Учебное издание

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»
для студентов направления подготовки
44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)
В 3-х частях. Часть 1-я «Теоретическая механика»

Составитель:
Валентин Иванович Сафонов

Печатается в авторской редакции.
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать ______________
Формат 60х84$^{1}/_{16}$. Бумага типограф. Гарнитура Times
Печать офсетная. Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _______
Тираж 100 экз. Изд. №______. Заказ №______. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного
университета имени Владимира Даля

Свидетельство о государственной регистрации издательства
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015г.

Адрес издательства: 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60
E-mail: uni@snu.edu.ua **http**: www.snu.edu.ua

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Стахановский инженерно-педагогический институт менеджмента

Кафедра общеинженерных дисциплин

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине

«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

для студентов направления подготовки
44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)

В 3-х частях. Часть 1-я «Теоретическая механика»

Луганск – 2021

УДК 531

Учебное пособие по дисциплине **«Теоретическая и прикладная механикамеханика»** для студентов направления подготовки 44.03.04 **Профессиональное обучение (по отраслям). В 3-х частях. Часть 1-я «Теоретическая механика»**. / Сост.: В.И.Сафонов. – **Стаханов**: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ», 2021. – 139 с.

Приведен теоретический материал курса «Теоретическая механика». Материал сопровождается задачами с детальным объяснением хода их решения, а также вопросами для самопроверки полученных знаний.

Пособие предназначено для студентов для студентов направления подготовки 44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)

Составитель: доц. Сафонов В.И.

Ответственный за выпуск: доц. Сафонов В.И.

Рецензент: доц. Петров А.Г.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кальмова М.А., Муморцев А.Н., Ахмедов А.Д. Техническая механика. Учебно-методическое пособие. – Самара: СГАСУ, 2016. – 144 с. – ISBN 978-5-9585-0664-4. Режим доступа: https://www.twirpx.com/file/2481640/
2. Атапин В.Г., Механика. Теоретическая механика : учебное пособие / Атапин В.Г. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. - 108 с. - ISBN 978-5-7782-3229-7 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778232297.html
3. Бандурин М.А., Скринников Е.В., Нефедов В.В., Михайлин А.А. Теоретическая механика. Учебно-методическое пособие. − Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова ЮРГПУ (НПИ), 2017. − 104 с. Режим доступа: https://www.twirpx.com/file/2515627/
4. Кухарь В.Д., Теоретическая механика : учебный справочник / Кухарь В.Д., Нечаев Л.М., Киреева А.Е. - изд. 2-ое, испр, доп. - М. : Издательство АСВ, 2016. - 148 с. - ISBN 978-5-4323-0161-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785432301615.html
5. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркни Д. Р. Курс теоретической механики. − СПб.: Лань, 1998. − 736 с.
6. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. − М.: Высшая школа, 1990. − 606 с.
7. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. − М.: Высшая школа, 1995. − 416 с.

$$\varPhi_2^I = \frac{2}{g}6^2 \cdot 0{,}25 \approx 18 \text{ Н}.$$

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости xy, то реакции подпятника A и подшипника B также лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

Дальнейшее решение согласно принципу Даламбера выполняется методами статики, при этом принимаем, что рассмотренная конструкция неподвижна, а приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, а затем решим их, определив искомые значения X_A, Y_A, X_B:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad X_A + X_B + \varPhi_1^I + \varPhi_2^I = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad Y_A - P_1 - P_2 = 0;$$

$$\sum M_B(F_k) = 0: X_A(b_1+b_2) - P_1(l/2)\sin\alpha - P_2 l\sin\alpha + \varPhi_1^I(H_1+b_2) + \varPhi_2^I(H_2+b_2) = 0;$$

Откуда:

$$Y_A = P_1 + P_2 = 3\cdot 9{,}81 + 2\cdot 9{,}81 = 49{,}05 \text{ Н};$$

$$X_A = \frac{P_1\frac{l}{2}\sin\alpha + P_2 l\sin\alpha - \varPhi_1^I(H_1+b_2) - \varPhi_2^I(H_2+b_2)}{(b_1+b_2)} =$$

$$= \frac{3\cdot 9{,}81\frac{0{,}5}{2}\sin 30^\circ + 2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5\sin 30^\circ - 13{,}5(1/6+0{,}2) - 18(0{,}25+0{,}2)}{0{,}6+0{,}2} = -11{,}8 \text{ Н};$$

$$X_B = -X_A - \varPhi_1^I - \varPhi_2^I = 11{,}8 - 13{,}5 - 18 = -19{,}7.$$

Значение полной реакции подпятника A определим как сумму ее составляющих по формуле:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-11{,}8)^2 + 49{,}05^2} = \sqrt{2545} = 50{,}45 \text{ Н}.$$

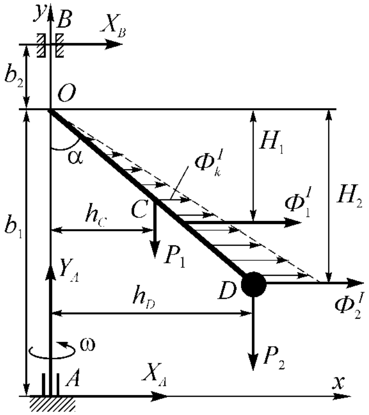
Ответ: $X_A = -11{,}8$ Н; $Y_A = 49{,}05$ Н; $R_A = 50{,}45$ Н; $X_B = -19{,}7$ Н.

Знаки "–" указывают, что силы X_A и X_B направлены в сторону, противоположную показанным на расчетной схеме.

Проверь свои знания!

1. Что такое сила инерции материальной точки?
2. В чем состоит отличие даламберовых и эйлеровых сил инерции?
3. В чем состоит принцип Даламбера для материальной точки?
4. В чем состоит принцип Даламбера для механической системы?
5. Как вычисляются главный вектор и главный момент сил инерции при различных видах движения твердого тела?
6. Как определить главный вектор и главный момент сил инерции в целом для всей механической системы?
7. В чем состоит особенность решения задач при определении реакций связей, которые наложены на тела, движущихся с некоторым ускорением?

СОДЕРЖАНИЕ



Пример. С невесомым валом *AB*, который вращается с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен стержень *OD* длиной *l* и весом P_1, который имеет на конце в точке *D* груз весом P_2 (см. рис.).

Дано: $b_1 = 0{,}6$ м, $b_2 = 0{,}2$ м, $\alpha = 30°$, $l = 0{,}5$ м, $P_1 = 30$ Н, $P_2 = 20$ Н, $\omega = 6$ с$^{-1}$.

Определить: реакции подпятника *A* и подшипника *B*.

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, которая состоит из вала *AB*, стержня *OD* и груза *D*, а затем применим принцип Даламбера.

Проведем оси *Axy*, которые вращаются вместе с валом, так, чтобы стержень лежал в плоскости *xy*, и изобразим действующие на систему внешние силы: силы веса $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, реакции $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ подпятника и реакцию $\vec{X}_B$ подшипника.

Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно ($\omega = \text{const}$ и $\varepsilon = 0$), то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\vec{a}_{nk}$, направленные к оси вращения. Тогда силы инерции $\vec{O}_i^I$ будут направлены от оси вращения. Поскольку все силы инерции пропорциональны расстояния h_k рассмотренной массы (центра масс элемента) к оси вращения, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $|\vec{R}_1^I| = |\vec{\varPhi}_1^I|$, линия действия которой проходит через центр веса этого треугольника, то есть на расстоянии $H_1 = \dfrac{2}{3}H_2 = \dfrac{2}{3}l\sin\alpha = \dfrac{2}{3}0{,}5\sin 30° = \dfrac{1}{6}$ м от вершины *O*.

Определим значение сил инерции $\varPhi_i^I$ по формуле

$$\varPhi_k^I = m_k a_{nk} = m_k \omega_k^2 h_k ,$$

где m_k, a_{nk} и ω_k – соответственно масса, нормальное ускорение и угловая скорость *k-го* элемента.

Тогда для стержня *1* и груза *2* (см. рис.):

$$\varPhi_1^I = m_1\omega^2 h_C = \frac{P_1}{g}\omega^2 h_C;$$

$$\varPhi_2^I = m_2\omega^2 h_D = \frac{P_2}{g}\omega^2 h_D;$$

$$h_C = 0{,}5l\sin\alpha = 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}125 \text{ м};$$

$$h_D = l\sin\alpha = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25 \text{ м};$$

$$\varPhi_1^I = \frac{30}{g}6^2\cdot 0{,}125 \approx 13{,}5 \text{ Н};$$

$$\vec{M}_C^{\Phi} = \sum \vec{M}_C(\vec{\Phi}_k) = -\sum(\vec{r}_{k_C} \times m_k \vec{a}_k),$$

где $\vec{r}_{k_C}$ – радиус-вектор k-й точки, проведенный из центра масс.

Таким образом, при любом движении твердого тела главный вектор сил инерции $\vec{\Phi}$ равен произведению массы m тела на ускорение $\vec{a}_C$ центра масс тела, взятый со знаком минус.

В отдельных случаях движения твердого тела две последние формулы могут иметь другой вид.

При поступательном движении:

$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_C$; $\qquad \vec{M}_C^{\Phi} = 0$.

При вращении тела вокруг оси, которая проходит через центр масс:

$\vec{\Phi}^* = 0$; $\qquad M_{Cz}^{\Phi} = -\varepsilon I_{Cz}$,

где I_{Cz} – момент инерции тела относительно оси z.

При вращении тела вокруг оси z_1, которая не проходит через центр масс:

– если вектор Ф* приложен в центре масс:

$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_C = \Phi_C^*$; $\quad M_{Cz}^{\Phi} = -\varepsilon I_{Cz_1}$;

– если вектор $\vec{\Phi}^*$ приложен в точке O, которая лежит на оси вращения, то главный момент сил инерции M_{Oz}^{Φ} определяется относительно оси вращения Oz:

$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_C = \Phi_O^*$; $\quad M_{Oz}^{\Phi} = -\varepsilon I_{Oz}$.

В этом случае совокупность $(\vec{\Phi}_O; M_{Oz}^{\Phi})$ можно заменить одной силой – равнодействующей $\vec{\Phi}' = \vec{\Phi}^*$, линия действия которой отстоит от точки C на расстоянии $d_1 = \dfrac{M_{Cz_1}^{\Phi}}{\Phi^*}$, а от точки O – на расстоянии $d_2 = \dfrac{M_{Oz}^{\Phi}}{\Phi^*}$;

– при плоскопараллельном движении тела:

$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_C$; $\qquad M_C^{\Phi} = -\varepsilon I_C$.

Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси.

Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси рассмотрим на примере.

«Никакое человеческое знание не может добиваться на название искренней науки, если оно не пользуется математическими доказательствами».

Леонардо Да-Винчи.

Значительные проблемы, стоящие перед нами, не могут быть решены на том же уровне мышления, на котором мы их создали.

Альберт Эйнштейн

– Если опыт даст утвердительный ответ, то я признаю вашу правоту.

– Каким темпом двигалась бы вперёд наука, если бы в каждом частном случае применения общих законов необходимо было обращаться к новым опытам!

(из диалога)

1. Не следует принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

2. Поэтому, насколько возможно, необходимо приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.

3. Такие свойства, которые не могут быть ни усилены, ни ослаблены и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

4. В опытной физике предположения, выведенные из совершающихся явлений путем индукции, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности, или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточнятся или же окажутся подверженными исключениям.

И. Ньютон. «Математические начала натуральной философии». Книга третья: «О системе мира».

1. Если заслуженный, но немолодой ученый заявляет, что что-то возможно, он, скорее всего, прав. Когда же он заявляет, что это невозможно, он, вероятнее всего, ошибается.

2. Единственный путь выявления границ возможного заключается в том, чтобы сделать шаг в невозможное.

3. Никакая развитая технология не отличается от волшебства.

«Три закона Артура Кларка»

«Когда человек прошел уже большую часть своего жизненного пути, тогда перед его умственным взором невольно встает то, что составляло главное содержание его жизни. Для меня главный жизненный интерес сосредоточен на излюбленной мною науке – механике...»

Н.Е. Жуковский

лировок.

Первая формулировка. *Если ко всем точек несвободной механической системы, которые двигаются с некоторыми ускорениями, приложить равнодействующие активных сил, сил реакций связей и силы инерции этих точек, то полученная система сил будет уравновешенной, то есть эквивалентной нулю:*

$$\sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k + \sum \vec{\Phi}_k = 0 .$$

Из статики известно, что для уравновешенной системы сил геометрическая сумма этих сил (главный вектор) и геометрическая сумма моментов этих сил относительно некоторого центра (главный момент) равны нулю. Поэтому принцип Даламбера для механической системы можно записать в виде

$$\sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k + \sum \vec{\Phi}_k = 0 ;$$

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k) + \sum \vec{M}_O(\vec{R}_k) + \sum \vec{M}_O(\vec{\Phi}_k) = 0 .$$

Вторая формулировка. *Геометрическая сумма главных векторов активных сил, сил реакций связей и сил инерции всех точек системы, а также геометрическая сумма главных моментов указанных сил относительно некоторого центра для несвободной механической системы в любой момент времени равны нулю.*

Если силы, которые действуют на механическую систему, разделить на внешние и внутренние, то в число внешних сил, кроме активных сил, войдут реакции внешних связей, а внутренние силы (реакции внутренних связей) – не войдут, так как в соответствии со свойством внутренних сил их главный вектор и главный момент равны нулю.

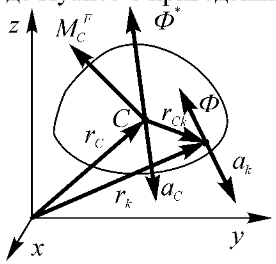
Третья формулировка. *Геометрическая сумма главных векторов внешних сил, которые действуют на систему, и сил инерции всех точек системы, а также геометрическая сумма главных моментов этих сил относительно некоторого центра для несвободной механической системы в любой момент времени равны нулю,* то есть

$$\sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{\Phi}_k^e = 0 ;$$

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \sum \vec{M}_O(\vec{\Phi}_k^e) = 0 .$$

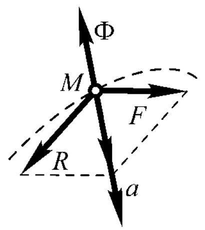
Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела.

Главный вектор и главный момент сил инерции точек системы определяются отдельно для каждого твердого тела, которые входят в рассматриваемую механическую систему. Их определения базируются на известном из статики методе Пуансо о приведении произвольной системы сил к заданному центру.



На основании этого метода силы инерции всех точек твердого материального тела в общем случае его движения можно привести к центру масс и заменить их главным вектором $\vec{\Phi}^*$ и главным моментом $\vec{M}_C^{\Phi}$ относительно центра масс (см. рис.), которые определяются по формулам:

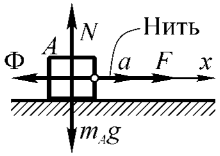
$$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_c ;$$



Для доказательства этого положения рассмотрим второй закон динамики для несвободной материальной точки, преобразуем и упростим его:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \Rightarrow \vec{F} + \vec{R} - m\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0,$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая активных сил, приложенных к точке; $\vec{R}$ – равнодействующая реакций связей, наложенных на точку; $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ – сила инерции материальной точки (см. рис.).

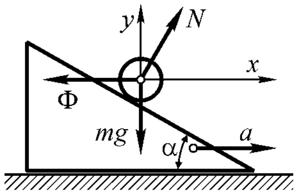


Пример. Тело A покоится на абсолютно гладкой поверхности (см. рис.). С помощью нити сообщаем ему ускорение $\vec{a}$ за счет силы $\vec{F}$, которая действует со стороны другого тела на тело, которое рассматривается. При ускорении возникает сила инерции $\vec{\Phi}$, которая противодействует ускорению.

Если условно положить, что сила инерции материальной точки приложена к телу A, можно записать вместо уравнения динамики уравнения статики:

$$\sum X_k = 0 : F - \Phi = 0 \Rightarrow F = \Phi .$$

В связи с этим силу инерции, приложенную к телу, считают фиктивной (все же эта сила приложена к другому тела – к тому, которое действием силы $\vec{F}$ сообщает ускорение $\vec{a}$). Но такое допущение позволяет задачу динамики решать методами статики.



Пример. На абсолютно гладкую верхнюю наклонную плоскость призмы, угол у основания которой равен α, поместили цилиндр (см. рис.). С каким ускорением необходимо перемещать призму по горизонтальной плоскости, чтобы цилиндр не скатывался с поверхности призмы?

Решение. При неподвижной призме цилиндр будет скатываться вниз. Чтобы он не перемещался относительно призмы, ее нужно с некоторым ускорением $\vec{a}$ перемещать вправо. Тогда появится сила инерции $\vec{\Phi}$, которая приложена к цилиндру и направлена влево.

Приложим к цилиндру силы веса $m\vec{g}$, инерции $\vec{\Phi}$ и нормальной реакции $\vec{N}$ (см. рис.). Тогда, согласно принципу Даламбера, можно записать:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0 .$$

Проецируем силы на ось x и получаем:

$$\sum X_i = 0 : mg\sin\alpha - \Phi\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = 0 \Rightarrow a = \frac{mg\sin\alpha}{m\cos\alpha} = g\,\mathrm{tg}\,\alpha .$$

3.22. СИЛЫ ИНЕРЦИИ В ДИНАМИКЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Принцип Даламбера для механической системы имеет несколько форму-

ВВЕДЕНИЕ

Механика – *это наука о простейших формах движения материальных тел вследствие их взаимодействия между собой*. Под движением в механике понимается механическое движение, то есть изменение положения тел или частей тела в пространстве с течением времени. Основана механика, как и всякая физическая наука, на наблюдении и опыте, и может быть разделена на наблюдательную и теоретическую. В последнее время в связи с интенсивным развитием компьютерной техники получает развитие вычислительная механика.

Наблюдательная механика входит в разные разделы экспериментальной физики, астрономии, техники. В ней устанавливается связь между свойствами материальных тел, их движением и причинами, которые вызывают или изменяют движение. Эти причины называют силовыми факторами. Упомянутая связь формулируется в виде законов движения, которые не являются математическими следствиями каких–то извечных истин, а представляют собой индуктивные положения, основанные на большом числе опытных фактов, которые согласуются между собой. Эти положения представляют собой утверждение о свойствах движения материальных объектов, достоверные с той или иной точностью.

Изучение наиболее общих свойств движения и взаимодействия любых тел изучается в дисциплине, которую называют теоретическая механика.

Теоретическая механика – *раздел физики, в котором изучаются законы механического взаимодействия между телами, а также механическое движение тел*. Под механическим взаимодействием понимают силовое действие одних тел на другие, а под механическим движением – изменение взаимного расположения материальных тел. Мерой механического взаимодействия тел служит величина, которая называется силой. Поскольку состояние покоя является отдельным случаем движения, то одной из задач теоретической механики есть изучение равновесия материальных тел.

Теоретическая механика является фундаментальной дисциплиной, методы которой широко используются для решения широкого класса инженерных задач. Усвоение теоретической механики усложняется тем, что в этой науке существенную роль играет моделирование и математическое представление явлений природы, которые исследуются. Поэтому решение конкретных инженерных задач затруднены тем более, чем шире поставлена задача. Эти затруднения заключаются в том, что не сразу можно связать теорию с ее практическим применением.

Итак, главная задача теоретической механики как науки – изучение наиболее общих законов движения и взаимодействия тел с целью познания количественных и качественных закономерностей, которые наблюдаются в природе. Из определения теоретической механики вытекает, что она принадлежит к фундаментальным естественным наукам, поскольку природоведение в целом изучает разные формы движения материи.

Теоретическая механика является одной из научных основ техники и технологии, поскольку существует взаимная связь между проблемами теоретической механики и проблемами техники и технологии. Сложнейшие проблемы техники и технологии, которые возникают в связи с развитием новых видов производства и новых технических средств, для решения нуждаются в моделировании на основе предыдущих точных расчетов и научного предвидения, которое опирается на глубокие знания законов и методов теоретической механики. Логическое совершенство механики помогает понимать явления, которые наблюдаются, и предвидеть закономерности новых явлений. Истинность этих знаний подтверждается опытом и практикой.

Теоретическая или рациональная механика опирается на некоторое конечное число законов, установленных в опытной механике, принятых за истины, которые не требуют доказательства – аксиомы, на основании которых могут быть получены все дальнейшие выводы путем логических соображений и математических вычислений. Эти аксиомы заменяют собой в теоретической механике индуктивные истины опытной механики. Теоретическая механика имеет дедуктивный характер. Опираясь на аксиомы как на известный и проверенный практикой и экспериментом фундамент, в теоретической механике все теоремы, законы, принципы и прочее получается с помощью строгих математических выводов.

В теоретической механике рассматриваются, как правило, количественные характеристики, поэтому в ней самую важную роль имеет математический анализ. Однако большая насыщенность дисциплины математикой и отсутствие на протяжении значительной части курса экспериментальных работ не означает, что теоретическая механика не нуждается в проведении исследований для подтверждения верности положений и выводов. Как и в других областях знаний, верность положений теоретической механики проверяется опытом и практикой.

Изучение механических процессов, которые протекают в сложных механических системах, как правило, нуждаются в огромных описательных работах и еще больших – вычислительных. Изучению таких процессов содействует применение вычислительной механики, которая базируется на законах наблюдательной и теоретической механики, с использованием вычислительных методов математики с использованием компьютеров, а также методов моделирования механических систем, которое дало новый импульс развития механики вообще.

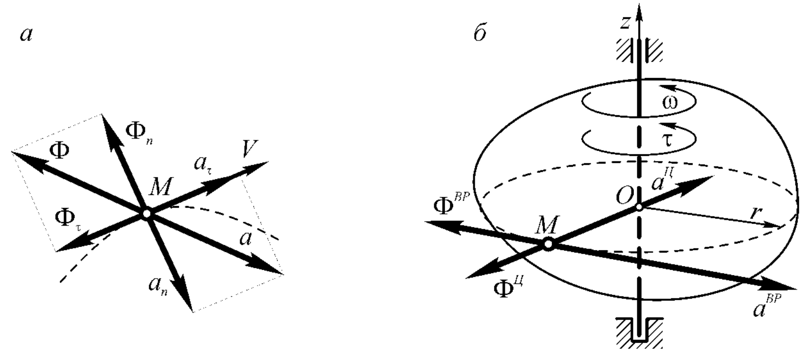
В основе классической механики лежат законы Ньютона. Используя их, решают задачи о движении и покое материальных тел (за исключением микрочастиц) со скоростями, малыми в сравнении со скоростью света (теория относительности позволяет решать задачи о движении материальных тел со скоростями, близкими к скорости света; движение микрочастиц рассматривается в квантовой механике, особенностями которой является статистический характер значений физических величин и их дискретность).

По Ньютону теоретическая механика «есть учение о движении, которое вызвано некоторыми силами, и о силах, которые необходимы для причинения некоторого движения, точно изложенное и доказанное».

Теоретическая механика как часть природоведения, которая использует математические методы, имеет дело не с самими реальными материальными объектами, а с них моделями. Такими моделями, которые исследуются в теоретической механике, являются материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые тела и другие.

В зависимости от того, движение каких объектов рассматривается, различают механику материальной точки и системы материальных точек, механику твердого тела, механику сплошной среды.

Как и в любой другой науке, в теоретической механике используется метод абстракции. При изучении движения отбрасывается все частное, случайное, менее существенное, а рассматривается только то, что в данной задаче является определяющим. Так появляются два существенных для теоретической механики абстрактных понятия, сущность которых состоит в замене реальных тел их уп-



При вращении тела вокруг неподвижной оси силы инерции точек этого тела раскладываются на вращательную $\vec{\Phi}^{ВР}$ и центробежную $\vec{\Phi}^{Ц}$ (см. рис. *б*).

Для k-й точки тела, которое вращается вокруг неподвижной оси:

$$\vec{\Phi}_k^{ВР} = -m_k \vec{a}_k^{ВР} = -m_k \vec{\varepsilon} r_k \,;$$

$$\vec{\Phi}_k^{Ц} = -m_k \vec{a}_k^{Ц} = -m_k \vec{\omega}^2 r_k \,,$$

где $m_к$ – масса k-й точки; $\vec{a}_k^{ВР} = \vec{\varepsilon} r_k$ и $\vec{a}_k^{Ц} = \vec{\omega}^2 r_k$ – соответственно вращательное и центростремительное ускорение точки; $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ – соответственно угловые ускорение и скорость; r_k – радиус траектории k-й точки.

Таким образом, силы инерции, или даламберовы силы, всегда противодействуют стремлению внешних сил изменить состояние покоя или прямолинейного равномерного движения тела (т.е. движения тела по инерции). Эти силы инерции приложены к тому телу, которое сообщает ускорение телу, которое рассматривается.

В динамике проявления даламберовых сил применяют:

– при исследовании движения материальной точки в неинерциальной (подвижной) системе координат, то есть при исследовании относительного движения. В этом случае проявляются переносная и кориолисова силы инерции, которые называют эйлеровыми силами;

– при решении задач динамики с использованием метода кинетостатики, в основу которого положен принцип Даламбера, согласно которому вводятся силы инерции материальной точки или системы материальных точек, которые двигаются с некоторым ускорением в инерциальной системе отсчета. Эти силы инерции называются даламберовыми силами;

– при решении задач динамики с использованием даламберовых сил инерции и принципа Лагранжа-Даламбера или общего уравнения динамики.

3.21. СИЛЫ ИНЕРЦИИ В ДИНАМИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Принцип Даламбера для материальной точки. *Если к несвободной материальной точке, которая движется под действием приложенных активных сил и сил реакций связей, приложить силу инерции этой точки, то в любой момент времени полученная система сил будет уравновешенной, то есть геометрическая сумма указанных сил будет равняться нулю.*

рое вращается вокруг неподвижной оси?
8. Что такое мощность силы?
9. Как вычисляется мощность внешних сил при поступательном и вращательном движениях твердого тела?
10. Что такое кинетическая энергия материальной точки?
11. Чему равна кинетическая энергия механической системы?
12. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопаралельном движениях?
13. В каких видах и какими формулами записывается теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы?
14. Что такое потенциальная энергия?
15. Чему равна работа силы на некотором перемещении в потенциальном силовом поле?

3.20. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Сила инерции. Согласно второму закону динамики для того, чтобы сообщить материальному телу ускорение, необходимо приложить к нему силу $\vec{F} = m\vec{a}$. То есть без внешнего механического возмущения тело сохраняет первоначальное состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Такой процесс носит название инертности. Для нарушения первоначального состояния необходимо к телу приложить внешнюю силу со стороны другого тела, в противодействие которой со стороны первого тела появится противодействие – сила $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, которая носит название силы инерции.

Таким образом, *сила инерции* $\vec{\Phi}$ *материальной точки равна произведению массы точки на ее ускорение, взятое со знаком минус*. Силы инерции называют даламберовими силами.

Последнее уравнение можно записать в проекциях на оси декартовых координат:

$$\Phi_X = -m\ddot{x}\,; \qquad \Phi_Y = -m\ddot{y}\,; \qquad \Phi_Z = -m\ddot{z}\,,$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – модули проекций ускорения точки на оси декартовых координат.

При криволинейном движении точки (или тела) силу инерции можно разложить на касательную $\vec{\Phi}_\tau$ и нормальную $\vec{\Phi}_n$ (см. рис. *а*):

$$\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau\,; \qquad \vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n\,,$$

где $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ – модуль соответственно касательного и нормального ускорений, $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$; $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$; ρ – радиус кривизны траектории; V – скорость точки.

рощенными моделями. К таким моделям в теоретической механике относятся материальная точка и абсолютно твердое тело.

Под материальной точкой понимают тело, размерами которого при решении конкретной задачи можно пренебрегать, но эта точка имеет определенную массу. Так, при рассмотрении движения частицы сыпучего груза на конвейере или грузоподъемного сосуда с грузом в ряде задач можно абстрагироваться от конкретной формы груза и принять его за материальную точку. В зависимости от постановки задачи за материальную точку могут быть приняты автомобиль, самолет, планета Земля и тому подобное.

Под абсолютно твердым телом понимается тело, расстояние между двумя любыми точками которого остается неизменной, то есть в данном случае не учитывают свойство тела деформироваться при механическом взаимодействии с другими телами.

Традиционно теоретическая механика делится на статику, кинематику и динамику. В разделе «статика» изучаются такие условия, при которых материальные объекты могут оставаться в покое; в этом разделе также рассматриваются способы преобразований систем сил в эквивалентные системы. В разделе «кинематика» изучается движение, но только с геометрической точки зрения без учета причин (силовых факторов – сил, моментов и других), которые вызывают это движение. В разделе «динамика» изучается движение в связи с причинами (силовыми факторами), которые вызывают или меняют это движение.

Механика охватывает целый комплекс дисциплин, которые изучают движение и взаимодействие разных материальных тел. Например, в дисциплине «прикладная механика» изучаются общие вопросы движения и работы механизмов и машин, «гидромеханика» – движение и взаимодействие жидкостей и тел, «теория автоматического управления» – движение системы тел, в которых формируются взаимодействие через отрицательную обратную связь и интеллектуальные искусственные законы управления, «аэромеханика» – движение газов и твердых тел в газовой среде, «небесная механика» – движение небесных тел, «электродинамика» – движение и взаимодействие тел в электромагнитных полях, «биомеханика» – движение и взаимодействие биологических объектов.

Теоретическая механика служит базой для изучения других общетехнических и специальных дисциплин, таких, как «прикладная механика», «теория механизмов и машин», «сопротивление материалов», «гидравлика», «электродинамика», «теория автоматического управления», «горные машины», «шахтный транспорт», «стационарные установки шахт», «управление состоянием массива горных пород» и другие. Знание же законов теоретической механики, которые отображают объективно существующие взаимосвязи и взаимообусловленности механических движений и преобразования энергии, дает возможность научно предусмотреть ход процессов в новых задачах, которые возникают в процессе развития науки, техники и технологий.

Механика формирует, развивает и направляет творческую интуицию ученых, инженеров и технологов, поскольку в определенной мере является итогом многовекового опыта человечества.

Теоретическая механика, будучи тесно связанной с практической деятельностью людей, представляет собой одну из наиболее древних наук. Хотя первые письменные работы ученых, которые дошли до нас, датируются четвертым веком до нашей эры, остатки древних сооружений позволяют утверждать, что некоторые сведения из механики были известны людям значительно раньше.

В начале механика развивалась преимущественно в области статики. Уже к третьему столетию нашей эры, главным образом работами выдающегося ученого древности Архимеда (287…212 года нашей эры), были заложены научные основы статики. Архимед дал точное решение задачи о равновесии рычага, создал учение о центре масс, открыл известный закон гидростатики, который носит его имя, и другие. Архимедом было предложено множество разных технических устройств и сооружений, в том числе в области военной техники.

Средние века характеризуются застоем творческой мысли. В эпоху возрождения наступает расцвет торговли, разных ремесел, а также военной техники, что дало мощный толчок развития механики и выявило ряд выдающихся мыслителей и ученых. И, не считаясь с тем, что вопрос движения тел занимали умы ученых с древнейших времен, кинематика и особенно динамика начали развиваться в конце 16-го столетия. Главную роль в создании динамики сыграли Галилей и Ньютон. Период между Архимедом и Ньютоном, который охватывает почти два тысячелетия, с точки зрения развития теоретической механики, можно вообще охарактеризовать как период накопления огромного опытного материала о разных механических движениях (в частности, о движении небесных светил), и хотя и медленного, но неуклонного развития математических знаний. Накопленный опытный материал, развитие математики, гениальные открытия непосредственных предшественников Ньютона, а именно – Коперника (1473…1543), Кеплера (1571…1630) и особенно Галилея, а также требования производства, которое в это время интенсивно развивается, мореплавания, военного дела и других появились теми объективными предпосылками, которые привели Ньютона к открытию общих законов механики, которые носят его имя, и созданию математического аппарата (дифференциального и интегрального счисления), что позволило применять эти общие законы и их следствия для решения практических задач.

