единственной

### Индивидуальное задание

Найти решение  $u = u(x, t)$  уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  методом Даламбера, если в начальный момент времени  $t = 0$  форма струны и скорость точки струны с абсциссой  $x$  определяются соответственно функциями

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 1.$$

#### Контрольные вопросы и задания:

1. Выведите уравнения колебания струны.
2. Сформулируйте некоторые вспомогательные утверждения, которые при этом использовались.
3. Сформулируйте начальные и граничные условия для этого уравнения.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №14

### Решение уравнения колебания струны методом Фурье

#### **Цель работы:**

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторов и с повторениями.

#### **Порядок выполнения работы (отчёт):**

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

#### **Теоретические сведения**

Поставим задачу найти функцию  $U(x; t)$ ,  $x \in [0; l]$ ,  $t > 0$ , удовлетворяющую:

1) уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad (1.75)$$

2) краевым условиям

$$U(0; t) = U(l; t) = 0; \quad (1.76)$$

3) начальным условиям

$$\begin{cases} U(x; 0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \end{cases} \quad (1.77)$$

Решение уравнения (1.75) будем искать в виде:  $U(x; t) = X(x) \cdot T(t)$ ,

$$\text{тогда } \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t); \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t).$$

Подставим значения  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  в уравнение (1.75):

$$X \cdot T'' = a^2 \cdot X'' \cdot T; \quad \text{или } \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (1.78)$$

В уравнении (1.78) левая часть есть функция от  $t$ , а правая часть –

функция от  $x$ , тогда, понятно, что:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = C, \quad (1.79)$$

где  $C = const$ .

Из (1.79) следует, что функции  $X(x)$  и  $T(t)$  должны удовлетворять уравнениям

$$X'' - CX = 0, \quad (1.80)$$

$$T'' = Ca^2 T = 0. \quad (1.81)$$

Воспользуемся краевыми условиями (1.76):

$$U(0; t) = U(l; t) = X(0) \cdot T(t) = X(l) \cdot T(t) = 0.$$

Из последнего равенства вытекает

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (1.82)$$

Решим уравнение (1.80) при условиях (1.82) (задача Штурма-Лиувилля):

а) Пусть  $C = \lambda^2$ , тогда уравнение (1.80) примет вид  $X'' - \lambda^2 X = 0$ . Характеристическое уравнение  $r^2 - \lambda^2 = 0$  имеет корни  $r_{1,2} = \pm \lambda$ , а решение имеет вид  $X = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ . Используем условия (1.82):

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} \end{cases} \quad (1.83)$$

Так как определитель однородной системы (1.83)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix} \neq 0$ , то эта система имеет единственное нулевое решение  $C_1 = C_2 = 0$ .

Вывод: нельзя полагать  $C = \lambda^2$ .

б) Пусть  $C = 0$ , тогда  $X'' = 0$ ;  $r^2 = 0$ ;  $r_{1,2} = 0$ .

Решение имеет вид  $X = C_1 + C_2 x$ . Используем условия (1.82):

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_1 + C_2 l \end{cases}$$

Решив последнюю систему, найдем  $C_1 = C_2 = 0$ .

Вывод: нельзя полагать  $C = 0$ .

в) Пусть  $C = -\lambda^2$ . Уравнение (1.80) примет вид  $X'' + \lambda^2 X = 0$ . Характеристическое уравнение  $r^2 + \lambda^2 = 0$  имеет корни  $r_{1,2} = \pm \lambda i$ , а решение имеет вид  $X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ . Используя условия (1.82), получим:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin \lambda l = 0 \end{cases}$$

Так как  $C_2 \neq 0$ , второе уравнение системы можно записать:  $\sin \lambda l = 0$ .

Решив это уравнение, получим  $\lambda l = k\pi$ ;  $\lambda = \frac{k\pi}{l}$ ;  $k \in Z$ . Таким образом, множество функций  $X_k = C_k \frac{k\pi x}{l}$  удовлетворяют уравнению (1.80) и условиям (1.82).