Развитие теоретической механики в 18… 19-м столетиях шло главным образом по пути создания и разработки аналитических (Эйлер, Даламбер, Лагранж, Якоби, Гамильтон, А. Пуанкаре и другие) и геометрических (Пуансо и другие) методов механики.

Значительный взнос в развитие теоретической механики сделали советские ученые М.В. Остроградский (1801…1862, работы в области аналитической механики), П.Л. Чебышев (1821…1894, работы в области теории механизмов и машин), С.В. Ковалевская (1850…1891, решила задачу для сложного случая движения твердого тела вокруг неподвижной точки); самый большой взнос в теоретическую механику позже сделали А.Г. Ляпунов (1857…1918, работы по созданию теории устойчивости движения механических систем), Н.Е. Жуковский (1847…1921, основоположник современной аэродинамики), а также И.В. Мещерский (1859…1935), которые дали решение задачи о движении точки переменной массы, С.А. Чаплигин (1869…1942), А.Н. Крылов (1863…1945), Н.Г. Четаев (1902…1959) и другие.

Бурный рост промышленности потребовал решения новых технических проблем, привел к развитию специальных разделов теоретической механики, которые в девятнадцатом веке выделились в отдельные дисциплины (гидро-, аэро- и газодинамика, теория упругости и пластичности и другие). Но методы решения задач, которые рассматриваются в этих дисциплинах, опираются на методы теоретической механики. Этим объясняется то, что теоретическая механика является одной из основных общенаучных дисциплин, которая изучается в

$$T_A = \frac{m_A V_C^2}{2} + \frac{I_C\omega_A^2}{2} = \frac{m_A V_C^2}{2} + \frac{\left(\frac{m_A R_A^2}{2}\right)\left(\frac{V_C}{R_A}\right)^2}{2} = \frac{3}{4}m_A V_C^2;$$

$$T_B = \frac{I_{X_B}\omega_B^2}{2} = \frac{(m_B R_B^2)\left(\frac{2V_C}{R_B}\right)^2}{2} = 2m_B V_C^2;$$

$$T = \frac{3}{4}m_A V_C^2 + 2m_B V_C^2 = V_C^2\left(\frac{3}{4}m_A + 2m_B\right) = V_C^2\left(\frac{3}{4}500 + 2\cdot 50\right) = V_C^2\cdot 475.$$

Вычислим работу внешних сил, которыми являются силы веса $m_A\vec{g}$ и $m_B\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}$, сила сцепления $\vec{F}_{СЦ}$, вращающий момент M_{BP}, реакции связи X_B и Y_B (см. рис.). Тогда

$$\sum A_k^e = A_{(m_A\vec{g})} + A_{(\vec{F}_{TP})} + A_{(\vec{N})} + A_{(m_B\vec{g})} + A_{(M_{BP})} + A_{(\vec{Y}_B)} + A_{(\vec{X}_B)}.$$

$A_{(m_A\vec{g})} = 0$ так как $m_A\vec{g} \perp \vec{S}$;

$A_{(\vec{F}_{TP})} = 0$ так как сила $\vec{F}_{TP}$ приложена в МЦС;

$A_{(\vec{N})} = 0$ так как $\vec{N} \perp \vec{S}$;

$A_{(m_B\vec{g})} = 0$ так как $m_B\vec{g} \perp \vec{S}$;

$A_{\vec{X}_B} = 0$ и $A_{(\vec{Y}_B)} = 0$ так как точка приложения сил $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$ не перемещается.

$A_{(M_{BP})} = M_{BP}\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – угол поворота барабана A, $\Delta\varphi = \frac{2S}{R_B}$. Тогда

$$A_{(M_{BP})} = M_{BP}\frac{2S}{R_B} = 200\frac{2\cdot 10}{0{,}3} = 13333 \text{ Дж.}$$

Окончательно имеем:

$$V_C^2\cdot 475 = 13333 \Rightarrow V_C = \sqrt{\frac{13333}{475}} = 5{,}3 \text{ м/с.}$$

Проверь свои знания!

1. Что такое элементарная работа силы?
2. Как вычисляется работа силы на конечном перемещении?
3. Почему работа силы, которая перпендикулярна к перемещению, равна нулю?
4. Как вычисляется работа силы веса и силы упругости?
5. В каких случаях работа силы веса и силы упругости положительна, а в каких – отрицательна?
6. В каких единицах измеряется работа силы?
7. Как вычисляется работа внешних сил, приложенных к твердому телу, кото-

3.19. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Теорема в дифференциальной форме. *Производная от кинетической энергии механической системы равняется сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, которые действуют на систему* (иначе: производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме работ внешних и внутренних сил (или только внешних), которые действуют на систему).

Теорема в интегральной (конечной) форме. *Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, приложенных к системе, на том же перемещении.*

Для доказательства рассмотрим теорему в интегральной форме для k-й точки системы:

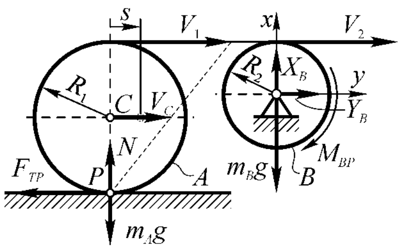
$$\frac{m_k V_{2k}^2}{2} - \frac{m_k V_{1k}^2}{2} = A_k^e + A_k^i ,$$

где A_k^e и A_k^i – соответственно работа внешних и внутренних сил, приложенных к k-й точке, на некотором перемещении. Суммируя для всех точек системы, получим:

$$\sum \frac{m_k V_{2k}^2}{2} - \sum \frac{m_k V_{1k}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^i \Rightarrow T_2 - T_1 = \sum A_k^e + \sum A_k^i .$$

Для системы твердых тел $\sum A_k^i = 0$ (согласно свойствам внутренних сил). Тогда окончательно имеем:

$$T_2 - T_1 = \sum A_k^e .$$



Пример. Барабан A для транспортировки каната приводится в движение из состояния покоя с помощью самого же каната, свободный конец которого наматывается на барабан B лебедки (см. рис.). Барабан A считать однородным цилиндром массой m_A = 500 кг и радиусом R_A = 2 м. Масса барабана лебедки m_B = 50 кг распределена по его ободу радиусом R_B = 0,3 м и к нему приложен вращающий момент M_{BP} = 200 Н·м.

Пренебрегая скольжением, трением и весом троса определить скорость барабана A, когда он переместится на расстояние S = 10 м.

Решение. В систему входят 2 тела – барабаны A и B. Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме: $T_2 - T_1 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$. Так как система движется из состояния покоя, то T_1 = 0. Согласно свойству внутренних сил $\sum A_k^i = 0$. Тогда $T_2 = \sum A_k^e$. Здесь $T_2 = T_A + T_B$. Барабан A движется плоскопаралельно, а барабан B – вращается вокруг неподвижной оси. Тогда

высшей школе.

Нужно помнить, что правильный ход любого научного исследования состоит в предыдущем накоплении исследовательских данных со следующим объединением этих данных на основе обобщающих выводов, связанных с введением некоторых абстракций и проверкой этих результатов на практике, то есть, «от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике – такой диалектический путь познания истины, познание объективной реальности» (Ленин В.И. Конспект книги Гегеля «Наука логики». –полн. собр. соч., т. 29. –С. 152…153).

По характеру задач, которые изучаются, и из методических соображений теоретическая механика делится на статику, кинематику, динамику и аналитическую механику. Такое распределение в значительной мере облегчает изучение механического движения тел и преобразования энергии и связывает изучение теоретической механики с другими дисциплинами.

Центральное уравнение аналитической механики – уравнение Лагранжа второго рода, в котором базовой величиной является энергии кинетическая и потенциальная, является основой для перенесения методов аналитической механики в электродинамику в форме уравнений Лагранжа-Максвелла, где вместо кинетической и потенциальной энергии оперируют энергией электрического и магнитного полей. Таким образом, теоретическая механика является единственной наукой, которая дает общий аппарат – уравнение Лагранжа-Максвелла для составления дифференциальных уравнений электромеханических систем, что является основой современной техники, так как сегодня уже тяжело представить себе то или другое устройство, прибор или машину, которые были бы сугубо механическими. Такие понятия, как центр параллельных сил (центр тяжести) и моменты инерции, которые зависят от геометрии масс и характеризуют динамические свойства тел, и соответствующие им аналитические соотношения, являются полной аналогией математического ожидания, дисперсии, корреляционной матрицы в теории вероятностей и случайных функций. Понятие устойчивости положения равновесия и движения механической системы и системы управления с учетом рефлексивности как особенности взаимодействия мыслящего субъекта с реальностью распространяется на экономическую систему в макроэкономике. Методы исследования нелинейных колебаний, имеющие начало в механике, применяются в областях техники и науки – теории автоматического регулирования, радиотехнике, электронике, биомеханике, электродинамике и т.п. Итак, теоретическая механика является основой моделирования различных естественных наук и это дает основания считать ее фундаментальной наукой.

РАЗДЕЛ 1. СТАТИКА

Статика – *раздел теоретической механики, в котором изучают условия равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, а также приведение систем сил к другому виду* (например, сложной системы сил к простейшему виду и наоборот).

Основная задача статики состоит в выводе общих условий, при которых абсолютно твердое тело под действием приложенной к нему системы сил остается в состоянии относительного равновесия. Относительным равновесием называется относительный покой твердого тела, которое рассматривается одновременно с силами, действующими на него. Относительный покой – состояние механической системы (твердого тела), при котором положение всех ее точек в выбранной системе отсчета не меняется со временем. В технических задачах считается, что, если твердое тело находится в состоянии покоя по отношению к Земле как системы отсчета, то все приложенные к этому телу силы образуют уравновешенную систему.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИКИ

Материальное тело – *тело, которое имеет массу и размеры.*

Материальная точка – *простейшая модель материального тела.* При этом точка имеет массу, равную массе тела и пренебрежимо малые размеры.

Примеры материальных тел, которые можно представить как точку: автомобиль, который движется через большой мост, можно представить как точку, если изучается прочность этого моста от нагрузки, которую создает автомобиль (но, если изучается прочность покрытия моста или короткого моста от нагрузки, которую создает автомобиль, то необходимо учитывать нагрузку от каждого колеса автомобиля и потому его уже нельзя представлять как точку); Земля, если изучается ее взаимодействие с другими небесными телами.

Механическая система – *совокупность взаимодействующих между собой материальных точек или тел.*

Абсолютно твердое тело – *механическая система, расстояния между точками которой не меняются при любых действиях и взаимодействиях.*

Сила – *мера механического взаимодействия материальных тел* (то есть сила есть объективная причина, которая является результатом взаимодействия материальных объектов, способна вызвать движение тел из состояния покоя или изменить их существующее движение или покой).

Сила – понятие дуальное. Сила никогда не бывает одна, а только в паре с другой силой. Действию одной силы всегда есть равное и противоположно направленное противодействие другой силы. Раз есть действие, то есть и противодействие, то есть силы всегда выступают взаимно уравновешенными «двойками».

Так как сила определяется движением, которое она вызвала, то она также имеет относительный характер, который зависит от выбора системы отсчета.

Сила – векторная величина и характеризуется величиной (модулем), направлением и точкой приложения. Поэтому в теоретической механике силы принято на схемах изображать в виде вектора, а с силами можно выполнять такие же операции, как и с векторами. Размерность (единица измерения) силы – Н

которая приложена к точке, на том же перемещении.

Для доказательства теоремы рассмотрим дифференциал от кинетической энергии точки, который равен элементарной работе: $d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = mVdV = dA$.

Проинтегрируем это уравнение: $\int_{V_1}^{V_2} mVdV = \int_{S_1}^{S_2} dA \Rightarrow \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A$, где V_2 и V_1 – соответственно конечная и начальная скорости точки.

Окончательно $$T_2 - T_1 = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A.$$

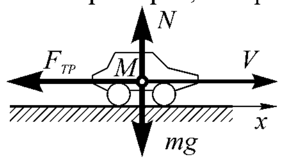
Так как при поступательном движении тело можно считать материальной точкой, то теорему об изменении кинетической энергии точки можно использовать и для тела, которое движется поступательно.

В случае вращательного движения тела соответствующие формулы принимают следующий вид:

– теорема в дифференциальной форме $d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = dA$.

– теорема в интегральной (конечной) форме $T_2 - T_1 = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = A$.

В этих формулах dA и A – соответственно элементарная работа и работа силовых факторов, которые вращают тело.



Пример. Когда автомобиль начал тормозить юзом на горизонтальной скользкой дороге, его скорость была $V = 60$ км/ч. Какое расстояние он пройдет до остановки, если коэффициент трения f колес о дорожное покрытие равен 0,3?

Решение. Изобразим расчетную схему, представив автомобиль как точку M (см. рис.). Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A.$$

Конечная скорость $V_2 = 0$, а начальная, выраженная в метрах в секунду, составит $V_1 = \frac{V}{3{,}6}$. Работу A выполняет сила трения F_{TP}, которая вычисляется по формуле: $F_{TP} = fN = fmg$. Тогда

$$0 - \frac{mV_1^2}{2} = -F_{TP}S \Rightarrow S = \frac{mV_1^2}{2}\frac{1}{F_{TP}} = \frac{mV_1^2}{2fmg} = \frac{(V/3{,}6)^2}{2fg} = \frac{(60/3{,}6)^2}{2\cdot 0{,}3\cdot 9{,}81} = 47{,}2 \text{ м}.$$

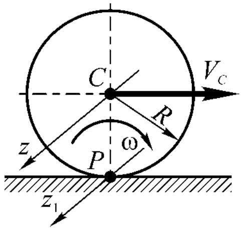
$$T_{ПЛ.ПАР.} = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}.$$

Плоскопараллельное движение можно рассматривать как мгновенное вращательное движение вокруг оси, которая проходит через МЦС, то есть точку P. Поэтому $V_C = \omega|PC|$, где $|PC|$ – расстояние от МЦС до центра масс C. С учетом этого имеем:

$$T_{ПЛ.ПАР.} = \frac{M\,|PC|^2\,\omega^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(I_{Cz} + M\,|PC|^2) = \frac{\omega^2}{2} I_{Pz} = \frac{I_{Pz}\omega^2}{2},$$

где $I_{Cz} + M\,|PC|^2 = I_{Pz}$ – момент инерции тела относительно МЦС (последнее уравнение – теорема Гюйгенса-Штейнера).

Для этого случая плоскопаралельного движения окончательно имеем: $T_{ПЛ.ПАР.} = \dfrac{I_{Pz}\omega^2}{2}$.



Пример. Вычислить кинетическую энергию однородного колеса массой $M = 15$ кг, которое катится без скольжения со скоростью $V_C = 10$ м/с (см. рис.).

Решение. Колесо движется плоскопараллельно. Вычислим кинетическую энергию двумя способами:

$$1.\ T_{ПЛ.ПАР.} = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2} = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{\left(\frac{MR^2}{2}\right)\left(\frac{V_C}{R}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{15\cdot 10^2}{2} + \frac{\left(\frac{15\cdot R^2}{2}\right)\left(\frac{10}{R}\right)^2}{2} = 750 + 375 = 1125\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

$$2.\ T_{ПЛ.ПАР.} = \frac{I_{Pz}\omega^2}{2} = \frac{(I_{Cz} + MR^2)\left(\frac{V_C}{R}\right)^2}{2} = \frac{\left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\left(\frac{V_C}{R}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{3}{4}MV_C^2 = \frac{3}{4}\cdot 15\cdot 10^2 = 1125\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

3.18. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТЕЛА

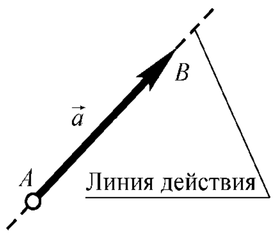
Теорема в дифференциальной форме. *Производная от кинетической энергии материальной точки равна элементарной работе силы, которая действует на точку*, то есть

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA.$$

Теорема в интегральной (конечной) форме. *Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно работе силы,*

(ньютон).

Вектор – *направленный отрезок*. Различают три типа векторов – свободные, скользящие и связанные (приложенные). Вектор называется свободным, если за него начало может быть принята любая точка пространства. Скользящим называется вектор, который можно произвольно перемещать вдоль его линии действия. *Линия действия силы – прямая линия, которая проходит через начало и конец вектора, который изображает силу* (на рисунке ниже показана штриховой линией). Связанным называется вектор, начало которого находится в строго определенной точке пространства (вектор имеет определенную точку приложения).



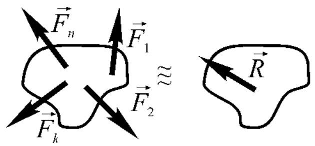
Изображенный на рисунке вектор можно обозначить как $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$ (если вектор направлен от точки B к точке A, то его нужно обозначить как $\overrightarrow{BA}$).

Абсолютное значение (модуль) вектора указывается той же буквой, как и вектор, но без стрелки над ней, например, a или AB, а также заключением вектора в прямые скобки (модуль) $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Два вектора называются геометрически равными, если они одинаковые по модулю, взаимно параллельные и направлены в одну сторону.

Система сил – *совокупность нескольких сил, которые действуют на тело или систему тел.*

Эквивалентные силы (системы сил) – *такие силы* (системы сил), *действие которых на рассматриваемое тело одинаковое при иных равных условиях* (иначе – одну силу (систему сил), которая действует на тело, можно заменить другой эквивалентной силой (системой сил), и состояние тела при этом не изменится).



Равнодействующая сила системы сил – *такая сила* $\vec{R}$ (см. рис.), *действие которой на тело или материальную точку эквивалентно действию заданной системы сил*, (то есть систему сил, которая действует на тело, можно заменить равнодействующей силой $\vec{R}$, и состояние тела при этом не изменится).

Равнодействующую системы сил можно получить, если геометрически сложить силы системы, то есть $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_k + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_n = \vec{R}$. Тогда вектор $\vec{R}$ будет называться равнодействующей системы сил.

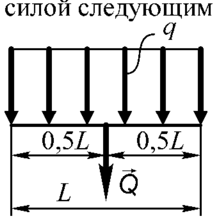
Уравновешенная система сил – *система сил, действие которой на твердое тело не приводит к изменению его состояния*. Равнодействующая уравновешенной системы сил равняется нулю. Условие равновесия сил, которые действуют на твердое тело, сводится к свойствам систем векторов.

Сила, которая уравновешивает систему сил – *такая сила, которая уравновешивает равнодействующую системы сил* (иначе – такая сила, которая равняется равнодействующей системы сил, но направленная в противоположную сторону). Система сил в совокупности с силой, которая ее уравновешивает, образуют уравновешенную систему сил (то есть эквивалентную нулю).

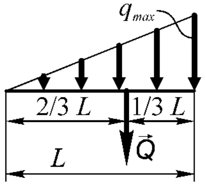
Сосредоточенная сила – *сила, приложенная к какой-нибудь конкретной точке твердого тела.*

Распределенные силы (распределенная нагрузка) – *силы, которые действуют на все точки данной части линии тела, его поверхности, объема.* Распределенные силы характеризуются интенсивностью q (то есть нагрузкой, которая приходится на единицу длины линии, площади, объема). Размерность (единица измерения) распределенной силы, которая действует на отрезке линии, – Н/м, площади – Н/м^2, объема – Н/м^3.

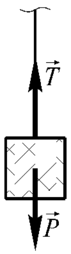
Если распределенные силы действуют в плоскости на прямую линию (как это приведено в двух примерах ниже), то их можно заменить сосредоточенной силой следующим способом.



Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q заменяется сосредоточенной силой $Q = ql$ (см. рис.). При этом вектор силы $\vec{Q}$ прикладывается в середине отрезка действия распределенной нагрузки.



Если распределенные силы изменяются по линейному закону (изображаются, например, в виде треугольника; см. рис.), то сосредоточенная сила $Q = 0{,}5q_{\max}l$. В этом случае вектор силы $\vec{Q}$ прикладывается в центре тяжести треугольника, который расположен на расстоянии $L/3$ от его основания.



Внутренние силы – *силы взаимодействия между телами, которые входят в механическую систему или между отдельными частями одного тела.*

Внешние силы – *силы, с которыми на тела рассмотренной механической системы действуют тела, которые не входят в данную механическую систему.*

Например, система тел «груз, подвешенный на нити», находится в равновесии (см. рис.). Сила веса $\vec{P}$, который обусловлен притяжением Земли, является внешней силой. Сила упругости нити $\vec{T}$, которая возникает при ее растяжении грузом, является внутренней силой.

Проверь свои знания!

1. Что называется вектором? Каковы его свойства?
2. Что такое сила, система сил?
3. Что такое материальные точка, тело, система тел?
4. Назовите свойства сил и их систем.

$$T = T_1 + T_2 + ... + T_n = \sum T_k .$$

Кинетическая энергия механической системы в общем случае ее движения *равна сумме кинетической энергии движения системы вместе с центром масс и кинетической энергии системы при ее движении относительно центра масс* (последняя формулировка представляет собой теорему Кенига), то есть

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \sum \frac{m_k V_{Ck}^2}{2} ,$$

где V_{Ck} – скорость k-й точки системы относительно центра масс C.

Следует отметить, что кинетическая энергия внутренних сил системы в общем случае не равна нулю, поскольку при определении кинетической энергии не учитывается направление движения отдельных тел (точек) системы под действием этих сил.

Кинетическая энергия твердого тела при его поступательном движении. При поступательном движении тела скорость всех точек тела одинаковая, то есть $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = ... = \vec{V}_n = \vec{V}_C$ (см. соответствующий параграф раздела «Кинематика»). Тогда кинетическая энергия тела, которое движется поступательно, будет

$$T_{ПОСТ.} = \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{V_C^2}{2} \sum m_k = \frac{MV_C^2}{2} .$$

Кинетическая энергия твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси. При вращении тела вокруг неподвижной оси все его точки описывают круговые траектории с одинаковой угловой скоростью ω. Тогда

$$T_{ВРАЩ.} = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum \frac{m_k r_k^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{\omega^2}{2} I = \frac{I\omega^2}{2} ,$$

где $\sum m_k r_k^2 = I$ – момент инерции тела относительно оси вращения.

Кинетическая энергия твердого тела при его плоскопараллельном движении. На основании теоремы Кенига с учетом того, что $V_{Ck} = \omega_{|Ck|}$, где C_k – расстояние от центра вращения до центра масс C, получаем:

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \sum \frac{m_k |C_k|^2 \omega^2}{2} = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} ,$$

где $\sum m |C_k|^2$ – момент инерции плоской фигуры относительно оси, которая проходит через центр масс C.

Таким образом, *при плоскопараллельном движении тела кинетическая энергия слагается из кинетической энергии* $\frac{MV_C^2}{2}$ *поступательного движения тела со скоростью центра масс* V_C *и кинетической энергии* $\frac{I_C \omega^2}{2}$ *вращательного движения с угловой скоростью* ω *вокруг оси, которая проходит через центр масс* C, то есть работы A_Σ, то есть $\eta = \dfrac{A_{ПОЛ.}}{A_\Sigma}$.

Пример. Определить мощность двигателя шахтной подъемной машины, с помощью которой поднимается груз массой $m = 15$ т на высоту $h = 800$ м со средней скоростью $V = 10$ м/с, если КПД зубчатой передачи, которая передает крутящий момент от двигателя к барабану машины, $\eta = 0{,}97$.

Решение. Потребная мощность для подъема груза

$$N = \frac{A_\Sigma}{t}; \quad A_\Sigma = \frac{A_{ПОЛ.}}{\eta}; \quad t = \frac{h}{V}.$$

Полезная работа расходуется на подъем груза (работа силы веса), то есть $A_{ПОЛ.} = mgh$. Тогда

$$N = \frac{mghV}{\eta h} = \frac{mgV}{\eta} = \frac{15000 \cdot 9{,}81 \cdot 10}{0{,}97} = 1517010 \text{ Дж/с} \approx 1{,}52 \text{ МДж/с} = 1{,}52 \text{ МВт}.$$

Пример. Определить мощность двигателя кузнечного молота, если его масса 2000 кг, высота подъема $h = 1$ м, КПД передачи $\eta = 0{,}8$ и молот нужно поднимать $n = 20$ раз в минуту.

Решение. Потребная мощность для подъема молота

$$N = \frac{A_\Sigma}{t}; \quad A_\Sigma = \frac{A_{ПОЛ.}}{\eta}.$$

Полезная работа расходуется на подъем груза (работа силы веса), то есть $A_{ПОЛ.} = mghn$. Тогда

$$N = \frac{mghn}{\eta t} = \frac{2000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot 20}{0{,}8 \cdot 60} = 8175 \text{ Дж/с} = 8{,}175 \text{ кДж/с} = 8{,}175 \text{ кВт}.$$

3.17. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кинетическая энергия – *скалярная мера механического движения* (в отличие от количества движения, которая является векторной мерой механического движения). Единица измерения кинетической энергии джоуль (Дж).

Кинетическая энергия материальной точки – *скалярная положительная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости*, то есть $T = \dfrac{mV^2}{2}$.

Кинетическая энергия механической системы – *арифметическая сумма кинетических энергий всех материальных тел (точек) этой системы*, то есть

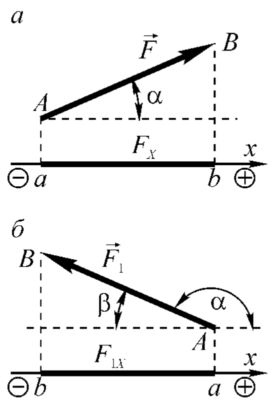
$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \ldots \frac{m_n V_n^2}{2} = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы, которая состоит из n связанных между собой тел (точек), равна арифметической сумме кинетических энергий всех тел этой системы, то есть

1.2. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ, ПЛОСКОСТЬ И КООРДИНАТНЫЕ ОСИ

1.2.1. Проекция вектора на координатную ось.

Координатная ось – прямая линия, которая имеет определенное направление.



Чтобы спроецировать вектор $\vec{F}$ на координатную ось x (см. рис.) необходимо из точек A и B, которые обозначают начало и конец вектора, опустить перпендикуляры на эту ось, чтобы они пересекали ее в точках a и b (эти точки называются проекциями точек A и B на ось x). Проекция вектора на ось представляет собой алгебраическую скалярную величину (не вектор!, но ее удобно изображать в виде вектора). Полученный отрезок ab является проекцией вектора $\vec{F}$ на ось x. Проекцию вектора на ось принято обозначать той же буквой, как и вектор, указывая индексом наименование оси (проекция вектора $\vec{F}$ на ось x обычно обозначается как F_X).

Знак полученной проекции устанавливается в зависимости от взаимных направлений «отражения» вектора $\vec{F}$ на ось x и самой оси x: если их направления совпадают (рис. *а*), то проекция полагается положительной, в противном случае проекция будет отрицательной (рис. *б*).

Зависимость между модулем вектора и его проекцией определяется следующими выражениями:

– для рис. *а*: $FX = |\vec{F}| \cos \alpha$;

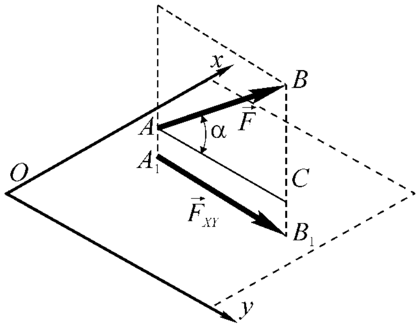
– для рис. *б*: $F_{1X} = |\vec{F}_1| \cos \alpha = -|\vec{F}_1| \cos \beta$.

Эти равенства определяют не только численное значение проекции, но и ее знак. В первом случае (рис. *а*) угол α – острый, следовательно, его косинус положительный и проекция F_X вектора $\vec{F}$ на ось x положительная. Во втором случае угол α между вектором и положительным направлением оси будет тупым, а его косинус отрицательным и, следовательно, проекция F_{1X} вектора $\vec{F}_1$ на ось x отрицательная.

Таким образом, проекция вектора на ось равняется произведению модуля вектора на косинус угла между этим вектором и положительным направлением оси.

Практически при определении проекции вектора на ось модуль вектора, который проецируется, умножается на косинус острого угла между вектором и осью проекции, а знак проекции устанавливается в соответствии со схемой (рисунком, чертежом).

В частном случае, если вектор $\vec{F}$ параллелен оси x, то $F_X = |\vec{F}|$, если перпендикулярен оси x, то $F_X = 0$.

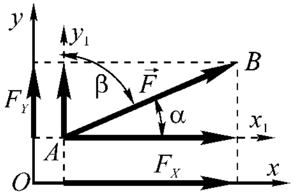


Проекция вектора на плоскость. Для проецирования вектора $\vec F$ на плоскость Oxy (см. рис.) опустим из начала A и конца B вектора $\vec F$ перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость. Точки A_1 и B_1 называются проекциями точек A и B на плоскость Oxy. Полученный вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ является проекцией вектора $\vec F$ на плоскость Oxy. Проекция вектора на плоскость является векторной величиной.

Принято обозначать проекцию вектора на плоскость так же, как и вектор с указанием в индексе наименования плоскости. В данном случае проекцию необходимо обозначить как $\vec F_{XY}$.

Модуль проекции вектора на плоскость определяется произведением модуля заданного вектора на косинус острого угла между линией действия вектора и плоскостью: $F_{XY} = |\vec F_{XY}| = |\vec F|\cos\alpha$, где α – угол между вектором $\vec F$ и прямой AC, которая параллельна плоскости Oxy.

1.2.2. Проекция вектора на координатные оси.



Для проецирования вектора $\vec F$ на прямоугольную систему осей Oxy (см. рис.) необходимо через точку A начала вектора провести вспомогательные оси Ax_1 и Ay_1, параллельные заданным координатным осям. Затем на новых осях строится прямоугольник, для которого заданный вектор $\vec F$ является диагональю.

Стороны прямоугольника, взятые с соответствующими знаками, являются проекциями вектора $\vec F$ на оси Ax_1 и Ay_1. «Переместив» эти проекции с вспомогательных осей на заданные оси Ox и Oy так, как это показано на рисунке, получим проекции вектора $\vec F$ на прямоугольную систему осей Oxy. Модули этих проекций вычисляются по формулам:

$$F_X = |\vec F_X| = |\vec F|\cos\alpha = F\cos\alpha = |\vec F|\sin\beta = F\sin\beta\ ;$$

$$F_Y = |\vec F_Y| = |\vec F|\cos\beta = F\cos\beta = |\vec F|\sin\alpha = F\sin\alpha\ .$$

Знаки проекций на координатные оси x и y определяются так же, как и при проецировании вектора на одну ось (см. выше).

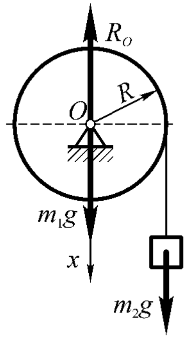
Модуль вектора, который спроецирован на координатные оси, можно определить по его проекциям по следующей формуле:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}\ .$$

Косинус угла между вектором и положительным направлением оси называется направляющим косинусом. Он равняется отношению соответствующей проекции вектора к модулю вектора, то есть

подвижной оси на конечном перемещении φ: $A^e = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_Z^e d\varphi$; если $M_Z^e d\varphi = const$, то $A^e = M_Z^e(\varphi_2 - \varphi_1)$; $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{ПОВ} = 2\pi n$ (здесь φ_2 и φ_1 – соответственно конечный и первоначальный углы поворота; n – число оборотов тела вокруг оси).

Пример. С помощью лебедки поднимается груз массой 200 кг (см. рис.). Определить работу, которую выполнит приложенная к барабану сила веса груза, а также работу силы веса груза, если барабан повернулся вокруг оси 10 раз, а его радиус R = 0,4 м.



Решение. Изобразим схему и обозначим силу веса груза $\vec F = m\vec g$. Работа приложенной к барабану подъемной силы:

$$A_{(\vec F_{БАР})} = M_{Z(\vec F)}\Delta\varphi = mgR(2\pi n) = 200\cdot 9{,}81\cdot 0{,}4\cdot 2\pi\cdot 10 = 49310$$

Дж. Здесь Δφ – угол поворота барабана, $\Delta\varphi = 2\pi n$.

Работа, которую выполнит сила веса груза:

$$A_{(\vec F_{ГРУЗ})} = -F\Delta h = -mg(2\pi nR) = -200\cdot 9{,}81\cdot(2\pi\cdot 10\cdot 0{,}4) = -49310$$

Н·м,

где Δh – высота подъема груза, $\Delta h = 2\pi nr$.

3.16. МОЩНОСТЬ

Мощность – *скалярная величина, которая характеризует работу, выполненную в единицу времени.* Если работа A выполняется равномерно на протяжении времени $t = t_2 - t_1$, то мощность $N = \dfrac{A}{t}$.

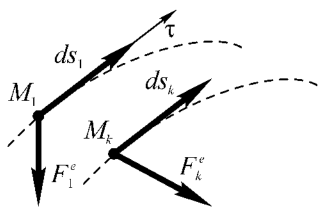
Единица измерения мощности в системе СИ – ватт (1 Вт = 1 Дж/с), в системе МкГС – кг·м/с. Мощность также можно измерить в лошадиных силах: 1 л.с. ≈ 736 Вт ≈ 75 кг·м/с.

В общем случае мощность силы можно определить как отношение элементарной работы силы dA к элементарному промежутку времени dt, за который выполняется эта работа. Это отношение представляет собой производную от работы по времени, то есть

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F ds\cos(\widehat{\vec F, d\vec s})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(F s\cos(\widehat{\vec F, d\vec s})\right) = FV\cos(\widehat{\vec F, \vec V})\,.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси $N = \dfrac{M_Z^e d\varphi}{dt} = M_Z^e\omega = \sum M_Z(\vec F_k^e)\omega$, где ω – угловая скорость вращения тела.

Коэффициент полезного действия (КПД) η – отношение значения выполненной полезной работы $A_{ПОЛ}$ к значению всей израсходованной (суммарной)



Элементарная работа k-й внешней силы при поступательном движении тела (см. рис.):

$dA_k^e = \vec{F}_k^e d\vec{s}_k = F_k^e ds_k \cos(\widehat{\vec{F}_k^e, d\vec{s}_k})$ (для k-й силы).

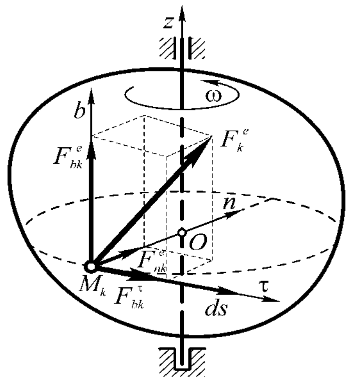
Элементарная работа всех внешних сил при поступательном движении тела:

$$dA^e = \sum dA_k^e = \sum \vec{F}_k^e d\vec{s}_k = \sum F_k^e ds_k \cos(\widehat{\vec{F}_k^e, d\vec{s}_k}).$$

Так как при поступательном движении $d\vec{s}_1 = d\vec{s}_2 = ... = d\vec{s}_k = d\vec{s}$, то

$dA^e = \sum F_k^e \cos(\widehat{\vec{F}_k, d\vec{s}_k})ds = R_\tau^e ds$ (здесь $R_\tau^e ds = \sum F_k^e \cos(\widehat{\vec{F}_k, d\vec{s}_k})ds$ – проекция главного вектора внешних сил на направление перемещения).

Работа равнодействующей всех внешних сил на конечном перемещении *s*: $A^e = \int\limits_0^s R_\tau^e ds$.



Элементарная работа *k*-й внешней силы при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси (см. рис.):

$$dA_k^e = \vec{F}_k^e ds_k = \left(F_{k(\tau)}^e + F_{k(n)}^e + F_{k(b)}^e\right)d\vec{s},$$

где $F_{k(\tau)}^e$, $F_{k(n)}^e$ и $F_{k(b)}^e$ – проекции силы $\vec{F}_k^e$ на естественные оси τnb.

Так как линии проекций вектора $\vec{F}_k^e$ на оси b и n перпендикулярны направлению элементарного перемещения $d\vec{s}$, то работа этих сил на перемещении $d\vec{s}_k$ точки M_k приложения этой силы равна нулю.

Тогда элементарная работа *k*-й внешней силы при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси будет вычисляться лишь с учетом составляющей силы F_τ по формуле:

$$dA_k^e = \vec{F}_k^e d\vec{s}_k = F_{k(\tau)}^e ds = F_{k(\tau)}^e r_k d\varphi = M_Z(\vec{F}_{k(\tau)}^e)d\varphi = M_Z(\vec{F}_k^e)d\varphi,$$

где $M_Z(\vec{F}_k^e)$ – момент *k*-й силы относительно оси вращения; $d\varphi$ – элементарный угол поворота тела вокруг оси *z*.

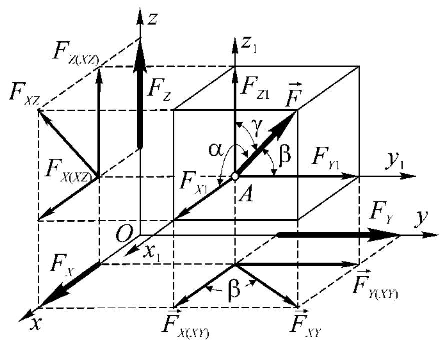
Элементарная работа всех внешних сил при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси *равен произведению главного момента внешних сил относительно оси на элементарный угол поворота* $d\varphi$ *тела вокруг оси*, то есть

$$dA^e = \sum dA_k^e = \sum M_Z(\vec{F}_k^e)d\varphi = M_Z^e d\varphi,$$

где M_Z^e – главный момент внешних сил относительно оси вращения.

Работа всех внешних сил при вращательном движении тела вокруг не-

$$\cos(\widehat{x;R}) = \frac{R_X}{R}; \qquad \cos(\widehat{y;R}) = \frac{R_Y}{R}.$$



Проецирование вектора силы на прямоугольные пространственные декартовы оси *Oxyz* выполняется аналогично проецированию на две координатных оси.

Для этого из начала вектора $\vec{F}$, который необходимо спроецировать на оси *Oxyz*, проводим вспомогательные оси Ax_1, Ay_1 и Az_1, которые параллельны заданным координатным осям, и строим на них прямоугольный параллелепипед, диагональю которого является вектор $\vec{F}$.

Ребра этого параллелепипеда, которые выходят из вершины *A*, представляют собой проекции вектора $\vec{F}$ на оси Ax_1, Ay_1 и Az_1. «Переместив» эти проекции с вспомогательных осей на заданные оси *Ox*, *Oy* и *Oz* так, как это показано на рисунке, получим проекции вектора $\vec{F}$ на прямоугольную систему осей *Oxyz*. Модули этих проекций вычисляются по формулам:

$F_X = |\vec{F}_X| = |\vec{F}|\cos\alpha$;

$F_Y = |\vec{F}_Y| = |\vec{F}|\cos\beta$;

$F_Z = |\vec{F}_Z| = |\vec{F}|\cos\gamma$.

Знаки проекций определяются так же, как при проецировании вектора на одну ось (см. выше).

Модуль вектора, который спроецирован на координатные оси, можно определить по его проекциям по следующей формуле:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2}.$$

Косинус угла между вектором и положительным направлением оси называется направляющим косинусом. Он равняется отношению соответствующей проекции вектора к модулю вектора, то есть

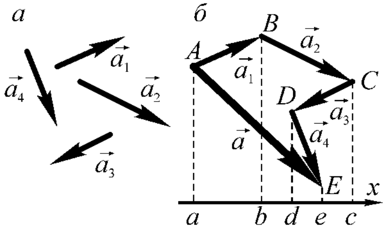
$$\cos(\alpha) = \frac{R_X}{R}; \qquad \cos(\beta) = \frac{R_Y}{R}; \qquad \cos(\gamma) = \frac{R_Z}{R};$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для определения проекций достаточно задать только два угла, а третий можно определить из последнего равенства (или из схемы или чертежа).

1.2.3. Проекция векторной суммы на ось.

Теорема. *Проекция векторной* (или геометрической) *суммы векторов на данную ось равняется алгебраической сумме проекций составных векторов на ту же ось.*



Для доказательства этой теоремы рассмотрим векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ (см. рис. *а*). Геометрическая сумма их равняется

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 .$$

Построим многоугольник векторов *ABCDE* (см. рис. *б*) и спроецируем все векторы на ось *x*.

Для этого из вершин многоугольника опустим перпендикуляры *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd* и *Ee* на ось *x*. В результате получаем проекции векторов:

$ab = a_{1X}$; $be = a_{2X}$; $-cd = a_{3X}$; $de = a_{4X}$; $ae = a_X$.

Из рисунка видно, что $ae = ab + bc - cd + de$, итак,

$a_X = a_{1X} + a_{2X} - a_{3X} + a_{4X}$.

1.2.4. Скалярное произведение двух векторов

Скалярное произведение двух векторов – произведение модулей этих векторов, умноженное на косинус угла между ними, то есть

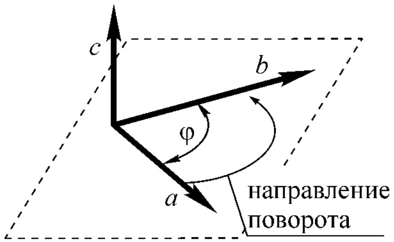
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cdot \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) .$$

Скалярное произведение двух векторов равняется нулю, если эти векторы взаимно перпендикулярные.

От изменения мест сомножителей скалярное произведение не меняется, то есть

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} .$$

1.2.5. Векторное произведение двух векторов



Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *– такой третий вектор* $\vec{c}$, *модуль которого равняется произведению модулей векторов, которые перемножаются, на синус угла между ними*, то есть $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направлен так, что с его конца направление поворота первого сомножителя ко второму сомножителю на наименьший угол видно против хода часовой стрелки (правило правого винта, см. рис.).

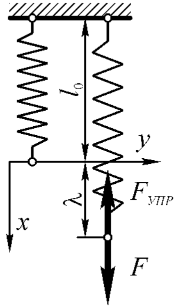
Модуль произведения двух векторов:

$$|\vec{c}| = c = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) .$$

При изменении мест сомножителей векторное произведение меняет знак, то есть

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} .$$

Векторное произведение отличных от нуля векторов равняется нулю только



Работа силы упругости. Если к концу пружины приложить силу $\vec{F}$ (см. рис.), то она деформируется на величину λ. При этом появится реакция пружины – сила упругости $\vec{F}_{УПР} = -\vec{F}$. Так как значение $\vec{F}_{УПР}$ зависит от деформации λ, то

$$A_{УПР} = \int_0^\lambda F_X\,dx = \int_0^\lambda -cx\,dx = -c\int_0^\lambda x\,dx = \frac{-c\lambda^2}{2} ,$$

где c – коэффициент жесткости, Н/м.

Если пружина деформируется из некоторого начального состояния, который характеризуется деформацией λ_1, к какому-то другому состоянию, который характеризуется деформацией λ_2, то работа силы упругости вычисляется по формуле $A_{УПР} = \frac{-c}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$.

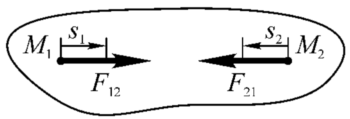
Прим. Если сила упругости $\vec{F}_{УПР}$ выполняет работу, например, перемещает груз, то работа силы упругости будет положительной, то есть $A_{УПР} = \frac{c\lambda^2}{2}$, и наоборот.

Работа силы трения (в случае, когда сила трения постоянная) *равна произведению значения силы трения на перемещение точки приложения этой силы, взятому с отрицательным знаком*, то есть $A_{ТР} = -F_{ТР}\,s$.

Так как силы трения всегда препятствуют движению (под их действием скорость уменьшается), то работа сил трения всегда отрицательна.

В случае, когда сила трения меняется, то ее работа вычисляется так, как вычисляется работа переменной силы.

Работа пары сил (или момента) *равна произведению модуля значения пары сил на угловое перемещение*. Знак работы пары сил будет положительным, если пара способствует движения тела и наоборот.



Работа внутренних сил в твердом теле. Для двух точек M_1 и M_2 твердого тела, к которым приложены внутренние силы действия $\vec{F}_{12}^i$ и противодействия $\vec{F}_{21}^i$ (см. рис.) работа внутренних сил равна нулю.

Действительно, $A^i = F_{12}^i s_1 + F_{21}^i s_2 = 0$ так как $\vec{F}_{21}^i = -\vec{F}_{12}^i$, а также $s_1 = s_2 = s$, то $A^i = F_{12}^i s + (-F_{12}^i)s = s(F_{12}^i - F_{12}^i) = 0$.

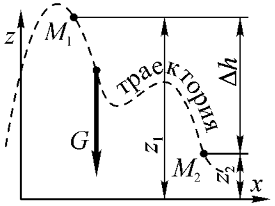
Элементарная работа всех внутренних сил в твердом теле равна нулю, то есть $dA^i = \sum dA_k^i = 0$ (это вытекает из предыдущего соображения).

Решение. $A = F_\tau s = Fs\cos 30° = 20 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 = 8{,}66$ Дж.

Пример. Вычислить работу силы, если ее значение меняется по закону $F = 3s^2$, Н, угол между силой и направлением движения $\alpha = 45°$, перемещение осуществляется из положения, когда $s = 3$ м, до положения, когда $s = 5$ м.

Решение. $A_{(12)} = \int\limits_{S_1}^{S_2} F_\tau ds = \int\limits_{S_1}^{S_2} F ds \cos(\vec{F}, \widehat{d\vec{s}}) = \int\limits_{3}^{5} (3s^2) ds \cos 45° = 3\cos 45° \int\limits_{3}^{5} s^2 ds =$

$$= 3\cos 45° \left.\frac{s^3}{3}\right|_3^5 = \cos 45° \cdot \left.s^3\right|_3^5 = \cos 45°(5^3 - 3^3) = 0{,}707(125 - 27) = 69{,}3 \text{ Дж}.$$



Работа силы веса. *Работа силы веса при перемещении тела весом G на высоту Δh равна произведению весы G на высоту перемещения Δh, взятую со знаком «+» или «–»*, то есть

$A_{ВЕСА} = \pm g\Delta h$.

Определим правило знаков для работы силы веса.

Проекция силы веса G тела на координатные оси:

$F_X = F_Y = 0$; $F_Z = -G = -mg$.

Тогда в проекциях на координатные оси робота силы веса $G = mg$ при перемещении тела с высоты z_1 до высоты z_2 будет:

$$A_{(Z_1 Z_2)} = \int\limits_{Z_1}^{Z_2} F_Z dz = -mg(z_2 - z_1) = -mg(-\Delta h) = mg\Delta h,$$

где Δh – перемещение точки приложения силы по вертикали (перепад высот).

При перемещении точки приложения силы веса вверх $A_{(Z_1 Z_2)} = -mgh$.

Итак, *работа силы веса положительная, если тело переместилось вниз и отрицательная, если тело переместилось вверх*, то есть $A_{ВЕСА} = \pm mgh$.

Работа силы веса не зависит от формы траектории, а зависит лишь от значения перепада высот положения тела в начале движения и в конце. При движении по замкнутой траектории робота равна нулю потому, что Δh=0.

Пример. Механический молот массой $m = 2000$ кг при работе движется с высоты 1 м и, ударив по заготовке, деформирует ее на 10 мм. Какую работу выполняет молот при падении вниз, при деформации заготовки, при подъеме молота на рабочую высоту?

Решение. Работа силы веса при падении молота

$A_1 = mg\Delta h = 2000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 19620$ Дж = 19,62 кДж.

Работа силы веса молота при деформации заготовки

$A_2 = mgh = 2000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}01 = 196{,}2$ Дж.

Работа подъема молота на рабочую высоту

$A = -mg\Delta h = -2000 \cdot 9{,}81 \cdot (1 + 0{,}01) = -19816$ Дж = –19,816 кДж.

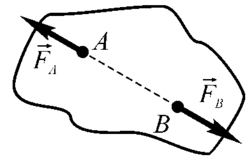
тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно параллельные (при этом $\sin(\vec{a}, \widehat{\vec{b}}) = 0$).

Проверь свои знания!

1. Как проецируются векторы на ось, плоскость, треугольные декартовы оси?
2. Что представляет собой проекция векторов на ось, плоскость, треугольные декартовы оси?
3. Что представляет собой произведение векторов?

1.3. АКСИОМЫ СТАТИКИ

При обобщении опыта изучения физических законов природы, Галилей и Ньютон сформулировали основные законы механики, которые могут рассматриваться как аксиомы механики, так как имеют в своей основе экспериментальные факты.



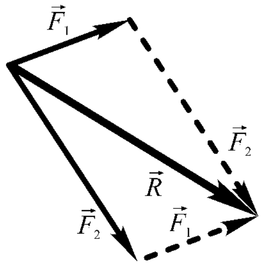
$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B;$$

$$|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| \Leftrightarrow F_A = F_B$$

1.3.1. Аксиома о равновесии двух сил.

Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются (эквивалентны нулю) *только тогда, когда они одинаковые по величине, направлены в противоположные стороны и лежат на одной прямой* (см. рис.).

Эта аксиома справедливая только для абсолютно твердого тела. Она определяет простейшую уравновешенную систему сил, так как опыт показывает, что свободное тело, на которое действует только одна сила, в равновесии находиться не может.



1.3.2. Аксиома параллелограмма сил.

Действие на точку твердого тела двух сил одинаково действию одной равнодействующей силы $\vec{R}$, которая равняется их геометрической сумме (строится $\vec{R}$ по правилу сложения векторов) *и приложенная в той же точке* (см. рис.), то есть $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$.

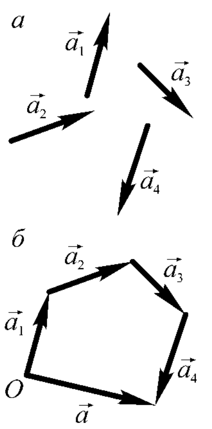
Справедливо и обратное: одну силу, приняв ее за равнодействующую, можно разложить на две составляющих силы, то есть $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Модуль равнодействующей вычисляется по следующей формуле (не путать ее с теоремой косинусов!):

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\vec{F}_1 \widehat{\ } \vec{F}_2)}.$$

Разложение вектора на составляющие является операцией, обратной сложению векторов. При этом составляющие желательно направлять вдоль координатных осей (это, как правило, упрощает решение задач).

<u>Следствие</u>. *Приложенные к твердому телу силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, складываются по правилу параллелограмма.*



Существует другой способ геометрического сложения векторов – построение векторного многоугольника. В качестве примера (см. рис. *а*), для сложения векторов $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_4$ из произвольной точки *O* (рис. *б*) построим вектор $\vec{a}_1$, из его конца построим вектор $\vec{a}_2$ и т.д. Затем соединим прямой линией начало первого вектора с концом последнего. Построенный вектор $\vec{a}$ и является геометрической (или векторной) суммой векторов $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_4$. Иначе вектор $\vec{a}$ называется замыкающим многоугольника, который построен на векторах $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_4$.

Геометрическая сумма нескольких векторов равняется нулю, если при построении многоугольника конец последнего вектора совпадает с началом первого. Тогда многоугольник векторов называется замкнутым.

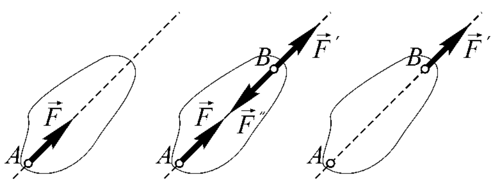
Прим. Нужно подчеркнуть, что векторы, которые изображают силы, можно переносить лишь вдоль своей линии действия (см. теорему ниже). Для построения многоугольника эти векторы переносятся как угодно. Поэтому вектор $\vec{a}$, который замыкает многоугольник, не является равнодействующей исходных сил и не может заменить их, а представляет собой лишь изображение векторной суммы (или изображение равнодействующей).

Прим. Если сложить все силы, которые действуют на тело (систему тел), то получим суммарный вектор $\vec{R}_0$, который называется *главный вектор*.

1.3.3. Аксиома о добавлении (отбрасывании) уравновешенной системы сил.

Действие данной системы сил на тело не изменится, если к ней добавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

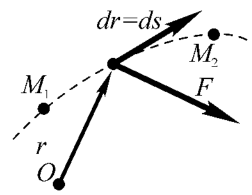
<u>Теорема</u> (которая вытекает из вышеуказанной аксиомы). *Действие силы на твердое тело не изменится, если перенести силу вдоль линии ее действия в любую другую точку тела.*



Для доказательства рассмотрим тело, в точке *A* которого приложена сила $\vec{F}$ (см. рис. *а*). Необходимо эту силу перенести в точку *B* вдоль линии ее действия. Для этого приложим в точке *B* две силы: $\vec{F}' = \vec{F}$ и $\vec{F}'' = -\vec{F}$ (см. рис. *б*). Вследствие этого действие силы $\vec{F}$ на тело не изменится.

Но силы $\vec{F}$ и $\vec{F}''$ согласно первой аксиоме образуют уравновешенную систему сил, которую можно отбросить. В результате на тело будет действовать только одна сила $\vec{F}'$, равная $\vec{F}$, но приложенная в точке *B* (см. рис. *в*).

<u>Следствие</u>. *Силу, действующую на точку твердого тела, можно перено-*



Элементарная работа силы – это *бесконечно малая скалярная величина, которая равна скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения точки приложения силы* (см. рис.): $dA = |\vec{F} d\vec{r}|$, где $d\vec{r}$ – увеличение радиус-вектора $\vec{r}$, который указывает на точку приложения силы (годографом $\vec{r}$ является траектория этой точки).

Элементарное перемещение $d\vec{s}$ точки по траектории совпадает с $d\vec{r}$ в силу их малости, тогда $dA = \vec{F} d\vec{s} = F ds \cos(\widehat{\vec{F}, d\vec{s}})$. Так как $F \cos(\widehat{\vec{F}, d\vec{s}})$ – проекция силы на направление перемещения точки (при криволинейной траектории – на касательную к траектории ось τ), то $dA = F_\tau ds$. То есть – работу выполняет только касательная составляющая силы (работа нормальной составляющей силы равна нулю). Из предпоследнего уравнения вытекает, что, если $(\widehat{\vec{F}, d\vec{s}}) < \dfrac{\pi}{2}$, то $dA > 0$, если $(\widehat{\vec{F}, d\vec{s}}) > \dfrac{\pi}{2}$, то $dA < 0$.

Знак работы имеет следующий смысл: работа положительная, когда составляющая F_τ направлена в сторону движения (сила ускоряет движение); работа отрицательная, когда составляющая F_τ направлена противоположно направлению движения (сила замедляет движение).

Аналитическое выражение элементарной работы. Представим векторы $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ через их проекции на оси декартовых координат:

$$\vec{F} = \vec{i} F_X + \vec{j} F_Y + \vec{k} F_Z ;$$

$$d\vec{r} = \vec{i}\, dx + \vec{j}\, dy + \vec{k}\, dz .$$

Тогда уравнение для вычисления элементарной работы примет вид

$$dA = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz .$$

Работа силы на конечном перемещении из точки M_1 до точки M_2 *равна интегральной сумме элементарных работ на этом перемещении*, то есть:

в общем виде: $A_{(M_1 M_2)} = \int\limits_{M_1}^{M_2} F ds \cos(\widehat{\vec{F}, d\vec{s}}) = \int\limits_{M_1}^{M_2} F_\tau ds$;

в проекциях на оси декартовых координат:

$$A_{(M_1 M_2)} = \int\limits_{M_1}^{M_2} (F_X dx + F_Y dy + F_Z dz) .$$

Если сила постоянная, а точка ее приложения движется прямолинейно, то

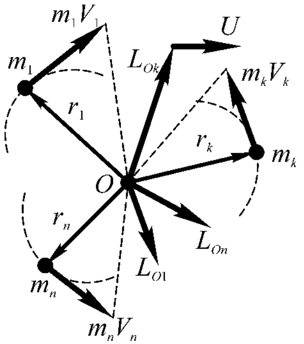
$$A_{(M_1 M_2)} = F s \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{s}}) = F_\tau s .$$

Пример. Вычислить работу силы, если ее значение $F = 20$ Н, угол между силой и направлением движения $\alpha = 30°$ (сила ускоряет движение), перемещение точки приложения силы $s = 0{,}5$ м.

которые действуют на систему, относительно этой оси, то есть, например, относительно оси z будет $\frac{dL_Z}{dt} = \sum M_Z(\vec{F}_k^e) = M_Z^e$.

Следствие: *если главный момент внешних сил относительно оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси не изменяется*, то есть, например, если относительно оси z будет $M_Z^e = \sum M_Z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $L_Z = const$.

3.14. ТЕОРЕМА РЕЗАЛЯ



Скорость конца вектора кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра равен главному моменту внешних сил, которые действуют на эту систему, относительно того же центра (см. рис.), то есть $\vec{U} = \vec{M}_O^e$.

Эта теорема используется в теории гироскопов – устройств, которые часто используются в навигационных приборах для определения сторон света там, где невозможно использовать магнитный компас.

Проверь свои знания!

1. Как определяются моменты количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси?
2. При каком расположении вектора количества движения материальной точки его момент относительно оси равен нулю?
3. Какая зависимость между моментом количества движения материальной точки и моментом силы, которая действует на нее, относительно некоторого центра и оси?
4. Что такое кинетический момент механической системы относительно центра и оси?
5. Как вычисляется кинетический момент твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси?
6. В чем состоит сущность теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси?
7. При каких условиях кинетический момент относительно центра или оси остается постоянным?
8. В чем состоит сущность теоремы Резаля?

3.15. РАБОТА СИЛЫ

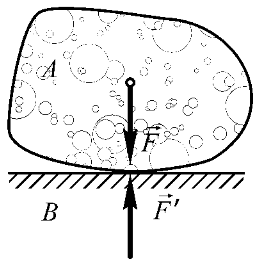
Работа силы – *скалярная мера действия силы*. В системе СИ единица измерения работы силы – джоуль (1 Дж = 1 Н·м).

сить вдоль линии действия этой силы (равновесие тела при этом не изменится), т.е. сила является скользящим вектором.

Этот вывод справедлив только для сил, которые действуют на абсолютно твердое тело. При технических расчетах им можно пользоваться лишь тогда, когда определяются условия равновесия той или другой конструкции и не рассматриваются внутренние усилия в ее частях (то есть не рассматриваются деформации тела под действием сил). Перенос силы вдоль линии ее действия в случае тела, которое может деформироваться, существенным образом меняет его состояние, а потому сила, приложенная к такому телу, является связанным вектором. Итак, при определении внутренних усилий (например, в теле, которое деформируется) переносить точку приложения силы вдоль линии действия нельзя.

1.3.4. Аксиома о равенстве сил действия и противодействия (третий закон Ньютона).

Действие одного тела на второе равно и противоположно действию второго тела на первое, то есть действие равно противодействию (иначе – силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены вдоль одной прямой линии во взаимно противоположные стороны). Пи этом силы взаимодействия (действия и противодействия) двух тел приложены к разным телам.



Например, если тело A находится в покое на гладкой горизонтальной поверхности B и давит на эту поверхность своим весом с силой $\vec{F}$ (см. рис.), то поверхность в свою очередь действует на тело с силой $\vec{F}'$. Сила $\vec{F}$ – сила действия, а сила $\vec{F}'$ – сила противодействия. Эти силы равны по модулю и направлены противоположно, то есть $\vec{F} = -\vec{F}'$, но приложены они к разным телам.

1.3.5. Аксиома затвердевания.

Равновесие тела, которое может деформироваться, не нарушится, если тело считать абсолютно твердым.

При изучении теоретической механики все тела, которые рассматриваются, полагаются абсолютно твердыми, то есть телами, которые не деформируются ни при которых условиях.

Аксиома о затвердевании даёт возможность в дальнейшем решать простейшие задачи статики деформирующихся тел (ременная передача, цепь, нить и т.п.), применяя к ним методы статики твердого тела.

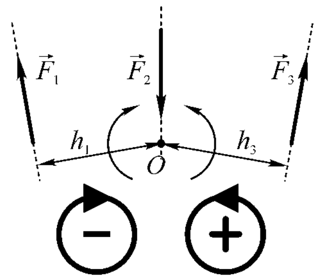
Проверь свои знания!

1. Сформулируйте аксиомы статики.
2. Что такое главный вектор? Как его определить?
3. Как складываются векторы и силы?

1.4. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОСИ

Под действием силы твердое тело может не только перемещаться поступательно, но и вращаться вокруг какой-нибудь точки или оси (например, если к книге, которая лежит на столе, приложить к ее корешку силу, параллельную столу, то книга может двигаться, а может и поворачиваться – это зависит от того, в каком месте корешка и как приложена сила). Вращательное действие силы характеризуется ее моментом.

Алгебраический момент силы относительно точки – *произведение модуля силы* $\vec{F}$ *на плечо h этой силы относительно избранной точки, взятое со знаком плюс или минус*, то есть $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (здесь записан алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки *O*).

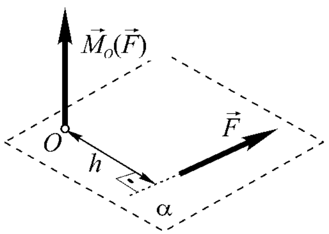


$M_O(F_1) = -F_1h_1$
$M_O(F_2) = 0$ (т.к. $h_2 = 0$)
$M_O(F_3) = +F_3h_3$

Плечо h силы $\vec{F}$ *относительно избранной точки – длина перпендикуляра, опущенного из точки, относительно которой определяется момент, на линию действия силы.*

Момент силы полагается положительным, если под действием этой силы тело хочет повернуться относительно избранной точки против хода часовой стрелки (если – по ходу часовой стрелки, то момент будет орицательным).

Момент силы равняется нулю, если линия действия этой силы проходит через точку, относительно которой определяется момент (т.к. плечо в этом случае равняется нулю).



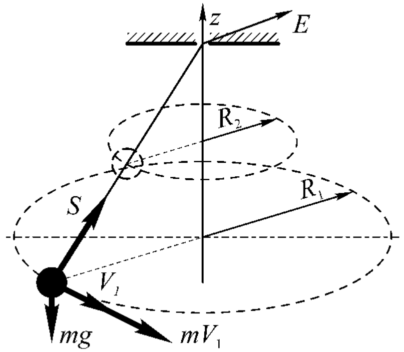
Векторный момент силы относительно точки – *вектор, приложенный в этой точке, равный по модулю алгебраическому моменту*, то есть $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{F}h$ (здесь записан векторный момент силы $\vec{F}$ относительно точки *O*). Векторный момент силы (или вектор-момент) перпендикулярен плоскости, проведенной через вектор силы и точку, и направленный таким образом, что с его конца видно, что сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки (см. рис.).

Сложение векторных моментов сил относительно точки. Несколько векторных моментов сил относительно точки можно заменить одним моментом, который реализуется за счет одной пары сил (или одной силой относительно какой-нибудь точки) и который равняется геометрической сумме векторных моментов исходных моментов, то есть $\vec{M}(\vec{F}_1) + \vec{M}(\vec{F}_2) + \vec{M}(\vec{F}_k) + \vec{M}(\vec{F}_n) = \sum \vec{M}(\vec{F}_k) = \vec{M}$ (при этом векторы-моменты $\vec{M}_k$ складываются как векторы).