Из уравнения (1.81) найдем  $T(t)$ . Так как  $C = -\lambda^2$ , уравнение (1.81)

примет вид  $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$  ; или  $T'' + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \cdot T = 0$ . Решение последнего уравнения имеет вид:

$$T = A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l}, \quad k \in Z.$$

Теперь можем составить систему функций  $U_k(x; t)$ :

$$U_k(x; t) = \left( A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \cdot C_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Введем обозначения:  $A_k \cdot C_k = a_k$ ,  $B_k \cdot C_k = b_k$ , тогда

$$U_k(x; t) = \left( a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad k \in Z \quad (1.84)$$

Любая функция вида (1.83) удовлетворяет уравнению (1.75) и условиям (1.76). Подберем  $a_k$  и  $b_k$  так, чтобы система функций (1.84) удовлетворяла условиям (1.77). Так как уравнение (1.75) однородное и линейное, то функция

$$U(x; t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x; t)$$

будет удовлетворять уравнению (1.75), если этот ряд можно почленно дифференцировать. Значит

$$U(x; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.85)$$

Найдем

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -a_k \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi a t}{l} + b_k \frac{k\pi a}{l} \cos \frac{k\pi a t}{l} \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.86)$$

Воспользуемся первым равенством из условий (1.77):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (1.87)$$

Воспользуемся вторым равенством из условий (1.77):

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.88)$$

Если функция  $f(x)$  такова, что в интервале  $(0; l)$  ее можно разложить в ряд Фурье, то условие (1.87) будет выполняться, если

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Из условия (1.88) коэффициент

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Окончательно: решение задачи (1.75), (1.76), (1.77)

$$U(x; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

### Индивидуальное задание

Решить задачу о колебании струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если начальные скорости точек равны нулю, внешние силы отсутствуют, а начальное отклонение  $u_0$  имеет форму параболы, осью симметрии которой служит прямая  $x = \frac{l}{2}$ , а вершиной – точка  $M\left(\frac{l}{2}; h\right)$ .

### Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте идею метода Фурье решения уравнения колебания струны.
2. Сформулируйте идею разрешения этой задачи.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №15

### Решение уравнения колебания струны. Бесконечные струны формула Даламбера

#### **Цель работы:**

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторов и с повторениями.

#### **Порядок выполнения работы (отчёт):**

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

#### **Теоретические сведения**

Пусть  $f(x), F(x) \in C^{(1)}$ . Устремим точки  $x_1$  и  $x_2$  на бесконечность, тогда условия (5) исчезнут и задача о малых колебаниях бесконечной струны сведется к отысканию решения уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.89)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\begin{cases} U(x; 0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \end{cases} \quad (1.90)$$

Решение задачи (1.89), (1.90).

Зададимся новыми переменными  $\begin{cases} \xi = x + ay \\ \eta = x - ay \end{cases}$  где  $a = const$ .

На основании равенств (1.91) и (1.92) из главы 2 уравнение (1.89) запишется так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot a^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot a^2 + 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot a^2,$$

или  $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ .

Последнее уравнение можно записать  $\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0$ , т. е.  $\frac{\partial U}{\partial \eta}$  является

функцией одной переменной  $\eta$ . Обозначим  $\frac{\partial U}{\partial \eta} = \varphi'(\eta)$ , тогда  $U = \varphi(\eta) + \psi(\xi)$ .

Вывод: любая функция  $U = \varphi(\eta) + \psi(\xi)$  удовлетворяет уравнению (1.89), где  $\varphi, \psi \in C^{(1)}$ .

$$\text{Тогда } \frac{\partial U}{\partial t} = -a\varphi'(x-at) + a\psi'(x+at).$$

Воспользуемся начальными условиями (1.90), тогда

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \\ F(x) = -a\varphi'(x) + a\psi'(x) \end{cases} \quad (1.91)$$

Проинтегрировав второе уравнение системы (1.91), получим:

$$\int_0^x F(y)dy = -a\varphi(x) + a\psi(x) + C, \quad \text{где } C = \text{const}$$

Система (1.91) примет вид:

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \\ \frac{1}{a} \int_0^x F(y)dy - \frac{C}{a} = -\varphi(x) + \psi(x) \end{cases} \quad (1.92)$$

Решаем систему (1.92) относительно  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ :

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(y)dy - \frac{C}{2a} = \psi(x),$$