Если сложить все векторные моменты сил относительно точки, которые действуют на тело (систему тел), которое рассматривается, то получим суммар-

$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z(\vec{F})$.

Следствие: *если момент равнодействующих сил, которые действуют на материальную точку, относительно оси равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно той же оси остается величиной постоянной*, то есть, например, относительно оси *z*, если $M_Z = 0$, то $L_Z = \text{const}$.



Пример. До одного конца нити привязан груз. Второй конец нити пропущен через отверстие в связи (см. рис.). Грузу сообщили вращательное движение вокруг вертикальной оси с линейной (касательной) скоростью V_1. Определить, с какой линейной скоростью будет двигаться груз вокруг вертикальной оси *z*, когда, вытягивая нить вверх в направлении *E*, уменьшить его расстояние к оси в 2 раза.

Решение. На груз действуют силы веса $m\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{S}$. Применим теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси *z*.

Сила $\vec{S}$ пересекает ось *z*, $m\vec{g}$ параллельна этой оси, поэтому $\sum M_Z(F_k) = 0 \Rightarrow L_Z = const.$

Тогда $M_Z(m\vec{V}) = const \Rightarrow mV_1R_1 = mV_2R_2 \Rightarrow V_2 = \frac{V_1R_1}{R_2}$. Так как $\frac{R_1}{R_2} = 2$, то $V_2 = 2V_1$.

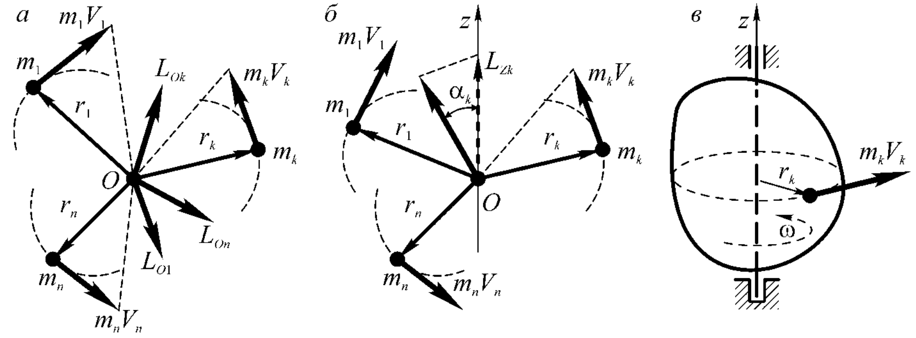
3.13.3. Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно центра.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, которые действуют на систему, относительно того же центра, то есть $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^e = \sum M_O(\vec{F}_k^e)$.

Следствие: *если главный момент внешних сил относительно центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра не изменяется* (закон сохранения кинетического момента), то есть если $\sum M_O(\vec{F}_k^e) = 0$, то $\vec{L}_O = const$.

3.13.4. Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно оси.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижной оси равна сумме моментов всех внешних сил, *ется, на угловую скорость* ω, то есть $L_Z = I_Z\omega$ (см. рис. *в*).

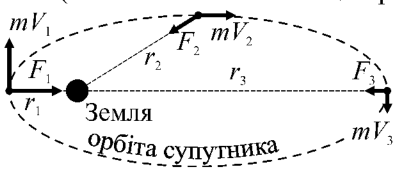


3.13. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА И ОСИ

3.13.1.Теорема о моменте количества движения материальной точки относительно центра

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра равна моменту силы, которая действует на точку, относительно того же центра, то есть $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})$.

Следствие: *если линия действия равнодействующей приложенных к точке сил все время проходит через неподвижный центр, то момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным* (такая сила называется центральной).



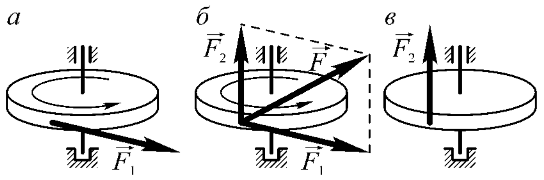
Пример. Рассмотрим движение спутника вокруг Земли (см. рис.). Здесь $\vec{F} = mg$ – сила притяжения, ее модуль зависит от расстояния между Землей и спутником, так как от расстояния зависит значение *g*.

Так как на спутник не действует сила, которая может придать ему ускорение, то $\vec{M}_O(\vec{F}) = 0$ и $\vec{L}_O = const$. Тогда $mV_1r_1 = mV_2r_2 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$, что свидетельствует об обратной зависимости между скоростями и расстояниями. Таким образом, чем ближе спутник находится к Земле, тем больше его скорость, и наоборот – чем дальше от Земли, тем меньше скорость.

3.13.2. Теорема о моменте количества движения материальной точки относительно оси.

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно оси равна моменту силы, которая действует на точку, относительно той же оси, то есть, например, относительно оси *z* будет

ный момент $\vec{M}_0$, который называется *главный момент* системы сил относительно точки.

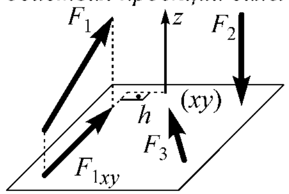


Как уже известно, под действием силы тело может вращаться. Например, маховик (см. рис. *а*) под действием силы $\vec{F}_1$ будет вращаться против хода часовой стрелки (при взгляде сверху).

Сила $\vec{F}$ также будет вращать маховик (рис. *б*), но «принимает участие» во вращении лишь ее составляющая $\vec{F}_1$. Составляющая $\vec{F}_2$ (рис. *б*) и сила $\vec{F}_2$ (рис. *в*) не могут вращать маховик, т.к. они параллельны оси пращения (иначе – на рис. *в* сила $\vec{F}_2$ не может вращать маховик потому, что ее проекция на плоскость, перпендикулярную оси вращения, равна нулю). Таким образом, сила может создавать момент относительно оси.

Момент силы относительно оси – *произведение проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо действия этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью, взятую со знаком плюс или минус.*

Плечо – кратчайшее расстояние между линией действия силы (или линией действия проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси вращения) и осью.



$M_Z(F_1) = -F_{1xy}h$
$M_Z(F_2) = 0$ (т.к. $F_{2xy} = 0$)
$M_Z(F_3) = 0$ (т.к. $h_3 = 0$)

Момент силы относительно оси будет положительным, если проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, пытается «повернуть» эту плоскость (или тело) вокруг положительного направления рассмотренной оси против хода часовой стрелки (см. рис.; смотреть необходимо со стороны конца оси, относительно которой определяется момент силы).

Таким образом, для определения момента силы относительно оси необходимо:

– спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси;

– определить плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью;

– определить знак момента;

– перемножить значение проекции силы и значения плеча действия силы.

Момент силы относительно оси равняется нулю если:

– сила параллельна оси (при этом проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равняется нулю; см. рис., сила $\vec{F}_2$);

– линия действия силы пересекает ось (при этом плечо равняется нулю; см. рис., сила $\vec{F}_3$).

Векторный момент силы можно проецировать на оси координат. Выполняется это так же, как и при проецировании векторов на оси координат.

Проверь свои знания!

1. Сформулируйте понятие алгебраического момента силы относительно точки. Как он определяется?
2. Как определить плечо силы относительно точки?
3. В каком случае момент силы считают положительным, а в каком – отрицательным?
4. Сформулируйте понятие векторного момента силы относительно точки. Как он определяется?
5. Как направлен векторный момент силы?
6. Как определить проекции векторного момента силы на оси координат?
7. Сформулируйте понятие момента силы относительно оси. Как он определяется?
8. В каких случаях момент силы относительно оси равняется нулю?

1.5. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

Свободное тело – *тело, перемещение которого в этот момент в пространстве ничем не ограничивается.*

Несвободное тело – *тело, перемещение которого ограничено связями* (или взаимодействием с другими телами).

Связь – *тело, которое ограничивает перемещение рассматриваемого тела.*

Реакция связи или просто реакция – *сила, с которой связь действует на тело* (или тело действует на связь). Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, по которому связь препятствует двигаться телу.

В статике рассматриваются условия равновесия свободного твердого тела. *Свободным* телом называется такое тело, которое может занимать любое положение в пространсиве, близкое с заданным положением. Если тело не может перемещаться в пространстве, то оно является связанным (несвободным). Геометрические условия, которые ограничивают свободу движения тела, называются *геометрическими связями,* наложенными на тело. При решении подавляющего большинства задач статики приходится иметь дело с несвободными телами. Возможность перевода тела из класса несвободных тел в класс свободных положен в принцип освобождения тел от связей.

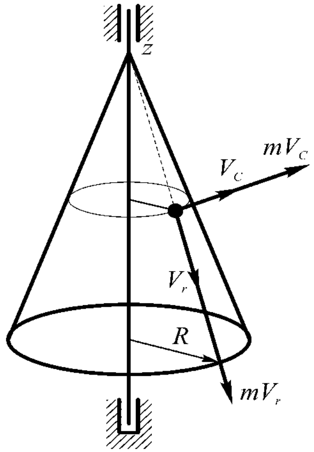
Принцип освобождения от связей: *всякое несвободное тело можно сделать свободным, удалив для этого связи, наложенные на тело, и заменив их действие на тело силами – реакциями связей* (иначе – связи, наложенные на систему материальных точек, можно заменить силами реакций, действие которых эквивалентны действию связей).

Активные (заданные, приложенные) **силы** – *силы, которые не зависят от связей*; они двигают или способны двигать твердое тело.

Пассивные силы – *силы, которые не могут двигать твердое тело, но ограничивают его перемещение или препятствуют его перемещению*; реакции связей являются пассивными силами (могут называться реактивными силами).

Правило знаков такое же, как при определении скалярного момента количества движения.

Момент количества движения материальной точки относительно оси и момент ее количества движения относительно центра связаны уравнением $L_Z = L_O \cos\alpha$, где α – угол между положительными направлениями векторов $\vec{L}_Z$ и $\vec{L}_O$.



Пример. Круговой конус вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. По образующей конуса движется из вершины конуса вниз материальная точка массой m со скоростью U. Определить момент количества движения точки относительно оси в момент, когда точка находится на середине длины образующей конуса. Радиус основания конуса равен R (см. рис.).

Решение. Точка принимает участие в сложном движении: в относительном – движение по образующей конуса, и в переносном – движение вместе с конусом, который вращается. Относительная скорость точки $V_r = U$, переносная скорость $V_e = \omega\dfrac{R}{2}$.

Момент количества движения точки относительно оси z:

$$L_Z = M_Z(mV_r) + M_Z(mV_e)\,.$$

Вектор $m\vec{V}_r$ пересекает ось z, поэтому его момент равен нулю, то есть $MZ(mvr) = 0$. Тогда

$$L_Z = M_Z(mV_e) = mV_e\frac{R}{2} = m\omega\frac{R}{2}\frac{R}{2} = \frac{m\omega R^2}{4}\,.$$

3.12. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА И ОСИ

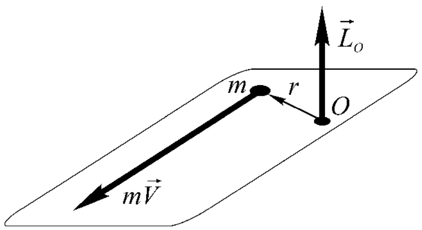
Кинетическим моментом относительно центра или главным моментом количеств движения механической системы *называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно того же центра*, то есть $\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{O_k}$ (см. рис. *а*).

Кинетическим моментом относительно оси или главным моментом количеств движения механической системы *называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно той же оси*, то есть $\vec{L}_Z = \sum \vec{L}_{Z_k}$ (см. рис. *б*).

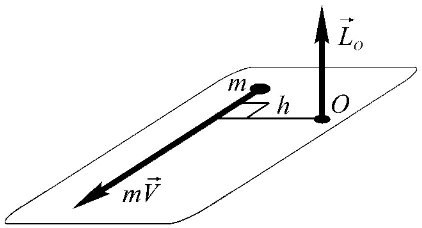
Кинетическим моментом твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω *называется алгебраическое произведение значений момента инерции тела относительно оси, которое рассматрива-*

3.10. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА

Количество движения можно определить относительно какого-то центра, для чего может быть использовано понятие векторного момента количества движения относительно центра.



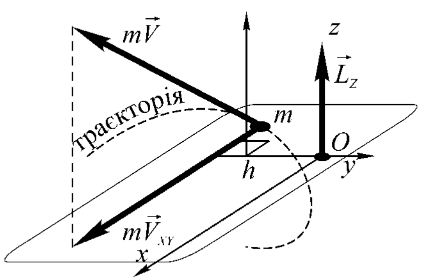
Векторный момент количества движения материальной точки относительно центра O – это вектор $\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{V}$, *приложенный в этом центре и направленный перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектор* $m\vec{V}$ *и центр O*, и имеет такое направление, что с его конца направление «вращения» вектора $m\vec{V}$ видно против хода часовой стрелки (см. рис.).



Алгебраический момент количества движения $m\vec{V}$ *относительно центра O – скалярная величина, взятая со знаком* (+) *или* (–) *и равная произведению модуля количества движения* $|m\vec{V}|$ *на расстояние h (перпендикуляр) от этого центра до линии, вдоль которой направлен вектор* $m\vec{V}$, то есть $L_O = |m\vec{V}|\,h$.

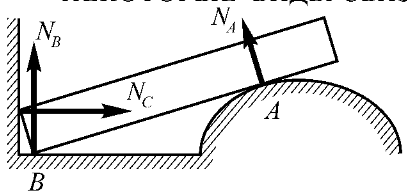
3.11. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Как количество движения можно определить относительно какого-то центра, так его можно определить и относительно какой-то оси, для чего может быть использовано понятие момента количества движения относительно оси.

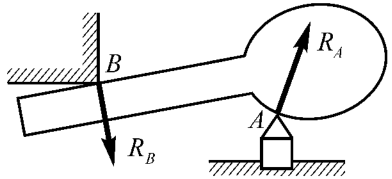


Моментом количества движения материальной точки относительно оси z называется скалярная величина L_Z, *взятая со знаком* (+) *или* (–) *и равная произведению модуля* $|m\vec{V}_{XY}|$ *проекции вектора* $m\vec{V}$ *количества движения на плоскость xy, которая перпендикулярна этой оси, на перпендикуляр h, опущенный из точки пересечения оси с плоскостью на линию, вдоль которой направлена указаная проекция* $m\vec{V}_{XY}$ (см. рис.), то есть $L_Z = \pm m V_{XY} h$.

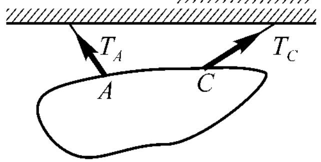
НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ СВЯЗЕЙ И ИХ РЕАКЦИИ



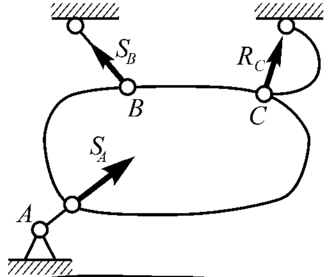
Идеально гладкая поверхность имеет одну реакцию $\vec{N}$, направленную перпендикулярно поверхности.



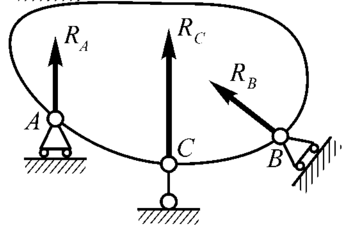
Точечная опора, а также опора «**на ребро**» имеет одну реакцию $\vec{R}$, направленную перпендикулярно к поверхности тела, которое опирается.



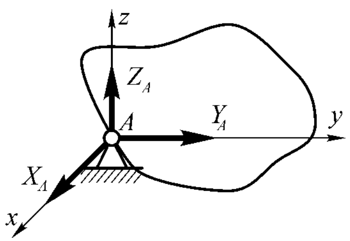
Гибкое тело (нить, трос, цепь) имеет одну реакцию $\vec{T}$, направленную по касательной к нити (тросу, цепи) в точке прикрепления в сторону второй точки прикрепления.



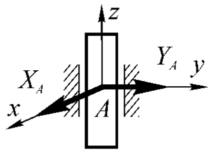
Невесомый стержень с шарнирами на концах имеет одну реакцию $\vec{R}$ в точке крепления, которая проходит через точки крепления. В качестве примера на рисунке приведены «прямые» стержни (прикрепленные в точках *A* и *B*) и «выгнутый» (в точке *C*).

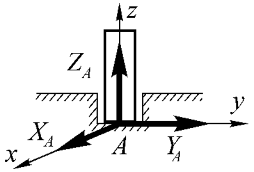


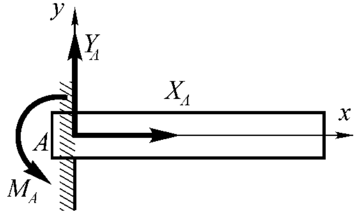
Шарнирно-подвижная опора (эквивалентная идеально гладкой поверхности) имеет одну реакцию $\vec{R}$, направленную перпендикулярно поверхности, на которую опирается опора.

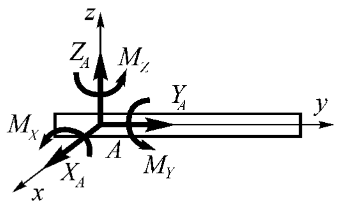


Шарнирно-неподвижная опора (сферический шарнир) имеет одну неизвестную по направлению реакцию, которая раскладывается на три (при рассматривании пространственных задач) или две (при рассматривании двухмерных задач) составляющие (обычно именуются буквами *X*, *Y*, *Z* – как координатные оси, вдоль которых направлены реакции, с индексом точки).









Подшипник (цилиндрический шарнир) (например, втулка, свободно надетая на стержень) имеет неизвестную по направлению реакцию, перпендикулярную оси z, которая раскладывается на две составляющих, которые проходят через его продольную ось в точке A и которые лежат в плоскости, перпендикулярная оси стержня.

Подпятник (упорный подшипник) имеет одну неизвестную по направлению реакцию, которая раскладывается на три (при рассматривании пространственных задач) или две (при рассматривании двухмерных задач) составляющие.

Заделка или защемление (балка, которая одним концом жестко замурована в стене) в случае двухмерной задачи реакция имеет одну силу неизвестного направления, которая раскладывается на две составляющих (обычно вдоль координатных осей), и момент величиной M_A (реактивный момент).

Для пространственной конструкции заделки (на рис. стена условно не показана) реакция имеет одну силу неизвестного направления, которая раскладывается на три составляющих $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ вдоль координатных осей, и момент, который раскладывается на три момента M_X, M_Y, M_Z относительно координатных осей.

1.6. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ

1 – определение условий равновесия системы сил, которые действуют на тело (точку, систему точек или тел);

2 – преобразование системы сил в эквивалентные системы; определение положения центра тяжести тела и системы тел.

Наиболее важная задача статики – условие равновесия неподвижного материального объекта, который находится под действием сил (частный случай первой задачи). Условие равновесия сил, которые действуют на твердое тело, сводится к свойствам систем векторов.

1.7. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ

Задачи статики могут быть двух типов:

– в которых полностью или частично известны действующие на тело силы и

Пример. Рассмотрим «отдачу» ружья. Пороховые газы, которые выбрасывают своим напором пулю в одну сторону, в то же время отбрасывают ружье в обратную сторону, порождая «отдачу». С какой скоростью движется ружье, которое «отдает», если его масса 4,5 кг, а пуля массой 9,6 г вылетает из ствола со скоростью 800 м/с (считать, что значение действующих сил, ускорений пули и ружья – величины постоянные)?

Решение. Давление пороховых газов на ружье равно давлению пороховых газов на пулю. При этом обе силы действуют одинаковое время. Поэтому, воспользовавшись уравнением $mV_2 - mV_1 = Ft$, можно сказать, что и для пули, и для ружья правые части этого уравнения одинаковы. Тогда можно записать

$$m_{(П)}V_{2(П)} - m_{(П)}V_{1(П)} = m_{(P)}V_{2(P)} - m_{(P)}V_{1(P)},$$

где m и $\vec{V}$ соответственно значение массы и скорости; индекс ($П$) и (P) – признак параметров соответственно для пули и ружья; индекс «1» и «2» – признак параметров соответственно начальных и конечных.

По условию задачи значения масс и начальные скорости пули и ружья, а также конечная скорость пули известны: $m_{(П)}$ = 9,6 г = 0,0096 кг; перед выстрелом $m_{(P)}$ = 4,5 + 0,0096 кг; $V_{1(П)} = V_{1(P)}$ = 0 м/с; после выстрела $V_{2(П)}$ = 800 м/с. Тогда

$$0{,}0096\cdot 800 - 0{,}0096\cdot 0 = (4{,}5+0{,}0096)V_{2(P)} - 4{,}5\cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}0096\cdot 800 = 4{,}5V_{2(P)} \Rightarrow V_{2(P)} = \frac{0{,}0096\cdot 800}{4{,}5+0{,}0096} = 1{,}7 \text{ м/с}.$$

Прим. Скорость ружья приблизительно в 470 раз меньше скорости пули, но, хотя количество движения для обеих тел одинаково, разрушительная энергия ружья при отдаче в 470 раз меньше, чем пули. Эта разрушительная энергия определяется кинетической энергией движущегося тела (будет рассмотрено ниже).

Проверь свои знания!

1. Как определяется количество движения материальной точки и механической системы?
2. Чему равно количество движения маховика, который вращается вокруг неподвижной оси, которая проходит через его центр тяжести?
3. Как направлен главный вектор количества движения механической системы?
4. Что такое импульс силы? Как он вычисляется за некоторый промежуток времени в случае действия силы, которая зависит от времени?
5. В каком виде и какими формулами описывается теорема об изменении количества движения материальной точки и механической системы?
6. При каких условиях количество движения или его проекция на какую-нибудь ось не изменяется?
7. Могут ли внутренние силы изменить количество движения системы?

сумме внешних сил, которые действуют на эту систему, то есть $\frac{d\vec{K}_{сист}}{dt} = \vec{R}^e$.

Это уравнения можно проецировать на оси декартовых координат.

Следствия с теоремы:

1. Если $\vec{R}^e = 0$, то $\vec{K}_{сист} = const$.

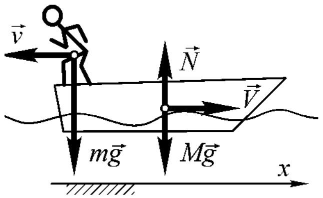
2. Если проекция главного вектора на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось есть величина постоянная. Например, если $R_X^e = 0$, то $K_{Xсист} = \text{const}$.

Теорема в интегральной (конечной) форме. *Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равен геометрической сумме импульсов всех внешних сил, которые действуют на точки механической системы, за тот же промежуток времени*, то есть $\vec{K}_{2сист} - \vec{K}_{1сист} = \sum \vec{S}^e_{kсис}$.

Следствия из теоремы:

1. *Если* $\vec{S}^e_{сист} = 0$, *то* $\vec{K}_{2сист} = \vec{K}_{1сист} = const$.

2. *Если, например,* $S^e_{Xсис} = 0$, *то* $K_{1Xсист} = K_{2Xсист} = \text{const}$.



Пример. Лодка массой $M = 150$ кг, на корме которой стоит человек массой $m = 75$ кг (см. рис.), движется со скоростью $V_0 = 3$ м/с. Человек выпрыгнул из лодки со скоростью $v = 5$ м/с против направления её движения. С какой скоростью после этого будет двигаться лодка (силой сопротивления движения лодки пренебречь)?

Решение. Внешними силами является вес лодки $M\vec{g}$, вес человека $m\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{N}$, которая выталкивает лодку (см. рис.) и удерживает её на поверхности воды. Силой сопротивления движения по условию задачи пренебрегаем. Установим неподвижную ось x в направлении движения лодки.

Все силы перпендикулярны оси x. Поэтому

$\sum F^e_{kX} = R^e_X = 0 \Rightarrow S^e_X = 0 \Rightarrow K_X = const$.

Принимаем, что система тел «лодка – человек» изолированная. Тогда

$K_{2X} = K_{1X}$,

где $K_{2X} = MV - mv$; $\quad K_{1X} = (M + m)V_0$.

Отсюда находим:

$$MV - mv = (M+m)V_0 \Rightarrow V = \frac{(M+m)V_0 + mv}{M} = \frac{(150+75)3 + 75\cdot 5}{150} = 7 \text{ м/с}.$$

Если человек прыгнул бы из лодки по ходу движения лодки, то

$K_{2X} = K_{1X}$,

где $K_{2X} = MV + mv$; $\quad K_{1X} = (M + m)V_0$.

Отсюда находим:

$$MV + mv = (M+m)V_0 \Rightarrow V = \frac{(M+m)V_0 - mv}{M} = \frac{(150+75)3 - 75\cdot 5}{150} = 2 \text{ м/с}.$$

нужно найти, в каком положении или при каких соотношениях между значениями действующих сил тело будет находиться в равновесии;

– в которых известно, что тело находится в равновесии и нужно найти значение действующих сил и реакций связей (или некоторые из них).

Все задачи статики решаются по методике, согласно которой необходимо:

1. Установить тело (точку, систему тел), равновесие которого необходимо рассмотреть, чтобы найти искомые величины. Если заданная сила действует на одно тело, а искомая – на другое тело, то нужно последовательно определить равновесие каждого тела отдельно, а иногда и равновесие промежуточных тел.

2. Начертить схему конструкции, соблюдая при этом геометрические пропорции или масштаб. Нанести на схему все активные силы. Освободить рассматриваемое тело (точку, систему тел) от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей и также нанести их на схему.

3. Определить тип системы сил и условия их равновесия. Установить рациональный путь решения задачи – графический или аналитический.

4. Применить соответствующие условия равновесия, найти значение искомых величин, проверить и проанализировать результаты.

Решая задачи статики аналитическим способом, необходимо рационально выбрать прямоугольную систему координат. За их начало удобно принимать точку пересечения наибольшего числа линий действия неизвестных сил, а их направление – параллельно или перпендикулярно наибольшему числу сил, желательно – неизвестных (например, если одну из осей направить перпендикулярно к одной из неизвестных сил, то проекция этой силы на ось будет равняться нулю, а сама сила исключится из соответствующих уравнений).

Рациональным порядком проецирования силы на оси координат можно считать следующий: установить знак проекции, а затем – ее значение (величину проецируемой силы умножить на косинус наименьшего угла, образованного вектором силы с осью координат).

В результате применения условий равновесия в задачах статики силы давления тела на связь заменяют на такие же по модулю, но противоположно направленные реакциям этих связей. При решении задач способом разложения силы на составляющие получают непосредственно силы давления на связи.

Если в задачах задаются линейные размеры частей конструкций, то при решении векторного (силового) треугольника удобнее пользоваться методом подобия треугольников. Если в условии задачи задаются углы, то целесообразнее применять известные из тригонометрии теоремы синусов или косинусов.

В результате решения задач может оказаться, что на схеме было принято направление какой-нибудь из реакций не в ту сторону, в которую она фактически действует. При графическом способе решения задачи это выявится при построении векторного (силового) многоугольника, а при аналитическом – величина этой реакции будет отрицательной (это означает, что действительное направление соответствующей реакции противоположно предварительно принятому и указанному на схеме).

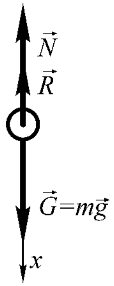
Проверь свои знания!

1. Что изучает статика?
2. Если при действия на тело расстояния между его точками уменьшаются, то можно это тело считать абсолютно твердым?
3. Какие величины называются скалярными?
4. Какие величины называются векторными?
5. Как изображается вектор? Как обозначается вектор?
6. Какие векторы являются свободными, скользящими, несвободными?
7. Если тела не сообщают друг другу ускорение, но при этом деформируются, то действует в этом случае какая-либо сила?
8. Можно ли определить силу, если задать только ее величину и точку приложения?
9. Какие векторы называются равными?
10. Какие векторы называются противоположными?
11. В каком случае две системы сил можно считать эквивалентными?
12. Будет ли уравновешенной система сил, приложенная к покоящемуся телу, если оно приходит в движение?
13. Что называется суммой двух векторов?
14. Какой порядок построения геометрической суммы нескольких векторов? Что называется геометрической суммой нескольких векторов?
15. Дайте определение равнодействующей силы и главного вектора.
16. В каком случае геометрическая сумма нескольких векторов равняется нулю?
17. Чему равняется сумма двух противоположно направленных векторов?
18. Что называется разностью двух векторов?
19. Что называется проекцией вектора на ось?
20. По какой формуле вычисляется проекция вектора на ось?
21. Если книга лежит на горизонтальной поверхности стола, то ее действие на стол характеризуется сосредоточенной или распределенной силой?
22. Можно ли считать давление книги, которая лежит на столе, равномерно распределенной нагрузкой?
23. Если распределенные силы меняются по линейному закону, то будет ли такая нагрузка равномерно распределенной?
24. Какой порядок решения задач статики?
25. Почему рационально начало координат совмещать с точкой пересечения линий действия наибольшего числа неизвестных сил?
26. Почему рационально координатные оси направлять перпендикулярно линиям действия наибольшего числа неизвестных сил?

1.8. ТЕОРЕМА О ТРЕХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛАХ.

Простейшей системой сил можно считать систему из двух сил. Следующая за сложностью система сил – это система из трех взаимно непараллельных сил, которые лежат в одной плоскости.

Теорема. *Если твердое тело под действием трех непараллельных сил, две из которых пересекаются, находится в равновесии, то линии их действия пересекаются в одной точке* (иначе: линии действия трех непараллельных взаимно



Решение. Применим теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме в проекции на ось x. Покажем координатную ось x (которую направим в сторону движения тела), силу веса (движущую) $\vec{G}=m\vec{g}$, архимедову силу (выталкивающую) $\vec{N}$ и силу сопротивления $\vec{R}$ (см. рис). Тогда (учтём, что $\vec{N}=0$):

$$\frac{dK_X}{dt}=\frac{d(mV_X)}{dt}=G-N-R=G-R=G-\alpha V.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим:

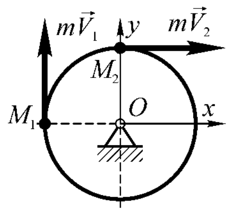
$$\int_0^V\frac{dV_X}{G-\alpha V}=\int_0^t\frac{dt}{m}\Rightarrow\frac{1}{-\alpha}\ln(G-\alpha V_X)\Big|_0^V=\frac{t}{m}\Rightarrow\ln\frac{G-\alpha V}{G}=-\frac{\alpha}{m}t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=\frac{G}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)=\frac{2\cdot 9{,}81}{0{,}5}\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{2}t}\right)=39{,}24\left(1-e^{-0{,}25t}\right).$$

Скорость, которую приобретет шар через время:

$t=t_1=0{,}5$ с: $\quad V=39{,}24\ (1-e^{-0{,}25\cdot 0{,}5})=4{,}61$ м/с;
$t=t_1=2$ с: $\quad V=39{,}24\ (1-e^{-0{,}25\cdot 2})=17{,}84$ м/с;
$t=t_1=10$ с: $\quad V=39{,}24\ (1-e^{-0{,}25\cdot 10})=36{,}02$ м/с;
$t=t_1=100$ с: $\quad V=39{,}24\ (1-e^{-0{,}25\cdot 100})=39{,}23$ м/с.

Прим. Как видим, скорость шара с временем асимптотично приближается к значению $V=39{,}24$ м/с и никогда не сможет превысить его.



Пример. Конец каната на барабане подъемной машины закреплен с помощью клинового устройства M массой $m=20$ кг (см. рис.). Устройство вместе с барабаном движется по окружности вокруг оси O с постоянной скоростью $V=10$ м/с. Определить импульс сил, которые действуют на устройство (устройство считать точкой) за промежуток времени, когда барабан повернется на четверть оборота.

Решение. Применим теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме: $m\vec{V}_2-m\vec{V}_1=\vec{S}$.

Найдем проекции импульса $\vec{S}$ на координатные оси Oxy:
$S_X=mv_{1X}+mv_{2X}=0+mv_2=mv_2$;
$S_Y=mv_{1Y}-mv_{2Y}=mv_1+0=mv_1$;

$$S=\sqrt{(mV_2)^2+(mV_1)^2}=\sqrt{20\cdot 10^2+20\cdot 10^2}=\sqrt{4000}=63{,}2\ \text{Н·с}.$$

3.9. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Теорема в дифференциальной форме. *Производная по времени от главного вектора количества движения механической системы равна геометрической*

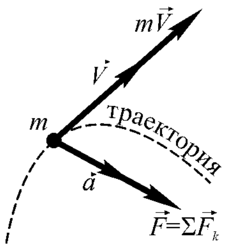
$$S_X = \int_0^5 2t\,dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^5 = 2\frac{5^2}{2} = 25 \ \text{Н·с};$$

$$S_Y = \int_0^5 4\,dt = 4t\Big|_0^5 = 4\cdot 5 = 20 \ \text{Н·с};$$

$$S_Z = \int_0^5 -6t^2\,dt = -6\frac{t^3}{3}\Big|_0^5 = -6\frac{5^3}{3} = -250 \ \text{Н·с};$$

$$S = \sqrt{25^2 + 20^2 + (-250)^2} = 252 \ \text{Н·с}.$$

3.8. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



Теорема в дифференциальной форме. *Производная по времени от количества движения материальной точки равна геометрической сумме сил, которые действуют на точку* (см. рис.), то есть

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}_k .$$

Теорема в интегральной (конечной) **форме**. *Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равен геометрической сумме импульсов сил, которые действуют на точку, за тот же промежуток времени*, то есть

$$m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \sum \vec{S}_k$$

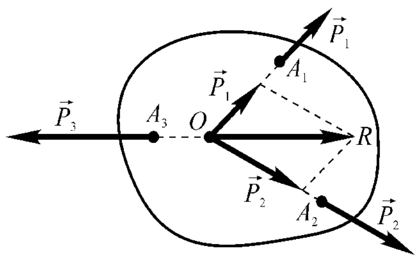
Два последних векторных равенства можно записать в проекциях на оси декартовых координат. При этом первое уравнение имеет смысл применять в тех случаях, когда на точку кроме постоянных сил действуют переменные силы, которые зависят от скорости точки, а второе – когда нужно косвенным путем определить импульс сил при неизвестных их значениях и времени действия, но если при этом начальная и конечная скорости движения точки известны.

В частных случаях, когда ускорение тела и значение действующих на тело сил постоянны (не меняются со временем), то теорему об изменении количества движения материальной точки можно записать в виде $m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \vec{F}t$. Если же сила зависит от времени, то теорему можно записать в виде $m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \int \vec{F}(t)dt$

Пример. Шар массой $m = 2$ кг падает вниз под действием силы тяжести в среде, сопротивление которой определяется силой $R = \alpha V$ [кг·м/с^2], где $\alpha = 0{,}5$. Какую скорость приобретет шар через время $t_1 = 0{,}5$ с, $t_2 = 2$ с, $t_3 = 10$ с, $t_4 = 100$ с, если движение началось без начальной скорости (архимедовой силой пренебречь)?

уравновешенных сил, лежащих в одной плоскости, пересекаются в одной точке).

Равновесие тела (точки или системы материальных тел или точек) – это такое ее состояние, когда оно не движется благодаря силам, которые на него действуют.



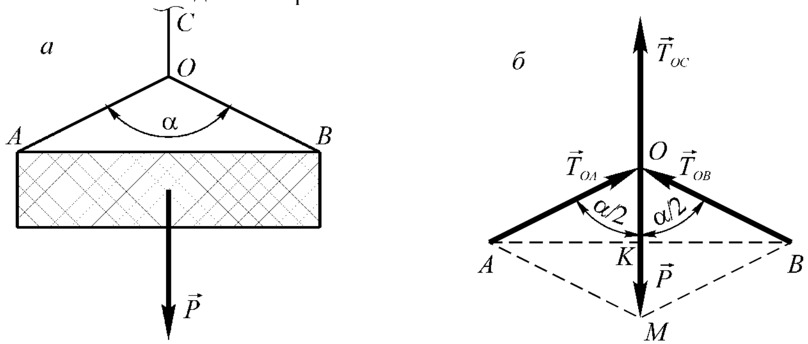
Для доказательства теоремы рассмотрим приложенные к твердому телу в точках A_1, A_2 и A_3 три непараллельных взаимно уравновешенные силы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, которые лежат в одной плоскости (см. рис.).

Перенесем силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ в точку O пересечения линий их действия и найдем равнодействующую $\vec{R}$. Эта равнодействующая будет приложена к телу в этой же точке O.

Сила $\vec{P}_3$, которая уравновешивает силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, равняется по модулю равнодействующей $\vec{R}$ и направлена вдоль линии ее действия в противоположную сторону.

Итак, силы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ являются взаимно уравновешенными, а линия действия силы $\vec{P}_3$ проходит через точку O, что и требовалось доказать.

Пример. Груз весом P поднимают с помощью прикрепленных к нему тросовых строп OA, OB одинаковой длины и грузового троса OC (см. рис. *а*). Определить натяжение каждого из тросов.



Решение. На основании принципа освобождения от связей заменим действие груза на стропы и трос их реакциями (см. рис. *б*). Вес $\vec{P}$ груза для удобства приложим в точке O. Из аксиомы о равенстве сил действия и противодействия вытекает, что реакция троса $\vec{T}_{OC} = -\vec{P}$.

Считаем, что натяжение строп обусловлено действием на них грузового троса OC. Поэтому реакции $\vec{T}_{AO}$ и $\vec{T}_{BO}$ направим от точки O вдоль строп. Очевидно, что $\vec{T}_{AO} + \vec{T}_{BO} = \vec{T}_{OC} = -\vec{P}$.

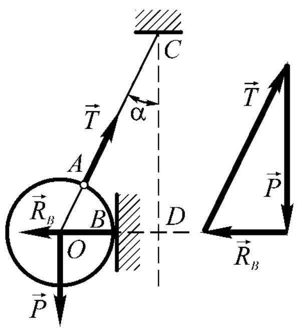
Для нахождения $\vec{T}_{AO}$ рассмотрим треугольник OAB: $|AO| = |BO|$, итак, треугольник равнобедренный, а фигура $AOBM$ – ромб. Тогда $|\vec{T}_{AO}| = |\vec{T}_{BO}|$ или $TAO = TBO$, а для треугольника AOK: $|AO| = \dfrac{|OK|}{\cos(\alpha/2)}$.

Для ромба $AOBM$: |OK| = |MK| = 0,5 |OM|; |AO| = |BO|.

Перейдя к длинам соответствующих векторов (или их скалярных величин) имеем:

$$T_{AO} = T_{BO} = \frac{0{,}5P}{\cos(\alpha/2)}.$$

Проанализируем полученную зависимость: усилие в стропах зависит прямопропорционально от веса P груза и обратнопропорционально – от косинуса половины угла между ними. Последнее позволяет сделать вывод о том, что наименьшее натяжение строп будет в случае, когда угол между ними будет равен нулю (длина строп при этом будет бесконечно большой), а более всего (стремящееся к бесконечности) – когда угол между стропами будет равняться 180°. Натяжение каждой из строп и грузового троса будут взаимно равными в случае, когда $\cos(\alpha/2) = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 120°$ (при строповке грузов для их подъема этот вывод обязательно учитывается).



а *б*

Пример. Однородный шар весом 120 Н касается в точке B к гладкой вертикальной стенке (см. рис.) и находится в равновесии веревкой AC длиной 0,8 м. Определить натяжение веревки и давление шара на стенку, если расстояние от точки O до вертикали CD равно 0,6 м.

Решение. Поскольку известная сила $\vec{P}$, которая приложена к шару, то рассмотрим равновесие шара. Связями для шара являются стенка и веревка AC. Поскольку стенка гладкая, то реакция $\vec{R}_B$ будет перпендикулярна к стенке; реакция веревки $\vec{T}$ направлена вдоль нее.

Поскольку силы $\vec{P}$, $\vec{R}_B$, и $\vec{T}$ удовлетворяют теореме о трех силах, то для равновесия шара необходимо и достаточно, чтобы силовой треугольник, построенный на этих силах, был замкнут.

Как видим из рис. *б*, силовой треугольник прямоугольный. Если угол между силами $\vec{P}$ и $\vec{T}$ обозначить через α, то $RB = P\,\mathrm{tg}\alpha$; $T = \dfrac{P}{\cos\alpha}$.

Из треугольника OCD имеем: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{OD}{CD} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 36{,}87°$. Тогда

$RB = 120 \cdot 0{,}75 = 90$ Н; $T = \dfrac{P}{\cos 36{,}87°} = 150$ Н.

$K = K_{ПОСТ} + K_{ВРАЩ}$;

$K_{ПОСТ} = MV_C$;

$K_{ВРАЩ} = 0$, так как при вращении тела вокруг центра масс сам центр масс покоится.

Тогда $K = MV_C$.

3.7. ИМПУЛЬС СИЛЫ

Импульс силы $\vec{S}$ – *векторная мера действия силы на протяжении некоторого времени.*

Единица измерения импульса силы – кг·м/с.

Элементарный импульс силы – *векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени dt*, то есть

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$$

Импульс $\vec{S}$ силы $\vec{F}$ за конечный промежуток времени $t = t_2 - t_1$ *равен интегральной сумме соответствующих элементарных импульсов*, то есть

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

В проекциях на оси декартовых координат последнее выражение записывается так:

$$S_X = \int_{t_1}^{t_2} F_X dt; \qquad S_Y = \int_{t_1}^{t_2} F_Y dt; \qquad S_Z = \int_{t_1}^{t_2} F_Z dt;$$

$$S = \sqrt{S_X^2 + S_Y^2 + S_Z^2}.$$

Если на точку действует несколько сил, то они заменяются равнодействующей $\vec{R}$, импульс которой $\vec{S}_R$ равен геометрической сумме импульсов всех сил, то есть $\vec{S}_R = \sum \vec{S}_k$.

Действие внешних сил, приложенных к механической системе на протяжении некоторого промежутка времени $t = t_2 - t_1$, характеризуется импульсом главного вектора $\vec{R}^e$ внешних сил, то есть $\vec{S}_R^e = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}^e dt$.

В проекциях на координатные оси последнее уравнение имеет вид:

$$S_{R_X}^e = \int_{t_1}^{t_2} R_X^e dt; \qquad S_{R_Y}^e = \int_{t_1}^{t_2} R_Y^e dt; \qquad S_{R_Z}^e = \int_{t_1}^{t_2} R_Z^e dt,$$

где $R_X^e = \sum F_{Xk}^e$; $R_Y^e = \sum F_{Yk}^e$; $R_Z^e = \sum F_{Zk}^e$; $S_R^e = \sqrt{S_{R_X}^2 + S_{R_Y}^2 + S_{R_Z}^2}$.

Пример. На материальную точку действует сила $\vec{F} = 2t\vec{i} + 4\vec{j} - 6t^2\vec{k}$. Определить импульс силы за время $t = 3$ с.

Решение. Проекции силы на оси координат: $F_X = 2t$; $F_Y = 4$; $F_Z = -6t^2$.

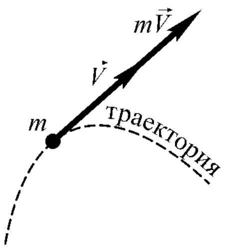
Проекции импульса силы на оси:

Проверь свои знания!

1. В чем состоит суть теоремы о движении центра масс механической системы?
2. При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно?
3. В каком случае проекция центра масс на которую-нибудь ось не будет перемещаться вдоль этой оси?
4. Могут ли внутренние силы двигать центр масс механической системы?

3.6. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Как показывают многочисленные опыты и теоретические исследования, механическое движение характеризуется двумя основными мерами – количеством движения и кинетической энергией.



Количество движения $\vec{K}$ *материальной точки – векторная мера ее движения, равная произведению массы точки на вектор ее скорости* (см. рис.), то есть $\vec{K} = m\vec{V}$.

Количество движения механической системы $\vec{K}_{СИСТ}$ *или главный вектор количества движения – геометрическая сумма количеств движения всех материальных точек системы*, то есть

$$\vec{K}_{СИСТ} = \sum m_k \vec{V}_k = \sum \vec{K}_k .$$

Единица измерения количества движения – кг·м/с.

Учитывая теорему о движении центра масс системы, можно записать следующее уравнение

$$\vec{K}_{СИСТ} = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \vec{r}_k\right) = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_C) = M\frac{d\vec{r}_C}{dt} = M\vec{V}_C ,$$

где $\vec{V}_C$ – скорость центра масс системы.

Модуль главного вектора количества движения системы определяется через его проекции на оси декартовых координат по формулам

$K_{СИСТ.X} = \sum K_{СИСТ.Xk}$;
$K_{СИСТ.Y} = \sum K_{СИСТ.Yk}$;
$K_{СИСТ.Z} = \sum K_{СИСТ.Zk}$;

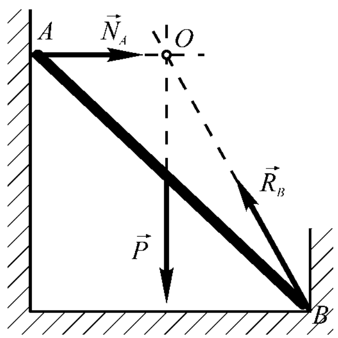
$$K_{СИСТ} = \sqrt{K^2_{СИСТ.X} + K^2_{СИСТ.Y} + K^2_{СИСТ.Z}} .$$

Пример. Определить количество движения тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, которая проходит через центр масс.

Решение. Так как центр масс не движется, то $v_C = 0$. Тогда $K = mv_C = 0$.

Пример. Определить количество движения тела, центр масс которого катится со скоростью V_C по плоскости (плоскопаралельное движение).

Решение. Если плоскопаралельное движение разложить на сумму двух движений – поступательное центра масс и вращательное относительно оси, которая проходит через центр масс, то будем иметь:



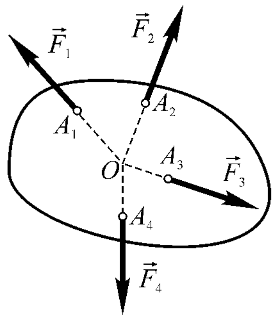
Пример. Однородный стержень AB весом P опирается одним концом на гладкую вертикальную стену, а другим – упирается в угол B (см. рис.). Нужно графически найти направление реакции в точке B при равновесии стержня.

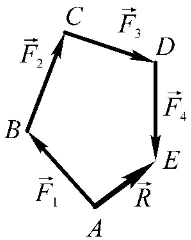
Решение. Реакция $\vec{N}_A$ в точке A перпендикулярна стенке (см. рис.), ее линия действия пересекает линию действия силы веса $\vec{P}$ в точке O. При равновесии третья сила $\vec{R}_B$ (реакция в точке B) также должна проходить через точку O. Ее модуль определяется из уравнения $\vec{R}_B = -(\vec{P} + \vec{N}_A)$.

1.9. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Системой сходящихся сил называют систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей. *Система сходящихся сил приводится к равнодействующей* $\vec{R}$, *которая равна геометрической сумме всех сил системы и проходит через точку пересечения линий действия этих сил*, то есть $\sum \vec{F}_k = \vec{R}$.





Графический способ нахождения равнодействующей основан на построении векторного многоугольника сил, который называется силовым многоугольником. Равнодействующая $\vec{R}$ в силовом многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней (см. рис). Если многоугольник построен в масштабе, то равнодействующую можно найти ее непосредственным измерением.

Для пространственной системы сходящихся сил многоугольник является пространственной фигурой, для плоской системы – плоской фигурой.

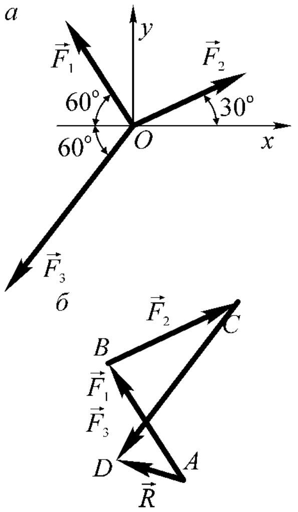
Прим. Для построения силового многоугольника необходимо «отрывать» силы от точек их приложения. Поэтому точнее было бы называть многоугольник векторным.

Равнодействующую произвольного числа сходящихся сил можно получить также последовательным построением параллелограммов сил. Аналитический способ нахождения равнодействующей основан на проецировании сил системы на координатные оси (начало координатных осей удобно прикрепить к точке пересечения линий действия сил). Далее определяются проекции равнодействующей $\vec{R}$ соответственно на оси $R_X = \sum x_k$, $R_Y = \sum y_k$ и $R_Z = \sum z_k$ (как суммы спроецированих на каждую из осей сил), а затем – модуль равнодействующей по формуле

$$R=\sqrt{R_X^2+R_Y^2+R_Z^2}\ .$$

Направление равнодействующей в системе координат определяется направляющими косинусами:

$$\cos(x\hat{;}R)=\frac{R_X}{R};\qquad \cos(y\hat{;}R)=\frac{R_Y}{R};\qquad \cos(z\hat{;}R)=\frac{R_Z}{R}.$$



Пример. В точке O приложены силы $\vec F_1 = 20$ Н, $\vec F_2 = 25$ Н, $\vec F_3 = 40$ Н (см. рис. *а*). Определить величину и направление равнодействующей.

Решение. Для графического решения необходимо в выбранном масштабе построить многоугольник сил. Для этого «копируем» вектор силы $\vec F_1$ своим началом в точку A (см. рис. *б*), затем «копию» силы $\vec F_2$ проводим из конца вектора $\vec F_1$, а «копию» силы $\vec F_3$ – из конца вектора $\vec F_2$. Из точки A проводим вектор $\vec R$, который и является равнодействующей.

Для аналитического решения задачи установим координатные оси Oxy и спроецируем на них все векторы сил (см. рис.; в вычислениях используем указанные острые углы, а знак проекции определим по рисунку):

$F_{1X} = -F_1 \cos 60° = -20 \cdot 0{,}5 = -10$ Н;
$F_{1Y} = +F_1 \sin 60° = 20 \cdot 0{,}866 = 17{,}32$ Н;
$F_{2X} = +F_2 \cos 30° = 25 \cdot 0{,}866 = 21{,}65$ Н;
$F_{2Y} = +F_2 \sin 30° = 25 \cdot 0{,}5 = 12{,}5$ Н;
$F_{3X} = -F_3 \cos 60° = -40 \cdot 0{,}5 = -20$ Н;
$F_{3Y} = -F_3 \sin 60° = -40 \cdot 0{,}866 = -34{,}64$ Н.

Определим значение равнодействующей и ее направление:

$R_X = F_{1X}+F_{2X}+F_{3X} = -10 + 21{,}65 - 20 = -8{,}35$ Н;
$R_Y = F_{1Y}+F_{2Y}+F_{3Y} = 17{,}32 + 12{,}5 - 34{,}64 = -4{,}82$ Н;

$$R=\sqrt{R_X^2+R_Y^2}=\sqrt{(-8{,}35)^2+(-4{,}82)^2}=9{,}64\ \text{Н};$$

$$\cos(x\hat{;}R)=\frac{R_X}{R}=-8{,}35/9{,}64=-0{,}866\Rightarrow\arccos(-0{,}866)=150°$$

Условия равновесия системы сходящихся сил. *Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу,* необходимо *и достаточно, чтобы равнодействующая сил равнялась нулю*, то есть $\vec R=\sum\vec F_k=0$.

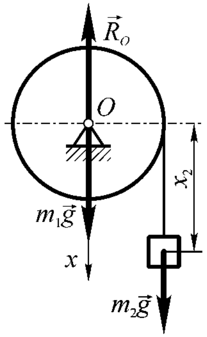
Геометрическое условие: *для равновесия системы сходящихся сил* необходимо, *чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнутым* (то есть при построении силового многоугольника конец последнего вектора совпадет с началом первого вектора).

Аналитическое условие: *для равновесия системы сходящихся сил* необхо-

систему, на какую-нибудь ось равен нулю, то центр масс в проекции на эту ось или движется равномерно, или находится в покое, то есть $m\vec a_{C_X}=\vec R_X^e=0\Rightarrow\vec a_{C_X}=0$.

Например, если в начальный момент система находилась в покое относительно координаты x, то $V_X=\dot x_{0_C}=0=\dot x_C\Rightarrow x_C=const$, а проекция центра масс на ось x покоится. При $\dot x_{0_C}\neq 0$ центр масс будет двигаться вдоль оси x с постоянной скоростью.

Эти следствия выражают закон сохранения движения центра масс механической системы. При x_C = const справедливо равенство $\sum m_k\Delta x_k = 0$, где Δx_k – увеличение координаты центра масс k-го тела при изменении положения тел механической системы, которая равна проекции абсолютного перемещения этого тела на ось x.



Пример. К концу троса, навитого на барабан подъемной лебедки, подвешен груз массой $m = 2000$ кг (см. рис.). Барабан массой $m = 100$ кг может вращаться вокруг горизонтальной оси O. Определить реакцию оси барабана, если груз придет в движение с ускорением $a = 2$ м/с^2, и координату центра масс системы.

Решение. Покажем внешние силы – вес барабана m_1g, вес груза m_2g, реакцию опоры (ось барабана) R_O. Выберем координатную ось с началом в точке O и направим ее в направлении движения груза – вниз (см. рис.).

Запишем теорему о движении центра масс механической системы

$$M\vec a_C=m_1\vec g+m_2\vec g+\vec R_O\ .$$

Проецируем это векторное равенство на координатную ось и решаем полученное уравнение относительно искомой величины – реакции R_O:

$$M\ddot x_C=m_1g+m_2g-R_O=(m_1+m_2)g-R_O\Rightarrow R_O=(m_1+m_2)g-M\ddot x_C\ .$$

Найдем координату центра масс системы: $x_C=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$. Так как $x_1 = 0$, $m_1 + m_2 = M$, тогда $x_C=\dfrac{m_2x_2}{M}$. Продифференцируем дважды последнее уравнение и определим ускорение центра масс, а далее – реакцию R_O:

$$\ddot x_C=\frac{m_2\ddot x_2}{M}=\frac{m_2a_2}{M};$$

$$R_O=(m_1+m_2)g-m_2a_2=m_1g+m_2(g-a_2)=100\cdot 9{,}81+2000(9{,}81-2)=16601\ \text{Н}.$$

Если груз будет покоится, то:

$$R_O=(m_1+m_2)g+m_2a_2=m_1g+m_2(g+a_2)=100\cdot 9{,}81+2000(9{,}81-0)=20601\ \text{Н}.$$

Если груз будет двигаться вверх, то:

$$R_O=(m_1+m_2)g+m_2a_2=m_1g+m_2(g+a_2)=100\cdot 9{,}81+2000(9{,}81+2)=24601\ \text{Н}.$$

$MR^2/2$. Что это за ось? Через какую точку диска она проходит? Чему равен момент инерции этого диска относительно другой оси, которая параллельна этой оси, но отдалена от нее на расстояние $R/2$?

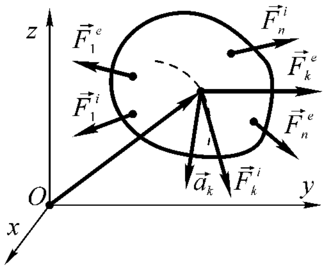
6. Что называется центробежным моментом инерции твердого тела? В чем состоит его отличие от осевого?
7. При каких условиях некоторая ось является главной осью инерции?
8. При каких условиях некоторая ось является главной центральной осью инерции?

3.5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

При решении задач динамики используются законы, с помощью которых описывается состояние точки, тела, системы точек или тел под влиянием силовых факторов – сил и моментов. Некоторые из этих законов отображаются в общих теоремах динамики.

3.5.1. Теорема о движении центра масс системы.

Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей механической системы и к которой приложена сила, равная главному вектору внешних сил.



Доказательство. Основное уравнение динамики для k-й материальной точки (см. рис.) имеет вид: $m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$. Для механической системы $\sum m_k\vec{a}_k = \sum\vec{F}_k^e + \sum\vec{F}_k^i$, а с учетом того, что $\sum\vec{F}_k^i = 0$ (по свойству внутренних сил) будет $\sum m_k\vec{a}_k = \sum\vec{F}_k^e = \vec{R}^e$, где $\vec{R}^e$ – главный вектор всех внешних сил, приложенных к системе. Тогда

$$\sum m_k\vec{a}_k = \sum m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum m_k\vec{r}_k\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum m_k\vec{r}_C\right) = M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = M\vec{a}_C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum m_k\vec{a}_k = M\vec{a}_C \Leftrightarrow M\vec{a}_C = \vec{R}^e.$$

Последнее уравнение может быть записано в скалярной форме в проекциях на оси декартовых координат:

$$Ma_{X_C} = M\ddot{x}_C = R_X^e = \sum F_{Xk}^e;$$

$$Ma_{Y_C} = M\ddot{y}_C = R_Y^e = \sum F_{Yk}^e;$$

$$Ma_{Z_C} = M\ddot{z}_C = R_Z^e = \sum F_{Zk}^e.$$

Следствия из теоремы:

1. *Если главный вектор внешних сил, которые действуют на систему, равен нулю, то центр масс механической системы или движется равномерно и прямолинейно, или находится в покое*, то есть $m\vec{a}_C = \vec{R}^e = 0 \Rightarrow \vec{a}_C = 0$.

2. *Если проекция главного вектора внешних сил, которые действуют на*

димо *и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на каждую из координатных осей равнялась нулю*, то есть

$$\begin{cases} R_X = \sum F_{Xk} = 0; \\ R_Y = \sum F_{Yk} = 0; \\ R_Z = \sum F_{Zk} = 0. \end{cases}$$

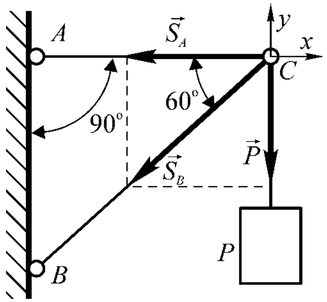
Порядок аналитического решения задач о равновесии системы сходящихся сил:

1. Выделить материальное тело (точку, систему), равновесие которого необходимо рассмотреть.
2. Изобразить активные силы (то есть заданные по условию), которые действуют на материальное тело (точку, систему), равновесие которого рассматривается.
3. Освободить тело (точку, систему) от связей и заменить их действие реакциями.
4. Установить систему координат.
5. Составить уравнения равновесия.
6. Решить полученные уравнения равновесия относительно неизвестных.

Прим.: Иногда удобно п. 4 решать совместно с пунктами 1…3.

Порядок графического решения задач о равновесии системы сходящихся сил:

1. Выделить тело (точку, систему), равновесие которого необходимо рассмотреть.
2. Изобразить все активные (то есть заданные) силы, которые действуют на выделенное тело (точку, систему).
3. Освободить тело (точку, систему) от связей и заменить их действие реакциями.
4. Построить замкнутый силовой многоугольник: сначала сложить все заданные силы, а затем достроить неизвестные силы.
5. Решить силовой многоугольник, то есть по известным элементам определить неизвестные (многоугольник сил строится в масштабе, поэтому искомые силы определяются измерением их длины и пересчётом согласно принятому масштабу).



Пример. Два невесомых стержня AC и BC соединены в точке C шарниром и удерживают груз весом $P = 50$ Н, который тросом прикреплен к шарниру C (см. рис.). Стержни и трос с грузом находятся в одной плоскости. Найти усилие в стержнях.

Решение. Используя принцип освобождения от связей, заменяем действие стержней реакциями $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$ (см. рис.). Переместим вектор $\vec{P}$ (вес груза) в точку C (это возможно потому, что груз своим весом через трос действует на шарнир C).

Установим координатные оси (их начало можно расположить в любой точке, удобно – в точке C). Запишем уравнения равновесия, учитывая, что конструкция находится в плоскости Cxy:

$$\begin{cases}\sum F_{Xk}=0:-S_A-S_B\cos 60^\circ=0;\\ \sum F_{Yk}=0:-P-S_B\sin 60^\circ=0.\end{cases}$$

Решим уравнение относительно неизвестных величин – реакций связей:

$$S_B=\frac{-P}{\sin 60^\circ}=\frac{-50}{\sin 60^\circ}=-57{,}74\ \text{Н};$$

$$S_A=-S_B\cos 60^\circ=-(-57{,}74)\cos 60^\circ=28{,}87\ \text{Н}.$$

Ответ: S_B = –57,7 Н, S_A = 28,87 Н. Отрицательное значение S_B указывает на то, что вектор силы $\vec{S}_B$ направлен в сторону, противоположную показанному на рисунке.

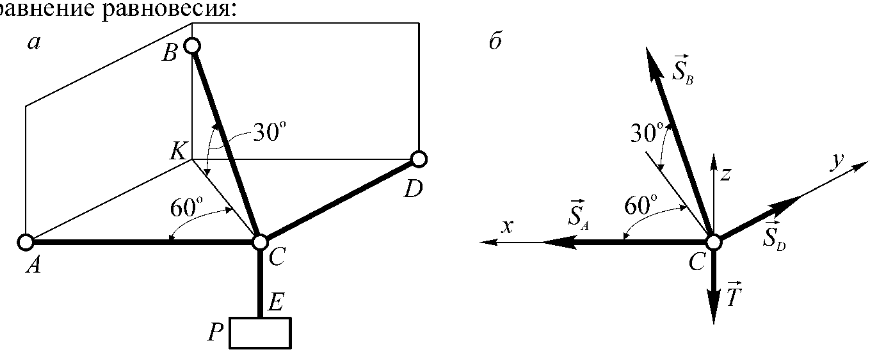
Прим.: Эту задачу можно решить (сделайте это самостоятельно), если использовать теорему о трех непараллельных силах: так как силы взаимно уравновешены, то силовой многоугольник, построенный на этих силах, должен быть замкнутым.

Пример. Три невесомых стержня AC, BC и DC соединены в точке C шарниром, к которому тросом CE прикреплен груз весом P = 1 кН (см. рис. ниже). Плоскость $ACDK$ горизонтальна, углы указаны на схеме. Найти усилие в стержнях и тросе.

Решение. На основании принципа освобождения от связей заменяем действие стержней и троса на шарнир C реакциями $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$ и $\vec{S}_D$, которые направляем от шарнира (см. расчетную схему на рис. *б*).

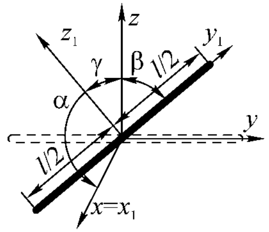
Очевидно, что реакция троса $\vec{T}$ равна весу груза, то есть $\vec{T}=\vec{P}=1$ кН.

Установим координатные оси xyz. Для полученной системы сил запишем уравнение равновесия:



$$\begin{cases}\sum F_{Xk}=0:S_A+S_B\cos 30^\circ\cos 60^\circ=0;\\ \sum F_{Yk}=0:S_D+S_B\cos 30^\circ\sin 60^\circ=0;\\ \sum F_{Zk}=0:-T+S_B\sin 30^\circ=0.\end{cases}$$

Решим уравнение как систему линейных уравнений относительно неизвестных величин – реакций связей:



Пример. Тонкий однородный стержень массой m и длиной l прикреплен в центре O к вертикальной оси и образует с ней угол β (см. рис.). Определить моменты инерции I_X, I_Y, I_Z стержня относительно осей x, y и z и центробежный момент инерции I_{YZ}.