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(y)dy + \frac{C}{2a} = \varphi(x).$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \varphi(x-at) = \frac{1}{2}f(x-at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(y)dy + \frac{C}{2a}, \\ \psi(x+at) = \frac{1}{2}f(x+at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(y)dy - \frac{C}{2a}. \end{cases}$$

$$U(x; t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \left( \int_0^{x+at} F(y)dy - \int_0^{x-at} F(y)dy \right).$$

Используя свойство определенного интеграла, можем последнее равенство записать:

$$U(x; t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y)dy. \quad (1.93)$$

Формула (1.93) называется формулой Даламбера и определяет решение задачи о малых колебаниях бесконечной струны.

### Пример

Методом Даламбера найти уравнение  $U(x; t)$  формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , если в начальный момент времени  $t_0 = 0$  форма струны и скорость точки струны с абсциссой  $x$  определяются соответственно заданными функциями:

$$U|_{t_0=0} = x(2-x); \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t_0=0} = e^{-x}$$

Решение. Применим формулу Даламбера

$$U(x; t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy.$$

В данной задаче  $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$ ;  $F(x) = e^{-x}$ .

$$\begin{aligned} U(x; t) &= \frac{2(x-at) - (x-at)^2 + 2(x+at) - (x+at)^2}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} e^{-y} dy = \\ &= \frac{1}{2} (2x - 2at - x^2 + 2axt - a^2t^2 + 2x + 2at - x^2 - 2axt - a^2t^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2a} e^{-y} \Big|_{x-at}^{x+at} = 2x - x^2 - a^2t^2 - \frac{1}{2a} (e^{-x+at} - e^{-x-at}) = \\ &= x(2-x) - a^2t^2 + \frac{e^{-x+at} - e^{-x-at}}{2a}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } U(x; t) = x(2-x) - a^2t^2 + \frac{e^{-x+at} - e^{-x-at}}{2a}$$

### Индивидуальное задание

Найти форму достаточно длинной струны, определяемой уравнением  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , в момент времени  $t = \pi/2$ ,  $t = \pi$ , если заданы начальные смещения и скорости:

а)  $U(x,0) = \sin x$ ,  $U_t(x,0) = \cos x$ ;

б)  $U(x,0) = 0$ ,  $U_t(x,0) = \cos x$ ;

в)  $U(x,0) = \sin x$ ,  $U_t(x,0) = 0$ .

### Контрольные вопросы и задания:

1. Напишите, чем отличаются краевые условия для конечной и бесконечной струны.
2. Напишите формулу Даламбера.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №16

### Уравнение распространения тепла. Распространение тепла в стержне

#### **Цель работы:**

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями.

#### **Порядок выполнения работы (отчёт):**

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

#### **Теоретические сведения**

Рассмотрим тонкий стержень, в пределах любого сечения которого температуру будем считать постоянной, окруженный теплоизолирующей оболочкой. Направим ось  $Ox$  вдоль данного стержня. Температура стержня в каждой его точке  $x$  в момент времени  $t$  описывается функцией  $Q(x,t)$  согласно уравнению:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (1.94)$$

где  $a^2$  – коэффициент температуропроводности,  $m^2/s$ ;  
 $f(x,t)$  – внешнее воздействие,  $K/s$ .

Коэффициент температуропроводности рассчитывается из выражения:

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad (1.95)$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности вещества,  $Вт/(м \cdot К)$ ;  
 $c$  – удельная теплоемкость вещества,  $Дж/(кг \cdot К)$ ;  
 $\rho$  – плотность вещества,  $кг/м^3$ .

Внешнее воздействие определяется следующим образом:

$$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}, \quad (1.96)$$

где  $F(x,t)$  – функция плотности тепловых источников, которая определяет количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема тепла

Некоторые значения коэффициента температуропроводности

представлены в таблице

Таблица – Коэффициенты температуропроводности материалов

№	Материал	$a^2, \text{м}^2/\text{с}$
1	Серебро	$1,7 \cdot 10^{-4}$
2	Медь	$1,15 \cdot 10^{-4}$
3	Алюминий	$0,85 \cdot 10^{-4}$
4	Железо	$0,15 \cdot 10^{-4}$
5	Бетон	$0,005 \cdot 10^{-4}$