Решение. Оси $Ox_1y_1z_1$ – главные центральные. Моменты инерции стержня относительно этих осей

$$I_{X_1}=\frac{ml^2}{12};\quad I_{Y_1}=0;\quad I_{Z_1}=\frac{ml^2}{12}.$$

Вычислим момент инерции относительно заданных осей по формуле

$I_V=I_{X_1}\cos^2\alpha'+I_{Y_1}\cos^2\beta'+I_{Z_1}\cos^2\gamma'$, здесь при вычислении I_Z: α' = 90°, β' = β, γ' = 90°–β. Тогда

$$I_Z=\frac{ml^2}{12}\cos^2 90^\circ+0\cos^2\beta+\frac{ml^2}{12}\cos^2(90^\circ-\beta)=\frac{ml^2}{12}\sin^2\beta.$$

При вычислении момента инерции относительно оси y: α' = 90°, β' = 0, γ' = –β. Тогда

$$I_Y=\frac{ml^2}{12}\cos^2 90^\circ+0\cos^2 0+\frac{ml^2}{12}\cos^2(-\beta)=\frac{ml^2}{12}\cos^2\beta.$$

Так как ось x совпадает с осью x', то $I_X=I_{X_1}=\dfrac{ml^2}{12}$.

Центробежный момент инерции I_{YZ} определим по формуле:

$$I_{YZ}=\frac{I_{Z_1}-I_{Y_1}}{2}\sin 2(90^\circ-\beta)=\frac{\frac{ml^2}{12}-0}{2}\sin(180-2\beta)=\frac{ml^2}{24}\sin 2\beta.$$

Эту задачу также можно решить методом интегрирования (для этого стержни разделяется на элементарные участки).

3.4. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

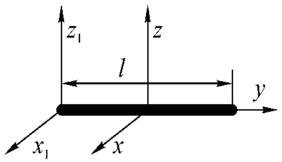
Задачи динамики для вращающегося тела формулируются аналогично задачам для точки, а второй закон Ньютона для тела в этом случае записывается в таком виде:

$I_Z\varepsilon=\sum M_Z$,

где I_Z и ε – соответственно момент инерции тела относительно оси вращения z и его угловое ускорение, M_Z – момент, который вращает тело относительно оси z.

Проверь свои знания!

1. Является ли твердое тело механической системой?
2. Как классифицируют силы, которые действуют на механическую систему?
3. В чем состоит отличие центра масс механической системы от центра тяжести?
4. Что такое осевой момент инерции твердого тела? Как он определяется?
5. Момент инерции однородного диска относительно некоторой оси равен



Пример. Вычислить момент инерции однородного стержня длиной l и массой M относительно оси z_1, которая проходит через конец стержня (см. рис.).

Решение. Момент инерции стержня относительно оси z:

$$I_Z = \frac{ml^2}{12}.$$

Тогда момент инерции I_{Z1} стержня относительно параллельной оси, которая проходит через конец стержня, за теоремой Гюйгенса-Штейнера, представляет:

$$I_{Z1} = I_Z + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

3.3.2. Центробежные моменты инерции

Центробежные моменты инерции учитывают асимметрию в распределении масс и вычисляются относительно пары координатных осей (моменты инерции в своих индексах содержат наименование этих осей) по формулам

$I_{XY} = \sum(m_k x_k y_k)$;

$I_{YZ} = \sum(m_k y_k z_k)$;

$I_{XZ} = \sum(m_k x_k z_k)$.

В отличие от осевых моментов инерции центробежные могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Это зависит от выбора начала осей координат и их направления.

Ось является **главной осью инерции тела**, если относительно нее центробежные моменты инерции равны нулю (моменты инерции в своих индексах содержат наименование этой оси). Главная ось инерции, которая проходит через центр массы тела, называется **главной центральной осью инерции**. Главными осями инерции твердого тела являются его оси симметрии.

Зная осевые и центробежные моменты инерции тела, можно определить момент инерции тела относительно любой оси, которая проходит через начало координат и образует с осями x, y и z соответственно углы α, β и γ.

Например, относительно оси V момент инерции определяется по формуле

$$I_V = I_X\cos^2\alpha + I_Y\cos^2\beta + I_Z\cos^2\gamma - 2I_{XY}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{YZ}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{XZ}\cos\alpha\cos\gamma.$$

Если оси координат являются главными осями инерции, то $I_{XY} = I_{YZ} = I_{ZX} = 0$. Тогда

$$I_V = I_X\cos^2\alpha + I_Y\cos^2\beta + I_Z\cos^2\gamma.$$

Прим.: В зависимости от взаимного расположения главных осей инерции тела и осей, относительно которых рассматривается момент инерции тела, существуют несколько случаев его вычисления.

$$S_B = \frac{T}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2 \text{ кН};$$

$$S_C = -S_B\cos 30^\circ\sin 60^\circ = -2\cos 30^\circ\sin 60^\circ = -1{,}5 \text{ кН};$$

$$S_A = -S_B\cos 30^\circ\cos 60^\circ = -2\cos 30^\circ\cos 60^\circ = -0{,}866 \text{ кН}.$$

Ответ: $T = 1$ кН, $S_B = 2$ кН, $S_C = -1{,}5$ кН, $S_A = -0{,}866$ кН. Отрицательное значение реакций указывает на то, что соответствующие им векторы направлены в сторону, противоположную показанному на схеме.

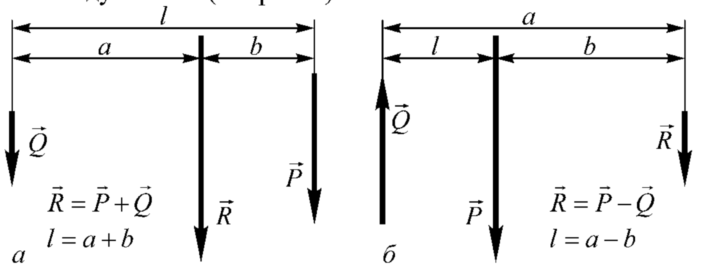
Проверь свои знания!

1. Что называется системой сходящихся сил?
2. Как найти равнодействующую системы сходящихся сил графическим методом?
3. Как определить равнодействующую системы сходящихся сил аналитическим методом?
4. Сформулируйте условие равновесия системы сходящихся сил.
5. Сформулируйте геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.
6. Сформулируйте аналитическое условие равновесия системы сходящихся сил.

1.10. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Правило параллелограмма для сложения системы параллельных сил непосредственно применять невозможно, однако после несложных преобразований системы сил их можно сложить (ниже при сложении системы параллельных сил эти преобразования не приводятся).

Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону. Две параллельные и направленные в одну сторону силы $\vec{Q}$ и $\vec{P}$ приводятся к равнодействующей $\vec{R}$, которая параллельна этом силам, равна сумме их модулей и направлена в ту же сторону. При этом точка приложения равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил на части, обратнопропорциональные модулям сил (см. рис. *а*).



а *б*

Для обеих схем:

$$\frac{|\vec{P}|}{a} = \frac{|\vec{Q}|}{b} = \frac{|\vec{R}|}{l}$$

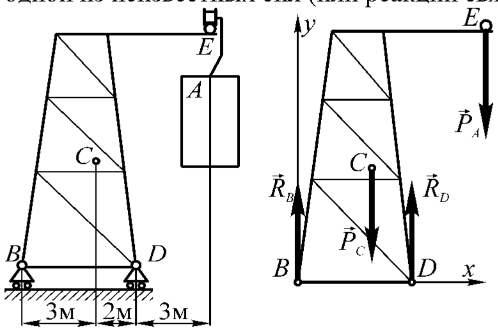
Сложение двух параллельных неравных по модулю сил, направленных во взаимно противоположные стороны. Две параллельные, не равные по модулю и направленные во взаимно противоположные стороны силы $\vec{Q}$ и $\vec{P}$ приводятся к равнодействующей $\vec{R}$, которая параллельна этим силам, равна разности их модулей и направлена в сторону большей силы. Точка приложения равнодействующей расположена за большей по модулю силой (по отношению ко второй силе) и делит отрезок между точками приложения сил и равнодействующей на части, обратнопропорциональные модулям сил (см. рис. *б*).

В случае, когда две антипараллельные силы одинаковы по модулю, тогда равнодействующая $\vec{R} = 0$. Однако опыт показывает, что в этом случае тело, к которому приложены такие две силы, поворачивается (так как эти силы образуют так называемую пару сил).

Порядок решения задач о равновесии системы параллельных сил:

1. Выделить материальное тело (систему, точку), равновесие которого необходимо рассмотреть.
2. Изобразить расчетную схему с активными силами, которые действуют на материальную тело (систему, точку), равновесие которого рассматривается.
3. Освободить тело (систему, точку) от связей и заменить их действие реакциями.
4. Выбрать систему координат (желательно ось *y* или *x* направить параллельно линиям действия сил).
5. Составить уравнения равновесия вида $\sum x_k = 0$; $\sum y_k = 0$; $M_O(F_k) = 0$.
6. Решить полученные уравнения относительно неизвестных.

Прим. Если одну из координатных осей направить параллельно линиям действия сил, то соответствующее уравнение проекций сил на эту ось примет вид 0 = 0, а решение задачи упростится. Также при составлении уравнения моментов за центр *O* рекомендуется брать такую точку, которая лежит на линии действия одной из неизвестных сил (или реакций связей), что также упростит решение.

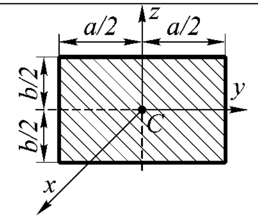
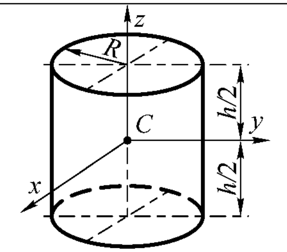
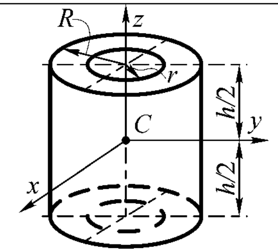
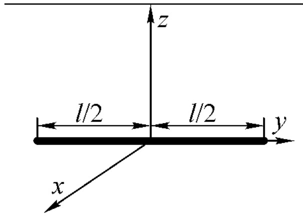
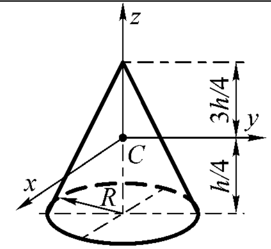
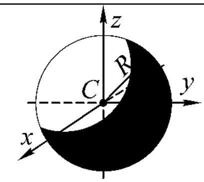


Пример. Грузовая вагонетка *A* движется по подвесной канатной дороге (см. рис.). Определить реакции в точках *B* и *D* в момент прохождения вагонетки через точку *E* на траверсе опоры и когда она находится на следующей опоре (т.е. $\vec{P}_A = 0$).

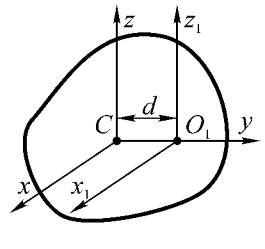
Масса вагонетки с грузом $m_A = 250$ кг, масса опоры и кронштейна с канатом $m_c = 1000$ кг и приложена в центре *C*.

Решение. Рассмотрим равновесие системы тел. Массу вагонетки m_A заменим силой $\vec{P}_A$, а опоры – силой $\vec{P}_C$ (при этом учитываем, что $P = mg$). Связи заменим силами $\vec{R}_B$ и $\vec{R}_D$. Установим координатные оси. Составим уравнения равновесия и решим их относительно неизвестных:

– в случае, когда вагонетка находится на траверсе в точке *E* (при этом

 Тонкая прямоугольная однородная пластина массой *M*: $I_X = \dfrac{M(a^2+b^2)}{12}$; $I_Y = \dfrac{Mb^2}{12}$; $I_Z = \dfrac{Ma^2}{12}$.	 Круговой цилиндр с тонкой стенкой массой *M*: $I_X = I_Y = \dfrac{MR^2}{4} + \dfrac{Mh^2}{12}$; $I_Z = 0{,}5MR^2$.	 Пустой круговой цилиндр (труба) массой *M*: $I_X = I_Y = \dfrac{MR^2}{4} + \dfrac{Mh^2}{12}$; $I_Z = \dfrac{M(R^2 - r^2)}{2}$.
 Тонкий стержень массой *M*: $I_X = I_Z = \dfrac{Ml^2}{12}$; $I_Y = 0$.	 Круговой конус массой *M*: $I_X = I_Y = \dfrac{3}{20}MR^2 + \dfrac{3}{80}Mh^2$ $I_Z = 0{,}3MR^2$.	 Шар массой *M*: $I_X = I_Y = I_Z = 0{,}4MR^2$. Полярный момент шара массой *M*: $I_C = 0{,}6MR^2 = 1{,}5I_X = 1{,}5I_Y = 1{,}5I_Z$.

3.3.1. Теорема о моменте инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)



Момент инерции I_{Z1} твердого тела относительно оси z_1, которая не проходит через центр масс тела, равна сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, которая проходит через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями, то есть

$$I_{Z1} = I_{C_Z} + Md^2,$$

где I_{C_Z} и *d* – соответственно момент инерции тела относительно оси *z*, которая проходит через центр масс тела, и расстояние оси z_1 до оси *z* (см. рис.).

то есть $I_Z = \sum m_k r_k^2$. В частном случае сплошного тела сумму следует заменить интегралом: $I_O = \int r^2 dm$.

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разных материалов, отличаются друг от друга. Характеристикой, которая не зависит от массы материала, является радиус инерции.

Радиус инерции i_z тела (иногда сказывается ρ_z или ρ) *относительно оси z – это расстояние от оси z до такой точки тела, в которой необходимо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции всего тела*. Радиус инерции i_z относительно оси Oz определяется по формуле $i_Z = \sqrt{\dfrac{I_Z}{M}}$, где M – масса тела. Тогда осевой момент инерции, выраженный через радиус инерции, относительно этой оси определяется уравнением $I_Z = Mi_Z^2$.

Момент инерции относительно начала координат удобно вычислять по формуле

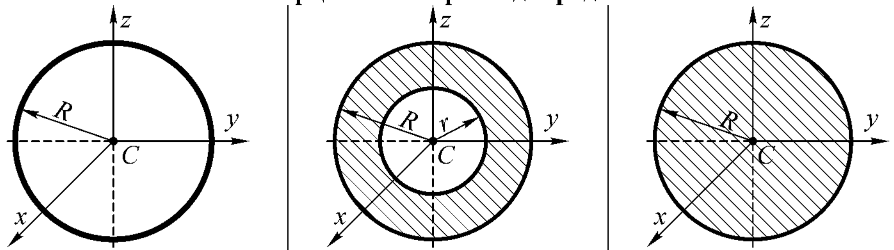
$$I_O = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 0{,}5(I_X + I_Y + I_Z),$$

где x_k, y_k, z_k – соответствующие координаты масс, которые рассматриваются; I_X, I_Y, I_Z – моменты инерции относительно соответствующих осей.

Моменты инерции относительно оси и точки имеют одинаковую размерность – произведение массы на квадрат длины: кг·м^2.

Кроме моментов инерции относительно точки и оси используются также моменты инерции относительно плоскостей и центробежные моменты инерции.

Осевые моменты инерции некоторых однородных тел



Тонкое кольцо, масса M которого распределена по внешней поверхности:	Тонкое широкое однородное кольцо массой M:	Тонкая круглая однородная пластина (диск) массой M:
$I_X = MR^2$; $I_Y = I_Z = 0{,}5MR^2$.	$I_X = \dfrac{M(R^2 - r^2)}{2}$; $I_Y = I_Z = \dfrac{M(R^2 - r^2)}{4}$.	$I_X = 0{,}5MR^2$; $I_Y = I_Z = 0{,}25MR^2$.

$\vec{P}_A = m_A g$):

$\sum y_k = 0$: $\quad F_B - P_C + F_D - P_A = 0$;

$M_B(F_k) = 0$: $\quad -P_C \cdot 3 + F_D \cdot (3+2) - P_A \cdot (3+2+3) = 0$,

откуда

$$F_D = \frac{P_C \cdot 3 + P_A(3+2+3)}{3+2} = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 3 + 250 \cdot 9{,}81 \cdot 8}{5} = 9810 \text{ Н};$$

$$F_B = P_C - F_D + P_A = 1000 \cdot 9{,}81 - 9810 + 250 \cdot 9{,}81 = 2453 \text{ Н};$$

– в случае, когда вагонетка находится на следующем пролете ($\vec{P}_A = 0$):

$$F_D = \frac{P_C \cdot 3 + P_A(3+2+3)}{3+2} = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 3 + 0 \cdot 8}{5} = 5886 \text{ Н};$$

$$F_B = P_C - F_D + P_A = 1000 \cdot 9{,}81 - 5886 + 0 \cdot 9{,}81 = 3924 \text{ Н}.$$

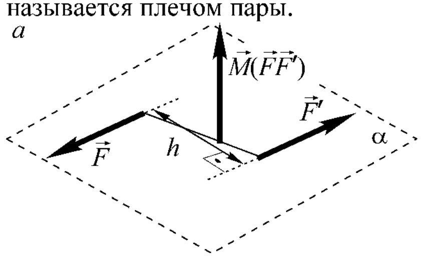
Проверь свои знания!

1. Как определить равнодействующую двух параллельных сил, направленных в одну сторону, и точку ее приложения?
2. Как определить равнодействующую двух параллельных сил, направленных в разные стороны, и точку ее приложения?
3. Как решаются задачи о равновесии системы параллельных сил?

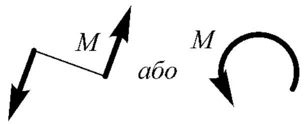
1.11. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

Пара сил – *совокупность двух одинаковых антипараллельных сил, линии действия которых не совпадают*. Расстояние между линиями действия сил пары называется плечом пары.

а



б



Для пары сил равнодействующая равна нулю (см. выше о сложении двух параллельных неравных по модулю сил, направленных в противоположные стороны).

Пара сил характеризуется плоскостью действия α, направлением действия («вращения»), значениями векторного момента пары $\vec{M}(\vec{F}\vec{F}')$ и момента пары $M(\vec{F}\vec{F}')$ (см. рис. *а*).

Вектор $\vec{M}(\vec{F}\vec{F}')$ перпендикулярен плоскости α действия пары сил, направлен так, что с него конца «вращение» пары видно против хода часовой стрелки, и является свободным вектором.

Пару сил обычно обозначают FF', $M(FF')$, $M_{FF'}$, M, а векторный момент – так же, но со знаком вектора.

На схемах пару сил обычно изображают и обозначают так, как показано на рис. *б*, с учетом направления ее действия.

Модуль векторного момента пары сил равен произведению одной из сил пары на плечо пары h, то есть $M(\vec{F}\vec{F}') = Fh = F'h$. Единица измерения момента ньютоно·метры ([Н·м], иногда м·Н).

Теорема об эквивалентности пар сил. *Одна пара сил эквивалентна второй паре сил, если они обе имеют геометрически одинаковые векторные моменты* (т.е. эти пары имеют одинаковые по направлению и модулю векторные моменты).

Свойства пар сил (являются следствиями из предыдущей теоремы). Состояние твердого тела не изменится, если:

– пару сил перенести в другую плоскость, параллельную плоскости действия пары (то есть момент пары сил является скользящим вектором);

– пару сил перенести в плоскости ее действия (то есть момент пары сил является свободным вектором).

Таким образом, пара сил – это вращающее усилие (или вращающий силовой фактор). Пару сил можно как угодно переносить или вращать в плоскости ее действия или переносить в другую параллельную плоскость.

Сложение пар сил. Две пары сил можно заменить одной парой с моментом, равным геометрической сумме векторных моментов исходных двух пар, то есть $\vec{M}(\vec{F}_1\vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2\vec{F}_2') = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{M}$ (при этом векторы-моменты $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ складываются как векторы).

Если исходные пары лежат в одной плоскости, то и результирующая пара также будет лежать в этой же плоскости. Если исходные пары лежат в разных не параллельных друг другу плоскостях, то результирующая пара будет лежать в третьей плоскости, которая не параллельная двум первым плоскостям.

Любое количество пар сил в пространстве в общем случае можно заменить одной эквивалентной (результирующей) парой, применяя последовательное сложение векторных моментов исходных пар сил, то есть

$$\vec{M}(\vec{F}_1\vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2\vec{F}_2') + \ldots + \vec{M}(\vec{F}_n\vec{F}_n') = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}_k = \vec{M}_0 .$$

Такая эквивалентная пара сил $\vec{M}_0$ называется главным моментом.

Условия равновесия пар сил. *Для равновесия нескольких пар сил необходимо и достаточно, чтобы сумма их моментов равнялась нулю,* то есть $\sum \vec{M}_k = 0$.

Таким образом, чтобы уравновесить систему, которая состоит из пар сил, необходимо приложить такую пару сил, у которой модуль векторного момента равен и противоположно направлен векторному моменту системы пар сил, которая рассматривается (пары сил невозможно уравновесить одной силой!).

Проверь свои знания!

1. Что такое пара сил?
2. Можно ли пары сил заменить равнодействующей силой?
3. Чем характеризуется пара сил?
4. Какие две пары сил называют эквивалентными?
5. Сформулируйте свойства пар сил.
6. Что такое главный момент?
7. Условия равновесия пар сил.

$$x = \frac{V_0 m}{k}\left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right).$$

Определим время τ, при котором скорость тела уменьшится вдвое, то есть

$$V = \frac{V_0}{2}: \ \frac{V_0}{2} = V_0 e^{\frac{-k}{m}\tau} \Rightarrow 2 = e^{\frac{-k}{m}\tau} \Rightarrow \ln 2 = \frac{k}{m}\tau \ln e \Rightarrow \tau = \frac{m}{k}\ln 2 .$$

Определим пройденное за время τ телом расстояние:

$$s = x_{(t=\tau)} = \frac{V_0 m}{k}\left(1 - e^{\frac{-k}{m}\cdot\frac{m}{k}\ln 2}\right) = \frac{V_0 m}{k}\left(1 - e^{-\ln 2}\right) = \frac{V_0 m}{k}\left(1 - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right) = \frac{V_0 m}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{V_0 m}{2k} .$$

Проверь свои знания!

1. Какое движение называется движением по инерции?
2. При каком условии материальная точка будет покоиться или двигаться равномерно и прямолинейно?
3. Сила, которая действует на материальную точку, постоянна по величине и направлению. Чему при этом равно ускорение точки?
4. Сила, которая действует на материальную точку массой m, увеличилась в два раза. Как при этом изменится ускорение точки?
5. Масса тела $m = 1$ кг. Чему равен вес тела?
6. Две материальные точки массой m_1 и m_2 действуют друг на друга. Чему равны ускорения и силы взаимодействия этих точек?
7. В чем состоит суть первой задачи динамики материальной точки?
8. В чем состоит суть второй задачи динамики материальной точки?
9. Запишите естественные дифференциальные уравнения движения материальной точки.
10. Материальная точка массой m начинает движение из начала декартовой системы координат со скоростью V_0, которая направлена вдоль оси x. Укажите начальные условия движения точки.

3.3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Если масса m – это мера инертности тела при его поступательном движении, то мерой инертности тела при его вращательном движении является момент инерции.

Момент инерции I_O механической системы **относительно точки** O или **полярный момент инерции** – *это сумма произведений масс m_k точек механической системы на квадраты их расстояний до точки O*, то есть $I_O = \sum m_k d_k^2$, где d_k – расстояние k-й точки системы до точки O. В случае сплошного тела сумма переходит в интеграл и для полярного момента инерции имеем: $I_O = \int d^2 dm$, где dm – масса элементарной частицы тела; d – расстояние частицы тела до точки O.

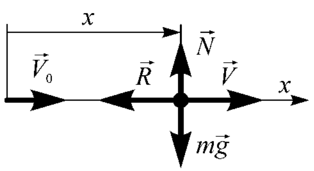
Момент инерции I_Z системы материальных точек **относительно оси** Oz – *это сумма произведений масс m_k точек на квадраты их расстояний r_k до оси Oz*,

$$s=-g(\sin\alpha+f\cos\alpha)\frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{g(\sin\alpha+f\cos\alpha)}\right)^2+V_0\frac{V_0}{g(\sin\alpha+f\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{V_0^2}{2g(\sin\alpha+f\cos\alpha)}.$$

Пример. Тело массой m движется горизонтально в среде, сила сопротивления которой зависит от скорости движения и определяется выражением $R = kv$. В начальный момент телу сообщили начальную скорость V_0. Определить при $k = \text{const}$: закон изменения скорости движения; закон движения тела; время движения, за которое скорость уменьшится в 2 раза; пройденное за это время расстояние.

Прим. Сила сопротивления движения R зависит от скорости движения и определяется выражением $R = kv$ в случае движения тела в жидкости с относительно низкой скоростью или $R = kv^2$ – в случае движения тела в жидкости с относительно большой скоростью.



Решение. Выберем начало координат в начальном положении тела, ось x направим в сторону движения (см. рис.). Покажем в произвольном положении тело и силы, которые действуют на него: вес $m\vec{g}$, силу сопротивления $\vec{R}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ (то есть архимедову силу). Запишем дифференциальное уравнение движения тела вдоль оси x:

$$m\ddot{x}=-R \text{ или } m\frac{dV}{dt}=-kV.$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$m\frac{dV}{dt}=-kV \Rightarrow \int_{V_0}^{V}\frac{dV}{dt}=-\int_0^t\frac{k}{m}dt \Rightarrow \ln V\big|_{V_0}^{V}=-\frac{k}{m}t \Rightarrow V=V_0e^{\frac{-k}{m}t}.$$

Полученное выражение является законом изменения скорости.

Представим $V=\dot{x}=\dfrac{dV}{dt}=V_0e^{\frac{-k}{m}t}$.

Разделим переменные и проинтегрируем последнее уравнение (как неопределенный интеграл):

$$\int dx=\int V_0e^{\frac{-k}{m}t}dt \Rightarrow x=-\frac{m}{k}V_0e^{\frac{-k}{m}t}+C.$$

Постоянную интегрирования C найдем с учетом начальных условий движения при $t = 0$: $x_0 = 0$. Тогда

$$0=-\frac{m}{k}V_0e^0+C \Rightarrow C=\frac{V_0m}{k}.$$

Подставив последнее выражение в предпоследнее выражение, окончательно получим закон движения тела:

8. Как можно уравновесить пары сил?

1.12. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Система сил, которая расположена в одной плоскости, называется плоской или двухмерной системой сил. Известно, что любая система сил приводится к двм силовым факторам – к одной силе (главному вектору $\vec{R}_0$) и к паре сил (главному моменту $\vec{M}_0$). Момент пары сил направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат силы. Но для плоских систем нет необходимости использовать векторное представление момента (в виде вектор-момента).

Условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил. *Плоская система произвольно расположенных сил будет уравновешенной только тогда, когда и главный вектор и главный момент будут равны нулю*, то есть $\vec{R}_0=0$; $\vec{M}_0=0$.

Два последних уравнения представляют собой геометрические условия равновесия. Для того, чтобы получить аналитические условия равновесия, необходимо эти уравнения спроецировать на координатные оси. Сделаем это.

Равенство $\vec{R}_0=0$ означает, что векторный (силовой) многоугольник, построенный на силах данной системы, должен быть замкнутым, то есть $\vec{R}_0=\sum\vec{F}_k=0$. Ведь и алгебраическая сумма проекций сил уравновешенной плоской системы сил на каждую из двух осей координат x и y должна равняться нулю, то есть

$$\sum F_{Xk}=\sum X_k=0;$$
$$\sum F_{Yk}=\sum Y_k=0.$$

Равенство $\vec{M}_0=0$ означает, что алгебраическая сумма моментов сил данной системы относительно любого центра приведения равняется нулю, то есть

$$\vec{M}_0=\sum\vec{M}(\vec{F}_k)=0.$$

Итак, *для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат x и y равнялись нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки плоскости* (например, C) *также равнялась нулю*, то есть

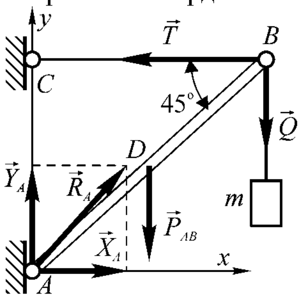
$$\sum X_k=0;$$
$$\sum Y_k=0;$$
$$\sum M_C(\vec{F}_k)=0.$$

Эти три уравнения являются аналитическими условиями равновесия плоской системы произвольно расположенных сил. Однако они не являются единой формой их записи. При решении некоторых задач целесообразно вместо одного или двух уравнений проекций сил на оси сложить уравнение моментов (эти случаи аналитических уравнений равновесия плоской системы сил показаны ниже в таблице).

Необходимо отметить, что выведенные ранее условия равновесия системы сходящихся сил, системы параллельных сил и системы пар сил являются отдельными случаями условий равновесия, полученных для плоской (двумерной) системы произвольно расположенных сил.

Прим.: Т.к. все виды аналитических условий равновесия действительные для любых прямоугольных осей координат, то в процессе решения задачи или при проверке ее решения оси координат можно изменить, то есть одни уравнение проекций сил сложить для одной системы координат, а другие – для новой системы координат. Этот прием в некоторых случаях упрощает решение или проверку решения задач. При этом необходимо помнить, что число уравнений равновесия, которые устанавливаются для решения (но не для проверки решения), не должно быть больше числа условий равновесия, которые отвечают системе сил, рассмотренных в задаче.

Прим.: При решении задач статики аналитическим способом целесообразно установить уравнение равновесия так, чтобы в каждом из них была только одна неизвестная величина. Во многих случаях этого можно достичь, если правильно выбрать оси координат и местоположение центра для определения моментов.



Пример. Подъемный кран в шахтном электровозном гараже состоит из балки AB длиной 4 м, конец A которой шарнирно соединен со стеной (см. рис.). Верхний конец B балки закреплён горизонтальным тросом BC. Масса балки P_{AB} = 100 кг и приложена в середине ее длины. Масса груза, который поднимается, m = 300 кг. Определить реакцию шарнира A и натяжение троса BC.

Решение. Рассмотрим равновесие балки под действием приложенных к ней известных сил $\vec{P}_{AB}$ и $\vec{Q}$ (вес груза $\vec{Q} = m\vec{g}$ на расчетной схеме перенесен вдоль своей линии действия и «прикреплен» к точке B). Заменим связи их реакциями: троса $\vec{T}$, которая направлена вдоль троса к точке C его крепления; шарнира R_A, направление которой заведомо неизвестно, а потому условно разложим ее по направлениям координатных осей, выбрав точку A за начало координат, то есть – на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. В результате имеем уравновешенную произвольную систему сил на плоскости (или плоскую или двумерную). Составив три уравнения равновесия (два уравнения – суммы проекций сил на координатные оси и одно уравнение – сумма моментов сил относительно точки A) и решив их, найдем неизвестные силы:

$$\sum X_k = 0 : X_A - T = 0\ ;$$

$$\sum Y_k = 0 : Y_A - P - Q = 0\ ;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0 : -P_{AB}\,|AD|\cos 45^\circ - Q\,|AB|\cos 45^\circ + T\,|AC| = 0\ .$$

Из второго уравнения найдем реакцию Y_A, из третьего – T, из первого – X_A:

положении на оси x и покажем силы, которые действуют на него, а именно:

вес $m\vec{g}$; силу трения $\vec{F}_{TP}$; нормальную реакцию $\vec{N}$ плоскости. Запишем дифференциальное уравнение движения тела вида $ma = \sum F$ вдоль оси x:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - F_{TP}\ ;$$

$$F_{TP} = fN = fmg\cos\alpha\ .$$

Тогда предпоследнее уравнение с учетом последнего уравнения примет вид:

$$m\ddot{x} = -mg\ \sin\alpha\ -\ fmg\ \cos\alpha\ =\ -mg\,(-\sin\alpha\ +\ f\ \cos\alpha)\ .$$

Сократив обе части равенства на m, получим:

$$\ddot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\ .$$

Дважды проинтегрируем последнее уравнение:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha) \Rightarrow \int d\dot{x} = \int -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + C_1\ ; \qquad (1)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + C_1 \Rightarrow \int dx = \int[-g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + C_1]dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\ . \qquad (2)$$

Найдем постоянные интегрирования, использовав начальные условия движения при $t = 0$: $x = x_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = V_0$. Тогда из выражений (1) и (2) с учетом начальных условий получим:

$$\dot{x}_0 = -g(\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \dot{x}_0 = V_0\ ;$$

$$x_0 = -g(\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0 = 0\ .$$

С учетом установленных значений постоянных интегрирования уравнения (1) и (2) примут вид

$$\dot{x} = V = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + V_0\ ; \qquad \text{(закон изменения скорости)}$$

$$x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + V_0 t\ . \qquad \text{(закон движения)}$$

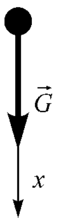
Определим время до остановки тела, для чего подставим значение $V = 0$ и $t = T$ (то есть – условия, что скорость тела в конце движения равна нулю, а время его движения до остановки равно T) в закон изменения скорости, а затем определим пройденное расстояние до остановки тела, для чего подставим значение $x = s$, $t = T$ (то есть – условия, что тело до остановки прошло путь, равный s, а время его движения до остановки равно T) в закон движения:

$$0 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)T + V_0 T \Rightarrow T = \frac{V_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\ . \qquad (3)$$

$$s = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{T^2}{2} + V_0 T\ . \qquad (4)$$

Решив совместно уравнение (3) и (4), получим:

это начальные координаты точки x_0, y_0, z_0 и проекции начальной скорости $\vec{V}_0$ на оси $V_{0x} = \dot{x}_0$, $V_{0y} = \dot{y}_0$, $V_{0z} = \dot{z}_0$ в момент времени $t = 0$, который отвечает началу движения точки.



Пример. Определить закон движения и закон изменения скорости при свободном падении тела (без учета сопротивления движения среды).

Решение. При свободном падении на тело действует только сила веса, который равняется весу тела. Направим ось x в направлении движения тела – вниз (см. рис.). Составим дифференциальное уравнение движения тела, а затем дважды протегрируем его:

$$m\ddot{x} = G;$$

так как $G = mg$, то

$$m\ddot{x} = mg \Leftrightarrow \ddot{x} = g.$$

Прим. Из последнего уравнения следует, что свободно падающее тело движется с ускорением g, что известно из курса физики.

Дважды проинтегрируем последнее уравнение:

$$\dot{x} = gt + C_1; \qquad (1)$$

$$x = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является законом движения. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим, используя начальные условия при $t = 0$: $x = x_0$; $\dot{x} = V_0$. Подставим их в уравнения (1) и (2):

$$V_0 = g \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = V_0;$$

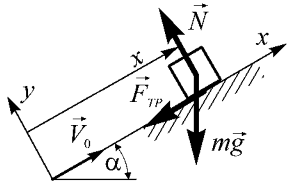
$$x_0 = g\frac{0^2}{2} + V_0 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0.$$

С учетом полученных значений C_1 и C_2 уравнение (1) и (2) примут вид:

$$\dot{x} = gt + V_0;$$

$$x = g\frac{t^2}{2} + V_0 t + x_0.$$

Прим. Два последних уравнения также известны из курса физики. Кроме того, если в них заменить ускорение свободного падения g на ускорение a, то получим законы движения тела и изменения скорости при равнопеременном движении (см. раздел «Кинематика»).



Пример. На наклонную шероховатую поверхность поместили тело и предали ему начальную скорость V_0 вверх вдоль плоскости. Угол наклона плоскости равен α, коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен F. Определить закон изменения скорости движения, закон движения тела по плоскости, время до остановки, пройденное до остановки расстояние.

Решение. Выберем начало координат в начальном положении тела, ось x направим в сторону движения тела (см. рис.). Изобразим тело в произвольном

$$Y_A = P + Q = 100g + 300g = 3924 \text{ Н};$$

$$T = \frac{P_{AB}\,|AD|\cos 45^\circ + Q\,|AB|\cos 45^\circ}{|AC|} = \frac{P_{AB}\dfrac{|AB|}{2}\cos 45^\circ + Q\,|AB|\cos 45^\circ}{|AB|\sin 45^\circ} =$$

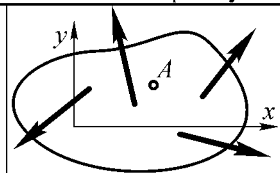
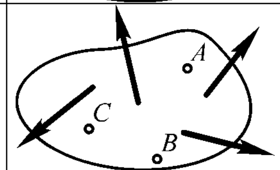
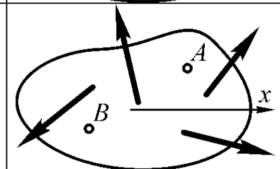
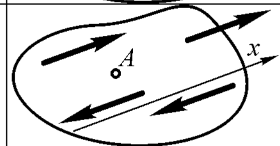
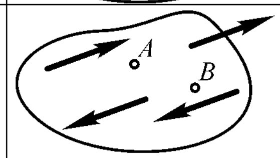
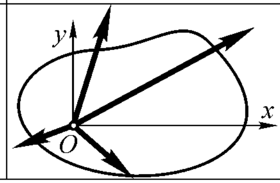
$$= \frac{100g\dfrac{4}{2}\cos 45^\circ + 300g4\cos 45^\circ}{4\sin 45^\circ} = 3434 \text{ Н};$$

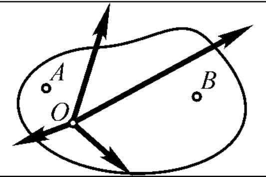
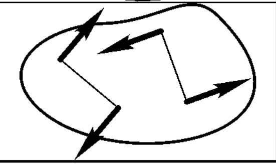
$$X_A = T = 3434 \text{ Н}.$$

Полную реакцию в точке A найдем как сумму ее составляющих X_A и Y_A:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{3434^2 + 3924^2} = 5214 \text{ Н}.$$

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ: необходимые и достаточные условия равновесия двумерной системы сил, приложенных к твердому телу

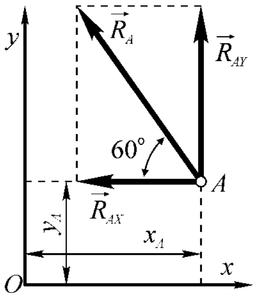
Условия равновесия системы сил, которые произвольно расположены на плоскости	$\sum X(F_k) = 0;$ $\sum Y(F_k) = 0;$ $\sum M_A(F_k) = 0.$		Оси координат и точка A назначены произвольно
	$\sum M_A(F_k) = 0;$ $\sum M_B(F_k) = 0;$ $\sum M_C(F_k) = 0.$		Точки A, B, C назначены произвольно, но не лежат на одной прямой
	$\sum M_A(F_k) = 0;$ $\sum M_B(F_k) = 0;$ $\sum X(F_k) = 0.$		Точки A, B назначены произвольно, ось x не перпендикулярна линии AB
Условия равновесия системы параллельных сил, которые расположены на плоскости	$\sum X(F_k) = 0;$ $\sum M_A(F_k) = 0.$		Ось x не перпендикулярная векторам сил, точка A назначена произвольно
	$\sum M_A(F_k) = 0;$ $\sum M_B(F_k) = 0.$		Точки A, B назначены произвольно, при этом линия AB не параллельна векторам сил
Условия равновесия системы сходящихся сил, которые расположены на плоскости	$\sum X(F_k) = 0;$ $\sum Y(F_k) = 0.$		Оси координат назначены произвольно

	$\sum M_A(F_k) = 0$; $\sum M_B(F_k) = 0$.		Точки A и B назначены произвольно, при этом центр O пучка не лежит на линии AB
Условие равновесия системы пар сил, которые расположены на плоскости	$\sum M_k = 0$.		$\sum M_k$ – сумма моментов всех пар сил

1.13. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

1.13.1. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Момент равнодействующей системы сил относительно произвольной точки равен геометрической сумме моментов сил системы относительно этой точки, то есть $\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)$. *Момент равнодействующей системы сил относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно этой оси*, то есть (относительно оси z) $M_Z(\vec{R}) = \sum M_Z(\vec{F}_k)$.



Пример. Определить момент равнодействующей $\vec{R}_A = 100$ Н относительно начала координат, если координаты точки A равнодействующей имеют значение $x_A = 0{,}5$ м, $y_A = 0{,}3$ м (см. рис.).

Решение. Применим теорему Вариньона: $M_O(\vec{R}_A) = M_O(\vec{R}_{AX}) + M_O(\vec{R}_{AY})$.

Находим проекции равнодействующей на оси координат:

$R_{AX} = R_A \cos 60° = 100 \cos 60° = 50$ Н;

$R_{AY} = R_A \sin 60° = 100 \sin 60° = 86{,}6$ Н;

Находим моменты проекций равнодействующей относительно точки O:

$M_O(\vec{R}_{AX}) = R_{AX}\, y_A = 0{,}3 \cdot 50 = +15$ Н·м;

$M_O(\vec{R}_{AY}) = R_{AY}\, x_A = 0{,}5 \cdot 86{,}6 = +43{,}3$ Н·м;

$M_O(\vec{R}_A) = +15 + 43{,}3 = +58{,}3$ Н·м.

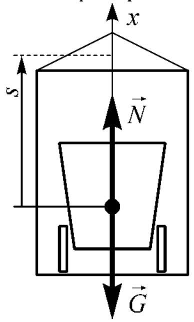
1.13.2. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

Для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}$ этой системы сил равнялись нулю.

Условия равновесия в векторной форме имеют вид: $\vec{R}_0 = 0$; $\vec{M}_O = 0$.

Условия равновесия в аналитической форме (для этого необходимо выше

При прямолинейном движении $a_\tau = a$, $a_n = 0$.



Пример. В шахтной клети, которая приходит в движение равноускоренно, покоится вагонетка массой m. Определить давление вагонетки на пол клети, которая за время t переместилась на высоту s.

Решение. При решении задачи считаем вагонетку за точку.

Рассмотрим движение клети вверх. Направим ось Ox в сторону движения. Обозначим действующие силы веса вагонетки $\vec{G} = m\vec{g}$ и реакции пола клети $\vec{N}$ (см. рис.).

Запишем второй закон динамики для этого случая в векторной форме:

$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{G}$.

Спроецируем это уравнения на ось x:

$ma_X = N - G$ или $m\ddot{x} = N - G$.

Известно, что при равнопеременном движении $a = \dfrac{2s}{t^2}$, тогда можно записать:

$$m\frac{2s}{t^2} = N - G \Rightarrow N = G + m\frac{2s}{t^2} = mg + m\frac{2s}{t^2} = m\left(g + \frac{2s}{t^2}\right).$$

Давление вагонетки на пол равно реакции $\vec{N}$, которая направлена в противоположную сторону и, как вытекает из последнего уравнения, превышает вес вагонетки (вес вагонетки $G = mg$, а полученный результат $G = m\left(g + \dfrac{2s}{t^2}\right)$).

Если клеть движется вниз, то ось x направляется также вниз. Тогда реакция пола $N = m\dfrac{2s}{t^2} - G = mg - m\dfrac{2s}{t^2} = m\left(g - \dfrac{2s}{t^2}\right)$, то есть давление в этом случае меньше веса вагонетки (вес вагонетки $G = mg$, а полученный результат $G = m\left(g - \dfrac{2s}{t^2}\right)$).

3.2.3.2. Вторая (основная или обратная) задача динамики.

Зная действующие на точку силы, ее массу и начальные условия движения, определить закон движения точки или другие ее кинематические характеристики.

Решение второй задачи динамики сводится к составлению дифференциального уравнения (или уравнений) движения материальной точки и их решению путем непосредственного интегрирования или с использованием теории дифференциальных уравнений.

В процессе интегрирования уравнений появляются постоянные интегрирования. Для их определения используются начальные условия.

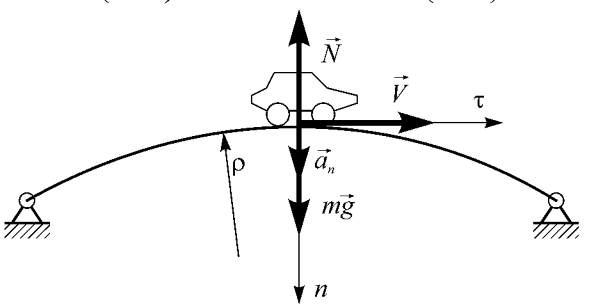
Начальные условия в случае движения точки в декартовых координатах –

– на главную нормаль $a_n = \dfrac{V^2}{\rho} = \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}$ (нормальное ускорение).

Проекция ускорения на бинормаль равна нулю. Тогда проекции силы на естественные оси, их модуль и направление определяются по формулам:

$$F_\tau = m\frac{dV}{dt}; \quad F_n = m\frac{V^2}{\rho}; \quad F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2};$$

$$\cos\left(\vec{F}, \hat{\vec{\tau}}_0\right) = \frac{F_\tau}{F}; \qquad \cos\left(\vec{F}, \hat{\vec{n}}_0\right) = \frac{F_n}{F}.$$



Пример. Автомобиль массой $m = 1000$ кг движется по выпуклому мосту со скоростью $V = 15$ м/с (см. рис.). Радиус кривизны моста $\rho = 50$ м. Определить силу давления автомобиля на мост в момент, когда он находится на его середине.

Решение. Считая автомобиль материальной точкой, изобразим его в середине моста и покажем силы веса $m\vec{g}$ и нормальной реакции $\vec{N}$.

Запишем второй закон динамики в векторной форме:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Проецируем это равенство на естественные оси τ и *n*, а затем решим полученные уравнения:

$$ma_\tau = m\frac{dV}{dt} = m\dot{V} = 0 \Rightarrow V = \text{const};$$

$$ma_n = mg - N \Rightarrow N = mg - ma_n = mg - m\frac{V^2}{\rho} = 1000 \cdot 9{,}81 - 1000\frac{15^2}{50} = 5310 \text{ Н}.$$

В последнем уравнении $\dfrac{V^2}{\rho}$ – центростремительное ускорение, которое порождается при движении тела по криволинейной траектории.

Очевидно, что давление на мост равно по модулю реакции $\vec{N}$ и направлен в противоположную сторону.

Вариант 3. Ускорение точки может быть также определено с использованием формул равнопеременного движения:

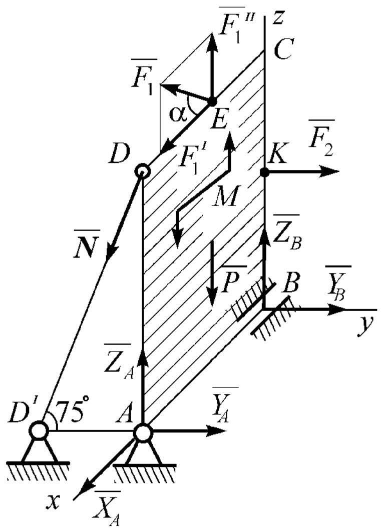
$$s = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}; \quad V = V_0 + a_\tau t,$$

где s – пройденное точкой расстояние за время t; t – время движения точки; a_τ – касательное ускорение; V_0 и V – начальная и конечная скорости точки.

приведенные уравнения равновесия в векторной форме спроецировать на координатные оси):

$$\sum F_{Xk} = 0;$$
$$\sum F_{Yk} = 0;$$
$$\sum F_{Zk} = 0;$$
$$\sum M_X(\vec{F}_k) = 0;$$
$$\sum M_Y(\vec{F}_k) = 0;$$
$$\sum M_Z(\vec{F}_k) = 0.$$

В некоторых случаях аналитические условия при соответствующем выборе направлений координатных осей могут принимать другой вид, например: для плоской системы сил теряют содержание уравнения для одной из координатных осей; для системы сходящихся сил теряют содержание уравнения моментов и др.



Пример. Вертикальная прямоугольная плита весом P (см. рис.) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD', который лежит в плоскости, параллельной плоскости yz. На плиту действуют сила $\vec{F}_1$, (в плоскости xz), сила $\vec{F}_2$ (параллельная оси y) и пара сил (в плоскости плиты) с моментом M.

Дано: $P = 5$ кН, М = 3 кН·м, $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 7{,}5$ кН, $\alpha = 30°$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $PE = DE = 0{,}5DC$, $BK = CK = 0{,}5BC$.

Определить реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы $\vec{P}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пара сил с моментом M, а также реакции связей.

Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющих X_A, Y_A, Z_A, цилиндрического шарнира (подшипника) – на две составляющих Y_B, Z_B (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $\vec{N}$ стержня направим вдоль стержня.

Для упрощения решения задачи силу $\vec{F}_1$ раскладываем на составляющие F_1' и F_1'', параллельные осям x и z. При этом $F_1' = F_1\cos(\alpha)$, $F_1'' = F_1\sin(\alpha)$. Аналогично сделаем для моментов реакции $\vec{N}$ (в данном примере разложим силу $\vec{N}$ на составляющие, параллельные осям y и z).

Для определения шести неизвестных реакций составим шесть уравнений равновесия пространственной системы сил, действующих на плиту:

$\sum F_{xk} = 0$: $\quad$ $X_A + F_1\cos(\alpha) = 0;$

$\sum F_{yk} = 0$: $Y_A + Y_B + F_2 - N\cos75° = 0$;

$\sum F_{zk} = 0$: $Z_A + Z_B - P - N\sin75° + F_1\sin(\alpha) = 0$;

$\sum M_{X(Fk)} = 0$: $-F_2 \cdot |BK| + N\cos75° \cdot |BC| = 0$;

$\sum M_{Y(Fk)} = 0$: $P \cdot |AB|/2 + F_1\cos(\alpha) \cdot |BC| - F_1\sin(\alpha) \cdot |AB|/2 -$

$\sum M_{Z(Fk)} = 0$: $- Z_A \cdot |AB|$

$Y_A \cdot |AB| - N\cos75° \cdot |AB| = 0$.

Составленные уравнения содержат 6 неизвестных величин – реакции опор A, B и стержня DD', (то есть X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, N). Решим эти уравнения как систему относительно неизвестных, и получим:

$$X_A = -F_1\cos(\alpha) = -6\cos30^\circ = -5{,}2 \text{ кН};$$

$$N = \frac{F_2\,|BK|}{\cos75^\circ\,|BC|} = \frac{7{,}5\cdot 1}{\cos75^\circ\cdot 2} = 14{,}5 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{N\cos75^\circ\cdot|AB|}{|AB|} = \frac{14{,}5\cos75^\circ\cdot 1}{1} = 3{,}8 \text{ кН};$$

$$Z_A = \frac{P\,|AB|/2 + F_1\cos(\alpha)\,|BC| - F_1\sin(\alpha)\,|AB|/2 + N\sin75^\circ\,|AB| + M}{|AB|} =$$

$$= \frac{5\cdot 1/2 + 6\cos30^\circ\cdot 2 - 6\sin30^\circ\cdot 1/2 + 14{,}5\sin75^\circ\cdot 1 + 3}{1} = 28{,}4 \text{ кН};$$

$$Y_B = -Y_A - F_2 + N\cos75^\circ = -3{,}8 - 7{,}5 + 14{,}5\cos75^\circ = -7{,}5 \text{ кН};$$

$$Z_B = -Z_A + P + N\sin75^\circ - F_1\sin(\alpha) = -28{,}4 + 5 + 14{,}5\sin75^\circ - 6\sin30^\circ = -12{,}4 \text{ кН}.$$

Модуль полных реакций связей A и B определим как сумму их составных:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-5{,}2)^2 + 3{,}8^2 + 28{,}4^2} = 29{,}12 \text{ кН};$$

$$R_B = \sqrt{Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{(-7{,}5)^2 + (-12{,}4)^2} = 14{,}5 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -5{,}2$ кН, $Y_A = 3{,}8$ кН, $Z_A = 28{,}4$ кН, $R_A = 29{,}12$ кН, $Y_B = -7{,}5$ кН, $Z_B = -12{,}4$ кН, $R_B = 14{,}5$ кН, $N = 14{,}5$ кН. Знаки указывают, что силы X_A, Y_B и Z_B имеют направление, противоположное показанному на расчетной схеме.

1.13.3. Равновесие произвольной пространственной системы сил, действующей на систему тел.

Система тел – это несколько тел, соединенных в одну механическую систему. Различают внешние и внутренние силы, которые действуют на тела системы. Внутренние силы – силы взаимодействия между телами одной и той же системы, внешние силы – силы, с которыми на тела данной системы действуют тела, которые не входят в систему.

Если система тел находится в равновесии, то необходимо рассматривать равновесие каждого тела отдельно, учитывая при этом внутренние силы взаимодействия между телами.

Если система состоит из N тел, а система сил – пространственная, то условия равновесия в аналитической форме будут представлять собой N условий равновесия пространственной системы сил – по одному условию для каждого тела,

3.2.3. Две задачи динамики для материальной точки и их решение

3.2.3.1. Первая (прямая) задача динамики.

Зная закон движения и массу точки, определить силу, которая действует на точку.

Для решения этой задачи необходимо знать ускорение точки. В задачах этого типа оно может быть задано непосредственно или может быть задан закон движения точки, согласно которому оно может быть определено. Ниже приведено три примера решения первой задачи динамики для трех вариантов исходных данных.

Вариант 1. Если движение точки задано в декартовых координатах уравнениями вида $x = F_1(t)$, $y = F_2(t)$ и $z = F_3(t)$, то определяются проекции ускорения на оси координат $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, $\ddot{z} = \dfrac{d^2z}{dt^2}$, а затем – проекции силы F_X, F_Y и F_Z на эти оси: $F_X = m\ddot{x}$, $F_Y = m\ddot{y}$, $F_Z = m\ddot{z}$. Модуль и направление силы определяется по формулам: $F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2}$; $\cos\left(\vec{F}\,\widehat{,}\,\vec{i}\right) = \dfrac{F_X}{F}$; $\cos\left(\vec{F}\,\widehat{,}\,\vec{j}\right) = \dfrac{F_Y}{F}$;

$\cos\left(\vec{F}\,\widehat{,}\,\vec{k}\right) = \dfrac{F_Z}{F}$.

Пример. Определить силу давления пороховых газов, которые действуют на пулю массой 9,6 г, которая разгоняется в стволе нагана с ускорением 166 м/с^2.

Решение. В соответствии со вторым законом Ньютона можно записать: $m\vec{a} = \vec{F}$ или $ma = F = 9{,}6\cdot10^{-3}\cdot 166 = 1{,}59$ Н.

Пример. Материальная точка массой m движется в плоскости Oxy согласно уравнениям $x = 2t$, м; $y = 1+2t^2$, м. Определить силу, которая действует на точку.

Решение. Определим проекции силы на оси координат, а затем – модуль силы и ее направление, для чего составим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на координатные оси:

$$F_X = m\ddot{x} = m\cdot 0;$$

$$F_Y = m\ddot{y} = m\cdot 4;$$

$$F = \sqrt{(m\cdot 0)^2 + (m\cdot 4)^2} = m\cdot 4 = F_Y.$$

Таким образом, сила, которая действует на точку, $F = F_Y$ и направлена параллельно оси y.

Вариант 2. Если точка движется криволинейно и известны закон ее движения $s = F(t)$, траектория и радиус кривизны траектории ρ, то удобно пользоваться естественными осями. В этом случае проекции ускорения на эти оси определяются по формулам:

– на касательную ось $\quad a_\tau = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{dV}{dt}$ (касательное ускорение);

получила бы точка (тело) при действии на нее каждой силы отдельно.

Иначе: положим, что $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$, тогда, если учесть, что $\sum \vec{F}_k = \vec{R}$ или $\sum F_{Xk} = R_X$, $\sum F_{Yk} = R_Y$, $\sum F_{Zk} = R_Z$, можно записать: $ma_X = \sum R_X$, $ma_Y = \sum R_Y$, $ma_Z = \sum R_Z$ (здесь вместо индексов *X*, *Y*, *Z* можно подставить 1, 2, *k*, …, *n*). Тогда левую часть равенства можно записать в виде $ma = m(a_X + a_Y + a_Z) = m\sum a_k$, а все равенство приобретет вид $m\sum a_k = \sum F_k$.

3.2.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Второй закон Ньютона является исходным для составления дифференциальных уравнений движения материальной точки. Ниже будут рассматриваться только случаи, когда масса точки (тела) на протяжении всего движения остается неизменной (постоянной).

В общем случае дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k \qquad \text{или} \qquad ma = \sum F_k ,$$

где m – масса точки;

a – ускорение точки;

$\sum F k = R$ – равнодействующая сил, приложенных к точке.

Для того, чтобы уравнение имело вид уравнения с производными, то есть вид дифференциального уравнения, его записывают в виде $m\ddot{x} = \sum F_k$ (если движение точки в плоскости, то записывается и второе уравнение «для оси *y*», если в пространстве, то записывается и третье уравнение «для оси *z*»).

Пример. Пусть на материальную точку действуют одновременно несколько сил, среди которых есть как постоянные, так и переменные. Запишем для этого случая второй закон динамики в виде $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{R}(t, \vec{r}, \vec{V})$. Проекции этого векторного равенства на оси декартовых координат имеют вид

$$ma_X = m\ddot{x} = \sum F_{Xk} ;$$

$$ma_Y = m\ddot{y} = \sum F_{Yk} ;$$

$$ma_Z = m\ddot{z} = \sum F_{Zk} ,$$

Эти уравнения являются дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых осях координат. В проекции на натуральные оси уравнения имеют следующий вид:

$$ma_\tau = m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k_\tau} ;$$

$$ma_n = m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{k_n} ;$$

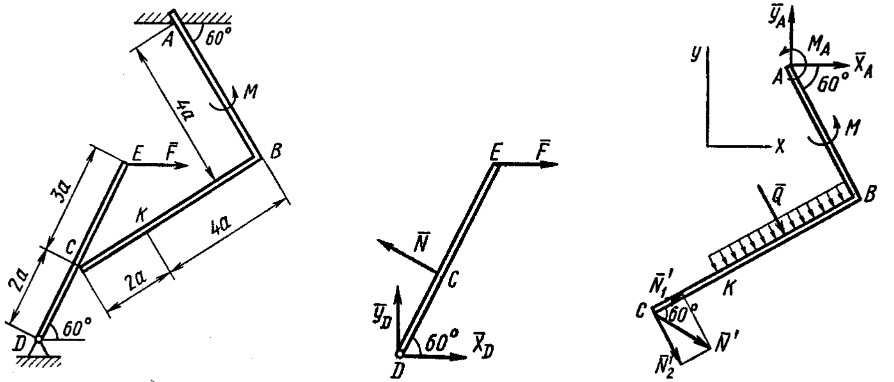
$$ma_b = m \cdot 0 = \sum F_{k_b} .$$

Такие уравнения являются естественными дифференциальными уравнениями движения, которые обычно применяются при изучении криволинейного движения точки, если траектория ее движения и радиус кривизны траектории известные.

то есть всего $6N$ уравнений (обычно $3N$ уравнений для проекций сил на три координатных оси и $3N$ уравнений для моментов сил относительно координатных осей); если система сил двухмерная, то условия равновесия в аналитической форме будут представлять собой N условий равновесия плоской системы сил – по одному условию для каждого тела, то есть всего $3N$ уравнений (по обыкновению $2N$ уравнений для проекций сил на две координатных оси и N уравнений для моментов сил относительно избранного центра).

При решении задач о равновесии системы тел можно рассматривать равновесие как системы тел в целом, так и любых сочетаний тел.

Пример. На угольник *ABC*, один конец которого жестко защемлен, в точке *C* опирается стержень *DE* (см. рис. *а*). Стержень имеет в точке *D* неподвижную шарнирную опору; к стержню приложена сила *F*, а к угольнику – пара сил с моментом *M*.



а) *б)* *в)*

Дано: $F = 10$ кН; $M = 5$ кН·м; $a = 0{,}2$ м.

Определить реакции в точках *A*, *C*, *D*, вызванные действующими нагрузками.

Решение. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня *DE* (см. рис. *б*). Проведем координатные оси *Oxy* и изобразим действующие на стержень силы: силу $\vec{F}$, реакцию $\vec{N}$, направленную перпендикулярно стержню (реакция $\vec{N}$ проявляется в результате действия «отброшенной» части конструкции – угольника *ABC*), составные $\vec{X}_D$ и $\vec{Y}_D$ реакции шарнира *D*. Для полученной плоской системы сил запишем три уравнения равновесия:

$\sum F_{xk} = 0$:	$X_D + F - N \sin 60° = 0$;	(1)
$\sum F_{yk} = 0$:	$Y_D + N \cos 60° = 0$;	(2)
$\sum M_{D(Fk)} = 0$:	$N\,2a - F\,5a \sin 60° = 0$.	(3)

Теперь рассмотрим равновесие угольника *ABC* (рис. *в*). На него действуют сила давления $\vec{N}'$ стержня, которая направлена противоположно прежде установленной реакции $\vec{N}$, пара сил с моментом *M* и реакция жесткой заделки, которая состоит из силы, которую представим составляющими X_A, Y_A, и парой с моментом M_A. Для этой плоской системы сил запишем три уравнения равновесия:

$\sum F_{xk} = 0$: $X_A + N' \sin 60° = 0$; (4)

$\sum F_{yk} = 0$: $Y_A - N' \cos 60° = 0$; (5)

$\sum M_{A(Fk)} = 0$: $M_A + M + N' \cos 60° \cdot 4a + N' \sin 60° \cdot 6a = 0$. (6)

Решим 6 уравнений как систему относительно неизвестных реакций связей. При решении учтем, что согласно закону равенства действия и противодействия значения N' равняется N.

Из уравнения (3):

$$N = \frac{F5a\sin 60°}{2a} = \frac{10\cdot 5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}866}{2\cdot 0{,}2} = 21{,}65 \text{ кН};$$

Из уравнения (2):

$$Y_D = -N\cos 60° = -21{,}65\cdot 0{,}5 = -10{,}83 \text{ кН};$$

Из уравнения (1):

$$X_D = -F + N\sin 60° = -10 + 21{,}65\cdot 0{,}866 = 8{,}75 \text{ кН};$$

Из уравнения (4):

$$X_A = -N'\sin 60° = -21{,}65\cdot 0{,}866 = 18{,}75 \text{ кН};$$

Из уравнения (5):

$$Y_A = N'\cos 60° = 21{,}65\cdot 0{,}5 = 10{,}83 \text{ кН};$$

Из уравнения (6):

$$M_A = -M - N'\cos 60°\cdot 4a - N'\sin 60°\cdot 6a =$$
$$= -5 - 21{,}65\cdot 0{,}5\cdot 4\cdot 0{,}2 - 21{,}65\cdot 0{,}866\cdot 6\cdot 0{,}2 = -36{,}16 \text{ кН};$$

Модуль полных реакций связей точек A и D определим как сумму их составляющих:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-18{,}75)^2 + 10{,}83^2} = 21{,}65 \text{ кН};$$

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{8{,}75^2 + (-10{,}83)^2} = 13{,}92 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -18{,}75$ кН, $YA = 10{,}83$ кН, $RA = 21{,}65$ кН, $M_A = -36{,}16$ кН·м, $XD = 8{,}75$ кН, $YD = -10{,}83$ кН, $RD = 13{,}92$ кН, $N = 21{,}65$ кН. Знаки указывают, что силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_D$ и момент M_A имеют направления, противоположные показанным на рисунках.