Начальные условия для уравнения теплопроводности состоят в задании температуры всех точек стержня в начальный момент времени:

$$Q(x,0) = Q_0(x) = \varphi(x). \quad (1.97)$$

Для задания граничных (краевых условий) могут быть использованы следующие варианты: (Кузнецов,66)

1) Температура на конце стержня поддерживается по определенному закону (граничные условия первого рода):

$$Q(0,t) = g_1(t) = \mu_1(t); \quad (1.98)$$

$$Q(l,t) = g_2(t) = \mu_2(t). \quad (1.99)$$

2) На конце стержня (например, при  $x=0$ ) задан тепловой поток  $q(t)$  – граничные условия второго рода:

$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = g_1(t) = -\frac{1}{k} q(t), \quad (1.100)$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности вещества, Вт/(м·К).

В частности, в случае теплоизолированного конца тепловой поток через него отсутствует:

$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = g_1(t) = 0. \quad (1.101)$$

3) На конце стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона – граничные условия третьего рода.

$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = g_1(t) = -\frac{H}{k} [Q(0,t) - \Theta(t)], \quad (1.102)$$

где  $\Theta(t)$  – температура окружающей среды;

$H$  – коэффициент теплообмена, т.е. количество тепла, прошедшее через единичную площадку сечения стержня за единицу времени при изменении температуры на один градус, Вт/(К·м<sup>2</sup>).

### Пример 1

Пусть стержень длиной  $l$  погружают в пар до тех пор, пока температура во всех его точках не достигнет 100<sup>0</sup>С. В момент времени  $t=0$  его боковую поверхность теплоизолируют, а его оба конца вставляют в лед при 0<sup>0</sup>С. Сформулировать краевую задачу для вычисления температуры стержня после выполнения сформулированных условий.

Функция  $Q(x,t)$ , описывающая распределение температуры в стержне определяется уравнением:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

где  $0 \leq x \leq l$ ;

$a^2$  – коэффициент температуропроводности материала стержня.

Начальные условия:

$$Q(x,0)=100.$$

Граничные условия:

$$Q(0,t)=Q(l,t)=0.$$

### Пример 2

Поставить краевую задачу определения температурного поля одномерного однослойного шара радиусом  $R$ . В начальный момент времени температурное поле подчиняется закону  $F(r)$ . Шар помещен в среду с температурой  $\Theta$ , при этом теплообмен на поверхности подчиняется закону Ньютона и коэффициент теплоотдачи (теплообмена) равен  $H$ . Коэффициент теплопроводности шара  $k$ .

Так как в задаче рассматривается одномерный шар, то это означает симметричное температурное поле по всем направлениям. Тогда можете быть использовано уравнение теплопроводности в полярных координатах, которое с учетом отсутствия внутренних источников тепла имеет вид:

$$\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t} - a^2 \left[ \frac{\partial^2 Q(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Q(r,t)}{\partial r} \right] = 0,$$

Начальные условия при этом определяются заданным законом:

$$Q(r,0) = F(r);$$

Граничные условия на поверхности шара запишем как граничные условия третьего рода:

$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial r} = -\frac{H}{k} [Q(R,t) - \Theta(t)],$$

Шар имеет центральную точечную симметрию. При равномерном теплообмене по поверхности температурное поле будет симметричным. В связи с этим появляются дополнительное условие симметрии:

$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial r} = 0.$$

### Индивидуальное задание

Решить задачу о распространении тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре. Стержень считаем однородным и тонким, так, что  $d \ll l$ , где  $d$  – диаметр стержня,  $l$  – его длина. Сечение стержня считается настолько малым, что всем точкам сечения в каждый момент времени можно приписать одну температуру.

### Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте принципы распространения тепла в стержне.
2. Выведите уравнение теплопроводности распространения тепла в конечном стержне.
3. Сформулируйте краевую задачу для данного уравнения.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №17

### Распространения тепла в неограниченном стержне. Интеграл Пуассона

#### **Цель работы:**

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторов и с повторениями.

#### **Порядок выполнения работы (отчёт):**

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

#### **Теоретические сведения**

Температуру физического тела в произвольной точке с координатами  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  можно представить в виде функции:

$$u = u(x, y, z)$$

Составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Выражение  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$  называется оператором Лапласа.

Тогда составленное нами дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

и называется уравнением теплопроводности в пространстве.

В качестве частных случаев рассматривают:

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  – уравнение теплопроводности в стержне,

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  – уравнение теплопроводности на плоскости.

В случае рассмотрения уравнения теплопроводности в стержне искомая функция  $u(x, t)$  должна удовлетворять записанному выше дифференциальному уравнению, начальному условию  $u(x, 0) = f(x)$   $0 \leq x \leq \pi$  и граничным условиям  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $t \geq 0$ .

В результате решения дифференциального уравнения методом Фурье получим:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-a^2 k^2 t} \sin kx,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

Отметим, что распространение тепла в теле называется стационарным, если функция  $u$  не зависит от времени  $t$ .

### Интеграл Пуассона

Интеграл Пуассона позволяет получить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

Пусть для гармонической в шаре функции  $u(r, \varphi)$  поставлено условие равенства на границе функции  $u_0$ :  $u(R, \varphi) = u_0(\varphi)$ , при этом функции принадлежат следующим классам гладкости:  $u(r, \varphi) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $u_0(\varphi) \in C^1(\partial D)$ , где  $\partial D$  — граница шара  $D$ , а  $\bar{D}$  — его замыкание. Тогда решение такой задачи Дирихле представимо в виде интеграла Пуассона:

$$u(r, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{\omega_n R} \int_{\partial D} \frac{u_0(\psi)}{|r - \psi|^n} dS(\psi), \quad r \in [0; R),$$

где  $\omega_n$  — площадь единичной сферы, а  $n$  — размерность пространства.

Вывод формулы в двумерном случае

Известно, что функция

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + \tilde{a}_n \sin n\varphi)$$

является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Преобразуем это выражение с учётом выражений для коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left( \cos n\varphi \int_0^{2\pi} u_0(\psi) \cos n\psi d\psi + \sin n\varphi \int_0^{2\pi} u_0(\psi) \sin(n\psi) d\psi \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\psi) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\varphi \cos n\psi + \sin n\varphi \sin n\psi) \right) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\psi) d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\psi) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right) d\psi. \end{aligned}$$

Последнюю сумму можно вычислить при  $0 \leq r < R$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} e^{i(\varphi - \psi)}\right)^n = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{\frac{r}{R} e^{i(\varphi - \psi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \psi)}} = \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{\frac{r}{R} e^{i(\varphi - \psi)} (1 - \frac{r}{R} e^{-i(\varphi - \psi)})}{1 - 2\frac{r}{R} \cos(\varphi - \psi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{2(R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi))}. \end{aligned}$$

Таким образом, в преобразованном виде интеграл Пуассона для круга приобретает вид:

$$u(r, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0(\psi) d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi)}, \quad r \in [0, R).$$

### Индивидуальное задание

Найти решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

в прямоугольной области  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} &= 0, \\ u \Big|_{y=0} &= 0, & \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

### Контрольные вопросы и задания:

1. Выведите уравнения распространения тепла в неограниченном стержне.
2. Сформулируйте условия существования и решения этой задачи.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №18**  
**Некоторые задачи для уравнения Лапласа.**  
**Решение задачи Дирихле для круга**

**Цель работы:**

- Закрепить теоретический материал путем выполнения практического задания.
- Формировать умения решать практические задачи используя теоретический материал и образцы решения задач.
- Научиться решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторов и с повторениями.

**Порядок выполнения работы (отчёт):**

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и примерами решения задач, представленных в данных методических указаниях.
2. Выполнить расчет предлагаемых задач согласно своего варианта.
3. Сформировать отчет по практической работе.
4. Отчет должен содержать:
  - титульный лист;
  - расчет предлагаемых задач согласно своего варианта;
  - выводы по выполненной практической работе.
5. Оформить отчет.

**Теоретические сведения**

Найти функцию  $U$ , удовлетворяющую уравнению  $\Delta U = 0$  внутри кольца. (1.103)

Необходимо поставить краевые условия на каждой из границ:

$$\begin{cases} U(R_1, \varphi) = f_1(\varphi) \\ U(R_2, \varphi) = f_2(\varphi), \end{cases} \quad (1.104)$$

где  $f_1(x), f_2(x)$  – заданные функции,  $\varphi$  – полярный угол.

Для простоты вычислений возьмем  $R_1 = 1, R_2 = 2$   
и  $f_1(x) = 1, f_2(x) = 2,$

тогда краевые условия примут вид

$$\begin{cases} U(1, \varphi) = 1 \\ U(2, \varphi) = 2. \end{cases} \quad (1.105)$$

Запишем уравнение (1.103) в полярных координатах

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Решим уравнение методом разделения переменных, то есть будем искать решение уравнения (1.103) вида

$$U(\rho, \varphi) = P(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\Delta U = P''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}P'(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Phi''(\varphi) = 0$$

$$\frac{\rho^2 \left( P'' + \frac{1}{\rho} P' \right)}{P} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{const.}$$

Отсюда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$\begin{cases} \rho^2 \left( P'' + \frac{1}{\rho} P' \right) = \lambda P & (1.106) \\ \Phi'' = -\lambda \Phi & (1.107) \end{cases}$$

Необходимо определить знак  $\lambda$ . В уравнении Лапласа в круге мы выяснили, что  $\lambda > 0$  и решения уравнений (1.105) – (1.106) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A \cos q\varphi + B \sin q\varphi, \text{ причем } q \in \mathbb{Z}$$

$$P(\rho) = C\rho^q + D\rho^{-q}, \text{ причем } q > 0$$

и при  $\lambda = 0$  получили

$$P(\rho) = D_0 \ln \rho + C_0, \quad q = 0.$$

Общее решение имеет вид

$$U(\rho, \varphi) = \frac{C_0}{2} + D_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n})$$

Удовлетворим краевым условиям (1.105). Необходимо выяснить, какие из коэффициентов являются лишними.

$$U(1, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n (C_n + D_n) \cos n\varphi + B_n (C_n + D_n) \sin n\varphi) = 1$$

$$A_n (C_n + D_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{n\pi} \sin n\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$B_n (C_n + D_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin n\varphi d\varphi = -\frac{1}{n\pi} \cos n\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi = 1;$$

$$U(2, \varphi) = C_0 + D_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n (C_n 2^n + D_n 2^{-n}) \cos n\varphi + B_n (C_n 2^n + D_n 2^{-n}) \sin n\varphi) = 2,$$

$$A_n (C_n 2^n + D_n 2^{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cdot \cos n\varphi d\varphi = 0,$$

$$B_n (C_n 2^n + D_n 2^{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sin n\varphi d\varphi = 0,$$

$$C_0 + D_0 \ln 2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 d\varphi = 2.$$

Итак, получили

$$\begin{cases} U(1, \varphi) = C_0 = 1 \\ U(2, \varphi) = C_0 + D_0 \ln 2 = 2. \end{cases}$$
$$U(\rho, \varphi) = 1 + \frac{\ln \rho}{\ln 2} - \text{решение задачи.}$$

### Индивидуальное задание

Найти функцию  $U$ , удовлетворяющую уравнению:

$$\Delta U = 0 \text{ внутри круга} \quad (1)$$

и граничному условию

$$U(R, \varphi) = \mu(\varphi) \text{ на границе круга,} \quad (2)$$

где  $\mu(\varphi)$  – заданная функция,  $\varphi$  – полярный угол.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

### Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте несколько задач, приводящих к решению уравнения Лапласа.
3. Запишите двумерное уравнение Лапласа в полярной системе координат.
4. Запишите решение задачи Дирихле для круга.

## Список использованных источников

### 1. ПЕЧАТНЫЕ И (ИЛИ) ЭЛЕКТРОННЫЕ УЧЕБНЫЕ ИЗДАНИЯ (ВКЛЮЧАЯ УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ

а) основная литература:

1. Коробова Л.А., Математическое моделирование. Практикум: учеб. пособие / Л.А. Коробова, Ю.В. Бугаев, С.Н. Черняева, Ю.А. Сафонова – Воронеж: ВГУИТ, 2017. – 112 с. – ISBN 978-5-00032-247-5 – Текст: электронный // ЭБС «Консультант студента»: [сайт]. – URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785000322475.html>.

2. Бизнес-статистика: учебник и практикум для академического бакалавриата / И. И. Елисеева [и др.]; под ред. И. И. Елисеевой. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 411 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-05724-9. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: <https://www.biblio-online.ru/book/biznes-statistika-433866>.

3. Судоплатов, С. В. Математика: математическая логика и теория алгоритмов: учебник и практикум / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – 5-е изд., стер. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 255 с. – (Серия: Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-10930-6. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: <https://www.biblio-online.ru/book/matematika-matematicheskaya-logika-i-teoriya-algoritmov-432449>

4. Пригарин, С. М. Статистическое моделирование многомерных гауссовских распределений: учеб. пособие для вузов / С. М. Пригарин. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 83 с. – (Серия: Университеты России). – ISBN 978-5-534-10209-3. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: <https://biblio-online.ru/book/statisticheskoe-modelirovanie-mnogomernyh-gaussovskih-raspredeleniy-442392>.

б) дополнительная литература:

1. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Васильева А.В. – Красноярск: СФУ, 2016. – <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785763835113.html>

2. Михайлов, Г. А. Статистическое моделирование. Методы монте-карло: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 371 с. – (Серия: Бакалавр и магистр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-06881-8. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: <https://biblio-online.ru/book/statisticheskoe-modelirovanie-metody-monte-karlo-441997>

3. Журнал целочисленных последовательностей [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/>

4. Математическое моделирование [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: <http://keldysh.ru/e-biblio/mmod.htm>

5. Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: [http://www.ulsu.ru/ru/page/page\\_2743](http://www.ulsu.ru/ru/page/page_2743)

6. Информатизация образования и науки [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: <http://informika.ru/pechatnye-izdaniya/zhurnal-informatizaciya-obrazovaniya-i-nauki/>

7. Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности [Электронный ресурс] электрон. журн. – Режим доступа: <http://keldysh.ru/future>

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ИЗДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Волков А.П. Математическое моделирование и математическая статистика. Учебная программа по дисциплине «Математическое моделирование и математическая статистика» для студентов направления подготовки 44.03.04.09 «Профессиональное обучение. Информационные технологии и системы». – Стаханов: СУНИГОТ, 2018. – 11 с.

2. Карчевский В.П., Карчевская Н.В., Ефремова О.В. Курсовое проектирование. Примеры: учебно-методическое пособие по курсовому проектированию для студентов дневной и заочной форм обучения специальности «Профессиональное обучение. Информационные технологии и системы» / В.П. Карчевский, Карчевская Н.В., Ефремова О.В. – Луганск: СУНИГОТ ЛНУ им. В.Даля, 2017. – 1024 с. (консультант Волков А.П.)

## 3. ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

г) Интернет-ресурсы:

1. Министерство образования и науки Луганской Народной Республики – <https://minobr.su>

2. Народный совет Луганской Народной Республики – <https://nslnr.su>

3. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования – <http://fgosvo.ru>

4. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» – <http://window.edu.ru/>

Электронные библиотечные системы и ресурсы

Электронно-библиотечная система «Консультант студента» – <http://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>

Информационный ресурс библиотеки образовательной организации

Научная библиотека имени А. Н. Коняева – <http://biblio.dahluniver.ru/>

Учебное издание

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**  
по дисциплине  
**«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»**  
для студентов направления подготовки  
44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)  
в 2-х частях. Часть 2

**С о с т а в и т е л ь:**  
Александр Павлович Волков  
Игорь Васильевич Владарский

Печатается в авторской редакции.  
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать \_\_\_\_\_  
Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типограф. Гарнитура Times  
Печать офсетная. Усл. печ. л. \_\_\_\_\_. Уч.-изд. л. \_\_\_\_\_  
Тираж 100 экз. Изд. № \_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного  
университета имени Владимира Даля

*Свидетельство о государственной регистрации издательства  
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015г.*

**Адрес издательства:** 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а  
**Телефон:** 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60  
**E-mail:** [uni@snu.edu.ua](mailto:uni@snu.edu.ua) **http:** [www.snu.edu.ua](http://www.snu.edu.ua)