1.14. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Статически определенные системы – *это системы, в которых число неизвестных величин не превышает числа независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы сил.*

Статически неопределенные системы – *это системы, в которых число неизвестных величин превышает число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы сил.*

ускорение, которое она получает под действием данной силы, равняется по модулю этой силе, а ее направление совпадает с направлением ускорения, то есть $m\vec{a} = \vec{F}_k$.

При постоянной силе (F = const) ускорение также постоянно (a = const), при этом движение точки будет равнопеременным; в общем случае также можно считать, что при $a > 0$ движение будет ускоренным, при $a < 0$ движение будет замедленным.

При $F = 0$ ускорение $a = 0$, а движение точки будет равномерным и прямолинейным или, если $V_0 = 0$, то тело будет покоиться (закон инерции).

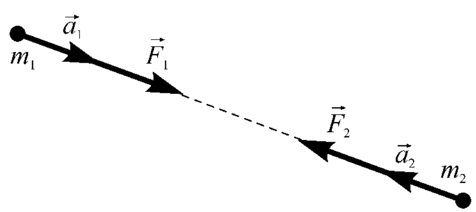
Второй закон позволяет установить связь между массой m тела, которое находится близ поверхности Земли, и его весом: $G = mg$, где g – ускорение свободного падения, которое возле поверхности земли в приблизительных расчетах приравнивается 9,81 м/с^2.

Второй закон также называется законом инерции и относится исключительно к состояниям покоя и движения. Он утверждает: «Всякое тело сохраняет своё состояние покоя или прямолинейного и равномерного движения до тех пор, пока действие сил не выведет его из такого состояния». Это означает, что, если на тело начала действовать сила, то оно или приходит в движение из состояния покоя, или меняет свое прямолинейное движение на непрямолинейное (или меняет кривизну траектории движения) или движение тела прекращается, замедляется или ускоряется. Если же ни одно из этих изменений в движении не наблюдается, то есть, если тело покоиться или движется равномерно и прямолинейно, то на тело не действует никакая сила (или же система сил, которая действует на тело, уравновешена), даже как бы стремительно оно не двигалось.

Прим. Из второго закона вытекает: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$, то есть любая сила способна изменить движение или состояние покоя свободного тела.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). *Две материальные точки действуют друг на друга с равными по величине и противоположными по направлению силами.*

Рассмотрим это на примере взаимодействия двух тел, которые имеют массы m_1 и m_2 (см. рис.)



Так как $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и они приложены к разным телам (или точкам одного тела), то можно записать: $F_1 + F_2 = 0$. Но $F_1 = m_1a_1$ и $F_2 = m_2a_2$, тогда $m_1a_1 = m_2a_2 \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{a_2}{a_1}$, то есть отношение масс взаимодействующих точек или тел обратно пропорционально их ускорениям.

Четвертый закон (закон независимости действия сил или принцип суперпозиции). *Ускорения, которое получает точка (тело) при действии на нее одновременно нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые* тела его инертность меняется.

В классической механике масса тела, которое движется, принимается равной массе тела, которое покоится, то есть она рассматривается как постоянная величина, которая является мерой инертности тела и его гравитационных свойств.

Сила – *мера механического взаимодействия материальных тел* (то есть сила есть объективная причина, которая является результатом взаимодействия материальных объектов, способна вызвать их движение из состояния покоя или изменить их существующее движение).

В динамике рядом с постоянными силами ($F = \text{const}$) имеют место и переменные силы, которые могут зависеть от времени t, то есть $F = F(t)$, скорости V, то есть $F = F(V)$, расстояния S, то есть $F = F(S)$, или от совокупности этих величин, например $F = F(t;V;S)$.

Примеры сил, которые меняются: при падении тела с небольшой высоты на него действует вес, то есть постоянная по величине сила тяготения, и действует сила сопротивления окружающей среды, которая зависит от скорости падения; аккумуляторный электровоз при движении развивает силу тяги, которая меняется в зависимости от скорости (во время интенсивного разгона сила тяги значительная), от пройденного пути (при разряде аккумуляторной батареи сила тяги уменьшается), от времени (при изнашивании аккумуляторной батареи и узлов электровоза сила тяги уменьшается).

Система отсчета – *система координат, связанная с телом, относительно которого изучается движение другого тела.*

Инерциальная система – *неподвижная система координат* (или система координат, которая движется равномерно и прямолинейно поступательно). В этой системе выполняются первый и второй законы динамики.

Система единиц – *это совокупность единиц измерения физических величин*. Основными являются три параметра: линейный размер, время, масса (или сила). Все другие единицы измерения механических величин – производные от этих. Например, сила в 1 Н – это сила, которая сообщает массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2, то есть 1 Н = 1 кг·м/с^2 – производная единица.

3.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

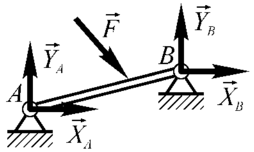
3.2.1. Законы динамики материальной точки

Законы динамики материальной точки также носят название законов Галилея-Ньютона.

Первый закон (закон инерции). *Изолированная от внешних влияний материальная точка сохраняет свой состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.*

Движение точки при отсутствии сил или под действием уравновешенной системы сил называется движением по инерции. При этом, если начальная скорость постоянная ($V_0 = \text{const}$), то ускорение ровно нулю ($a = 0$) и тело движется с постоянной скоростью, если скорость равна нулю ($V_0 = 0$), то тело покоится.

Второй закон (основной закон динамики). *Произведение массы точки на*



Пример. На балку AB, которая закреплена на шарнирно неподвижных опорах, действует сила $\vec{F}$ (см. рис.). Пользуясь принципом освобождения от вязей, заменяем их действия реакциями $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, которые являются неизвестными величинами.

Для полученной двухмерной системы сил можно составить только 3 независимых уравнения равновесия. Число же неизвестных − четыре реакции связей. Итак, такую задачу решить методами статики невозможно, и поэтому эта задача является статически неопределенной (такую задачу можно решить, если ввести еще одно уравнение, например, описывающее деформацию балки, но рассмотрение деформированных тел не входит в задачи теоретической механики).

Проверь свои знания!

1. Как привести силу к заданному центру?
2. Сформулируйте теорему о приведении произвольной системы сил к простейшему виду (теорему Пуансо).
3. Что такое главный вектор?
4. Что такое главный момент?
5. Как определить модуль главного вектора и главного момента?
6. Как зависит главный момент от выбора центра приведения?
7. Какие существуют случаи приведения системы сил к простейшему виду?
8. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей.
9. Сформулируйте векторное и аналитическое условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
10. Сколько и какие уравнения равновесия можно составить для произвольной двумерной системы сил?
11. Сколько и какие уравнения равновесия можно составить для произвольной пространственной системы сил?
12. Какие силы называются внешними?
13. Какие силы называются внутренними?
14. Сколько и какие уравнения равновесия можно составить для системы сил, которые действуют на систему тел?
15. Какие системы сил называются статически определенными?
16. Какие системы сил называются статически неопределенными?

1.15. ТРЕНИЕ

Полезно или вредно трение? Но ведь, если бы не было трения, мы не могли бы ходить по земле (вспомните, как скользят ноги на льду), нельзя было бы ездить на велосипеде, автомобиле, мотоцикле (колеса вращались бы на месте), нам незачем было бы носить одежду (нити в ткани держатся силами трения). Если не было бы трения, вся мебель в комнате сбились бы в один угол, тарелки, стаканы и блюдца соскальзывали бы со стола, гвозди и шурупы не держались бы в стене, ни одной вещи нельзя было бы удержать в руках… К этому можно добавить, что, если бы не было трения, неизвестно, как пошло бы развитие цивилизации на

Земле, ведь наши предки извлекали огонь трением.

Перечень подобных «ужасов» можно продолжать бесконечно, но и так ясно, что трение явление отнюдь не вредное. Оно вредно только в машинах, да и то не в каждом их месте, и инженеры борются там с ним, применяя шарикоподшипники, смазывание и т.п.

При перемещении одного тела по поверхности другого всегда возникает сила, которая препятствует движению, которая и называется силой трения.

Трение − следствие многих причин, но основными из них являются две. Во-первых, поверхности тел всегда неровные, и шероховатости одной поверхности цепляются за шероховатости другой. Это так называемое геометрическое трение. Даже наигладчайшие на глаз поверхности оказываются под микроскопом шероховатыми, с впадинами и выступами. Во-вторых, если тела очень гладкие, то они очень близко соприкасаются друг с другом, и на их движении сказывается взаимодействие молекул (молекулярное трение). Поэтому формулу для силы трения можно написать так: $F_{TP} = \alpha N + \beta S$, где α и β − постоянные коэффициенты; N − сила нормального давления; S − площадь контакта трущихся поверхностей тел. Так как площадь контакта не очень мала, то деформации касательных тел незначительные.

Приведенная формула сложна, и потому инженеры в своих расчетах пользуются более простой формулой: $F_{TP} = fn$. Она читается так: сила трения пропорциональна силе нормального давления. Коэффициент пропорциональности f называется коэффициентом трения и является величиной безразмерной.

1.15.1. Законы трения

1. *Сила трения* $\vec{F}_{TP}$ *направлена противоположно возможному или действительному направлению движения тела.*

2. *Сила трения не зависит от площади соприкасаемых поверхностей* (полагается, что из-за относительно большой площади соприкосновения тела не разрушают друг друга).

3. *Коэффициент трения скольжения f зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей.*

4. *Максимальная сила трения пропорциональна нормальному давлению N и коэффициенту трения f*, то есть $F_{TP\max} = fn$. Максимальная величина силы трения скольжения покоя достигается на грани покоя и движения тела.

Под нормальным давлением понимают полное давление на всю площадь контакта трущихся поверхностей.

Законы трения справедливы только для сухого трения (при наличии смазывающей жидкости трение происходит между слоями вещества, а не между поверхностями).

Можно проверить на опыте, что сила трения зависит только от качества трущихся поверхностей и силы нормального давления, а от площади соприкосновения не зависит: если положить два одинаковых деревянных бруска на книгу плашмя и ребром (узкой стороной; см. рис.) и поднимать один конец книги, то бруски начнут скользить вниз одновременно при одном значении угла. Это говорит о том, что сила трения не зависит от площади контакта поверхностей.

РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА

Динамика – *раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел (точек) под действием приложенных сил, которые являются причиной этого движения.*

Раздел «динамика» подразделяется на динамику материальной точки, динамику системы материальных точек (динамику механической системы) и динамику твердого тела.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

При изучении раздела «Динамика» дисциплины «Теоретическая механика» все ранее определённые основные понятия в разделах «Статика» и «Кинематика» несколько расширяются, что связано с изучением новых механических свойств – динамики, то есть движения реальных объектов под действием приложенных к ним сил. Поэтому ниже приведены новые, а также уже известные основные понятия классической механики, но под новым углом зрения.

Материальная точка – *простейшая модель материального тела.* При этом точка имеет массу, равную массе тела, которое моделируется, а ее размеры настолько малы, что ими при движении тела можно пренебречь. Также за точку можно принять тело конечных размеров, если оно движется поступательно. На материальные точки также можно мысленно разбить твердое тело при определении некоторых его динамических характеристик.

Примерами материальных тел, которые двигаются и которые можно представить как точку, могут быть: Земля, если рассматривается ее движение вокруг Солнца, так как ее размеры значительно меньше «размеров» траектории, то есть орбиты Земли; при поступательном движении твердого тела его можно представить в виде материальной точки, так как все точки тела имеют одинаковые кинематические параметры движения (скорости, ускорение, траектории…); вращение тела вокруг оси, при этом все частицы тела можно уподобить материальным точкам.

Инертность – *свойство материальных тел быстрее или медленнее менять скорость своего движения под действием приложенных сил.*

Масса тела – *скалярная положительная величина, которая определяет меру инертности тела при поступательном движении* (зависит от количества вещества, которая вмещается в данном теле). Размерность (единица измерения) массы – килограмм (кг).

С одной стороны, масса тела определяется как мера его инертности (инертная масса). С другой стороны, термин «масса» применяется в содержании способности тела создавать поле тяготения и испытывать действие силы в этом поле (тяготеющая или весомая масса). Инертность и способность создавать поле тяготения представляют совсем разные проявления свойств материи, однако, оба свойства всегда существуют совместно, а их числовые характеристики пропорциональны друг другу.

Теория относительности утверждает, что масса и энергия связаны неразрывно друг с другом. Всякое изменение энергии системы сопровождается изменением его инертной массы. Из этого вытекает, что с ростом скорости движения

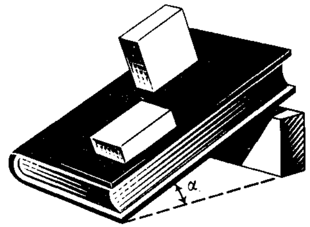
$$\sum a_X = a_{e(X)}^{Ц} + a_{e(X)}^{ВР} + a_{r(X)}^{\tau} + a_{r(X)}^{n} + a_{K(X)} = (-1)+(-4)+0+(-2,47)+(-2,22) = -9,69 \text{ м/с}^2;$$

$$\sum a_Y = a_{e(Y)}^{Ц} + a_{e(Y)}^{ВР} + a_{r(Y)}^{\tau} + a_{r(Y)}^{n} + a_{K(Y)} = (-1)+4+(-3,14)+0+(-2,22) = -2,36 \text{ м/с}^2.$$

Окончательно $a_{АБС} = \sqrt{\sum a_X^2 + \sum a_Y^2} = \sqrt{(-9,69)^2 + (-2,36)^2} = 9,97$ м/с².

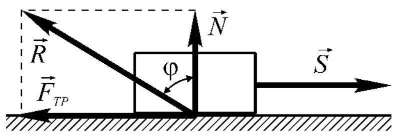
Проверь свои знания!

1. Какое движение точки называется сложным?
2. Какое движение точки называется абсолютным?
3. Какое движение точки называется относительным?
4. Какое движение точки называется переносным?
5. Сформулируйте и запишите теорему о сложении скоростей.
6. Сформулируйте и запишите теорему о сложении ускорений.
7. Что характеризует ускорение кориолиса?
8. В каких случаях ускорение кориолиса равно нулю?
9. Как определить значение модуля вектора ускорения кориолиса?
10. Как определить направление вектора ускорения кориолиса?
11. Сформулируйте правило векторного произведения и правило Жуковского для определения направления вектора ускорения кориолиса.



Вместо брусков можно взять спичечные коробки, в которые для веса насыпать песок. Только коробки надо обклеить бумагой, чтобы все стороны были одинаковы с точки зрения трения.

Для определения коэффициента трения необходимо замерять динамометром силу, необходимую для перемещения одного тела по поверхности другого, и разделить полученное значение силы на вес тела. Найденные коэффициенты для тел, изготовленных из разных материалов, вносятся в справочники. Нужно только помнить, что в них приведены значения коэффициентов трения для чистых гладких поверхностей, а при решении практических задач надо учитывать, что на телах может быть ржавчина, окислы, пыль и другие посторонние включения, которые, безусловно, влияет на величину коэффициента трения.



Выясним механику трения. Для этого рассмотрим тело весом $\vec{P}$ (например, книга), которое покоится на горизонтальной шероховатой поверхности (на столе). При этом реакция поверхности (нормальное давление) $\vec{N} = -\vec{P}$ (см. рис.; вес $\vec{P}$ для удобства не показан).

Приложим к телу силу $\vec{S}$, значения которой меняется от нуля до $S_{\max}$. При незначительном увеличении силы $\vec{S}$ тело будет находиться в покое, но при достижении ею некоторого значения тело выйдет из состояния покоя и придет в движение. Таким образом, чтобы передвигать тело по шероховатой поверхности необходимо преодолеть сопротивление движения.

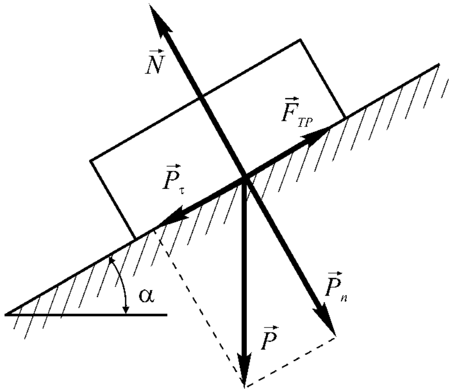
Сопротивление возможному движению (в случае, когда тело движется – то действительному движения) появляется реакция $\vec{R}$ опоры, которая образует угол φ с нормалью $\vec{N}$. Разложив реакцию опоры на составляющие, имеем: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{TP}$, где $\vec{F}_{TP}$ – сила трения.

Различают силу трения покоя и движения, которые направлены в сторону, противоположную возможному или действительному движению тела.

В случае, если тело еще не движется, то сила трения $\vec{F}_{TP}$ не может превысить активную силу $\vec{S}$. Максимальное значение силы трения покоя пропорционально силе нормальнго давления и достигается в момент выхода тела из положения равновесия, то есть $F_{TP.пок.\max} = N f_{TP.пок.}$, где $f_{TP.пок.}$ – коэффициент трения покоя, величина безразмерная. Также при этом достигает максимума значения угол φ и в этом случае он называется углом трения.

После выхода тела из положения равновесия оно приходит в движение. В этом случае силу трения называют силой трения скольжения, а ее значение $F_{TP} = Nf_{TP}$, где f_{TP} – коэффициент трения скольжения, величина безразмерная.

Экспериментально установлено, что коэффициент трения скольжения несколько меньше коэффициента трения покоя (то есть $f_{TP} < f_{TP.пок.}$) и с увеличением скорости движения для большинства материалов он уменьшается. В технических расчетах чаще всего принимают $f_{TP} = f_{TP.пок.}$.



Пример. Тело покоится на шероховатой наклонной поверхности (см. рис.). Значение коэффициента трения между телом и поверхностью равно f. Определить значение угла α, при котором тело начнет скользить по поверхности.

Решение. Разложим вес тела $\vec{P}$ на составляющие – нормальную $\vec{P}_n$ и касательную $\vec{P}_\tau$, при этом $P_n = P\cos(\alpha)$, $P_\tau = P\sin(\alpha)$. Нормальная составляющая характеризует давление тела на поверхность, которая проявляет реакцию, при этом $\vec{N} = -\vec{P}_n$ или $N = P\cos(\alpha)$.

Касательная составляющая (называется скатывающей силой) содействует движению тела по поверхности, а сила трения $\vec{F}_{TP}$ препятствует ему. Как известно, максимальное значение силы трения (в этом случае – трение покоя) определяется согласно выражению $F_{TP.пок\max} = N f_{TP.пок.} = P\cos(\alpha) f_{TP.пок.}$. Тело придет в движение, когда значение P превысит значение $F_{TP.пок.\max}$, то есть – когда выполнится предельное условие $P_\tau = F_{TP.пок.\max}$ или $P\sin(\alpha) = P\cos(\alpha) f_{TP.пок.}$. Преобразовав последнее уравнение, а также учтя, что $f_{TP.пок.} = f_{TP}$, получим

$$\frac{P\sin(\alpha)}{P\cos(\alpha)} = f_{TP} \Rightarrow \mathrm{tg}(\alpha) = f_{TP} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}(f_{TP}) .$$

Последнее уравнение показывает взаимосвязь между максимальным углом наклона поверхности α, на которой тело еще находится в покое, и коэффициентом трения f_{TP} между этой поверхностью и телом.

1.15.2. Угол и конус трения

Известно, что при наличии трения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой поверхности отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол φ (см. выше), который в случае выхода тела из равновесия достигает максимума и называется углом трения. Тангенс угла трения равен коэффициенту трения, то есть tg φ = f.

Если силу $\vec{S}$ приложить сначала к телу в направлении вправо, затем – влево, затем – «на нас», затем – «от нас» и т.д. во всех направлениях по горизонтали вокруг тела, то вектор силы $\vec{R}$ очертит в пространстве конус с вершиной в точке соприкосновения тела. Этот конус называется конусом трения.

сте с диском вокруг шарнира O.

Определим модуль центростремительного ускорения в переносном движении (переносное центростремительное ускорение) $a_e^Ц = \omega_e^2 h$.

В момент времени t = 1 с: $a_e^Ц = 1^2 \cdot 1{,}41 = 1{,}41$ м/с^2.

Вектор $\vec{a}_e^Ц$ направлен к оси переносного вращения, то есть к точке O (см. рис.).

Определим модуль вращательного ускорения в переносном движении (переносное вращательное ускорение) $a_e^{BP} = \varepsilon_e h$. Здесь ε_e – угловое ускорение точки M_1 в ее переносном вращении, $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 4$.

В момент времени t = 1 с: $\varepsilon_e = 4$ с$^{-2}$; $a_e^{BP} = 4 \cdot 1{,}41 = 5{,}64$ м/с^2.

Так как знак ε_e противоположен знаку ω_e (см. пример выше), то и направление ε_e противоположно направлению ω_e и, следовательно, вектор $\vec{a}_e^{BP}$ направлен согласованно с направлением ω_e, то есть противоположно вектору $\vec{V}_e$ (см. рис.).

Определим модуль ускорения кориолиса:

$$a_K = 2\omega V_r \sin(\widehat{\vec{\omega};\vec{V}_r}) = 2 \cdot 1 \cdot 1{,}57 \sin 90 = 3{,}14 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора $\vec{a}_K$ определим по правилу Жуковского: так как вектор $\vec{V}_r$ находится в плоскости, которая перпендикулярна оси переносного вращения (то есть $\vec{V}_r$ и его проекция на плоскость, которая перпендикулярна оси переносного вращения, совпадают), то для определения направления $\vec{a}_K$ достаточно повернуть $\vec{V}_r$ на 90° в направлении переносного вращения ω_e (см. рис.).

Определим модуль абсолютного ускорения $a_{АБС}$ точки M. Для этого сначала установим координатные оси Oxy и спроецируем на них векторы ускорений:

$a_{e(X)}^Ц = -a_e^Ц \cos 45 = -1{,}41 \cos 45 = -1$ м/с^2;

$a_{e(Y)}^Ц = -a_e^Ц \sin 45 = -1{,}41 \sin 45 = -1$ м/с^2;

$a_{e(X)}^{BP} = -a_e^{BP} \cos 45 = -5{,}64 \cos 45 = -4$ м/с^2;

$a_{e(Y)}^{BP} = a_e^{BP} \cos 45 = 5{,}64 \cos 45 = 4$ м/с^2;

$a_{r(X)}^\tau = a_r^\tau \cos 90 = 0$ м/с^2;

$a_{r(Y)}^\tau = -a_r^\tau \sin 90 = -3{,}14 \sin 90 = -3{,}14$ м/с^2;

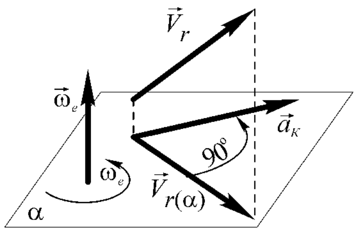
$a_{r(X)}^n = -a_r^n \cos 0 = -2{,}47 \cos 0 = -2{,}47$ м/с^2;

$a_{r(Y)}^n = a_r^n \sin 0 = 0$ м/с^2;

$a_{K(X)} = -a_K \cos 45 = -3{,}14 \cos 45 = -2{,}22$ м/с^2;

$a_{K(Y)} = -a_K \sin 45 = -3{,}14 \sin 45 = -2{,}22$ м/с^2.

Складываем проекции на соответствующие оси:



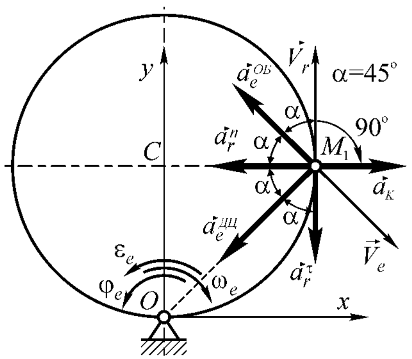
– правило Жуковского (см. рис.): вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ проецируется на плоскость α, которая перпендикулярна вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$ (получаем вектор $\vec{V}_{r(\alpha)}$), а затем эта проекция поворачивается в плоскости α на угол 90° по направлению переносной угловой скорости ω_e.

Кориолисово ускорение $\vec{a}_K$ будет равно нулю, если:

– $\vec{\omega}_e = 0$, в этом случае переносное движение является поступательным;

– $\vec{V}_r = 0$, в этом случае относительная скорость равняется нулю (в этом случае теряется смысл сложного движения точки);

– $\sin(\vec{\omega}_e;\hat{\vec{V}_r}) = 0 \Rightarrow (\vec{\omega}_e;\hat{\vec{V}_r}) = \begin{cases} 0; \\ 2\pi. \end{cases}$, то есть вектор угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ параллелен вектору относительной скорости $\vec{V}_r$.



Пример. Для условий из предыдущего примера, определить абсолютное ускорение точки (см. рис.).

Решение. Абсолютное ускорение найдем по формуле

$$\vec{a}_{АБС} = \vec{a}_e^{Ц} + \vec{a}_e^{ВР} + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_K .$$

Определим ускорение относительного движения при движении точки M_1 по краю диска, то есть вокруг его центра C.

Определим касательное ускорение в относительном движении (касательное относительное ускорение)

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = 0{,}5\pi R(4 - 6t) .$$

В момент времени $t = 1$ с: $a_r^\tau = 0{,}5\pi \cdot 1(4 - 6 \cdot 1) = -3{,}14$ м/с^2.

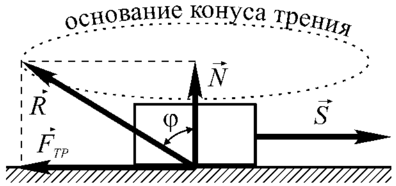
Вектор $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной к линии траектории относительного движения точки M_1. Так как знак a_r^τ противоположен знаку V_r, то вектор $\vec{a}_r^\tau$ направлен противоположно вектору $\vec{V}_r$ (см. рис.).

Определим модуль нормального ускорения в относительном движении (нормальное относительное ускорение) $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$.

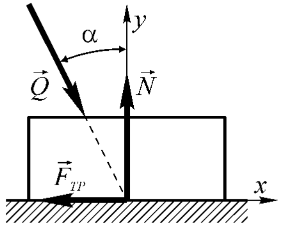
В момент времени $t = 1$ с: $a_r^n = \dfrac{1{,}57^2}{1} = 2{,}47$ м/с^2.

Вектор $\vec{a}_r^n$ направлен к центру относительного движения (см. рис.).

Определим ускорение переносного движения при вращении точки M_1 вме-



Таким образом, конус трения – это конус, описанный полной реакцией $\vec{R}$ как образующей вокруг направления самой большой по значению нормальной реакции. Если коэффициент трения f во всех направлениях одинаковый, то конус трения будет круговым (см. рис.).



Пример. На тело, которое находится на шероховатой горизонтальной поверхности, действует сила Q под углом α к нормали (см. рис.). Определить, выйдет ли тело из положения равновесия, если коэффициент трения равняется f.

Решение. Положим, что действие силы Q на тело не выводит его из равновесия.

Рассмотрим двухмерную уравновешенную систему сходящихся сил. Составим для нее два уравнения равновесия:

$\sum f_{xk} = Q \sin \alpha - FTP = 0;$

$\sum f_{yk} = -q \cos \alpha + N = 0.$

Из уравнений находим: $N = Q \cos \alpha$; $\qquad F_{TP} = Q \sin \alpha$.

Так как тело под действием силы $\vec{Q}$ находится в равновесии, то $F_{TP} \le fn$. Тогда последнее уравнение можно записать так:

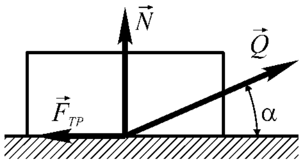
$$Q \sin \alpha \le fn \quad \text{или} \quad Q \sin \alpha \le fq \cos \alpha \Rightarrow \frac{Q \sin \alpha}{Q \cos \alpha} \le f \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha \le f.$$

Таким образом, если (tg α) < f (или угол α меньше угла трения φ), то тело не может быть выведено из состояния равновесия действием силы Q любой величины.

Для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая активных (внешних) *сил находилась внутри конуса трения или проходила по его образующий.*

Уметь строить конус трения нужно по разным причинам. Например, однажды в Мюнхене разрушился мост не из-за действия ураганного ветра или полка солдат, которые шли в ногу, а из-за конусу трения. Мост всегда крепят, чтобы он не искривлялся при колебаниях температуры, таким образом: одним своим концом мост крепится с помощью шарнира, а другим – ложится на катки. Шарнир был заполнен пастой для защиты его от коррозии. В жаркий летний день паста растопилась, вязкость ее стала меньше, и трени также уменьшилось. Конус трения сузился, и сила давления на сопротивлении вышла за пределы конуса. Равновесие нарушилось, и мюнхенский мост рухнул.

С конусом трения имеют дело не одни только инженеры, а и любой из нас каждый день сталкивается с этим физическим явлением: чтобы пробраться к выходу в переполненном городском транспорте, приходится извиваться ужом, и делаем мы это бессознательно, не задумываясь, что таким способом выходим из конусов трения в местах соприкосновения с другими пассажирами.



Пример. Под каким углом α (см. рис.) выгоднее всего тянуть веревку, чтобы перемещать груз весом P по горизонтальной поверхности?

Решение. Спроецируем все силы, которые действуют на груз весом P (вес P условно не показан), на горизонтальную и вертикальную оси.

Запишем два уравнения равновесия:

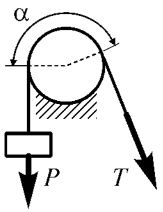
$Q\cos\alpha - fn = 0$;

$Q\sin\alpha + N - P = 0$.

Найдем силу Q: $Q = \dfrac{P\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)}$. Очевидно, что сила Q будет минимальной, если знаменатель будет самым большим, что возможно, если $\alpha = \varphi$. Таким образом, выгоднее всего тело тянуть под углом α, равным углу трения φ.

Формула Эйлера позволяет рассчитать силу, с которой необходимо тянуть за конец нити, перекинутой через неподвижный блок, чтобы поднимать груз весом P.

Пример. С какой силой T надо тянуть за трос, перекинутый через неподвижный блок, чтобы поднять груз весом $\vec{P}$ (см. рис.), если коэффициент трения троса по блоку равен f?



Решение. Если бы трение отсутствовало, то, поднимая груз, пришлось бы прикладывать силу $\vec{T}$, в точности равную весу груза $\vec{P}$. Так как между тросом и блоком существует трение, то, чтобы поднять груз, необходимо приложить силу $\vec{T} > \vec{P}$. Сила $\vec{T}$, которая необходима для поднятия груза $\vec{P}$, вычисляется по формуле Эйлера: $T = Pe^{f\alpha}$. Здесь e – основание натуральных логарифмов, f – коэффициент трения, α – угол обхвата блока тросом (нитью), выраженный в радианах.

Пример. Какую силу необходимо приложить, чтобы удержать морской корабль у пристани с помощью каната, намотанного на причальную тумбу. Корабль тянет канат с силой в 1 МН = 10^6 Н. Коэффициент трения мокрого каната о железную тумбу равен 0,35.

Решение. Предположим, что матрос обернул канат вокруг тумбы три раза. Тогда угол обхвата тумбы канатом $\alpha = 6\pi$. В соответствии с формулой Эйлера получим уравнение $10^6 = Pe^{6\pi\cdot 0,35}$, из которого находим $P = 10^6/e^{6\pi\cdot 0,35} \approx 1364$ Н ≈ 139 кг. Если обернуть трос, например, 4 раза, то для удержания судна нужна сила приблизительно 151 Н (≈15 кг), если 5 раз, то 17 Н (≈1,7 кг) (обычно матрос, обернув канат несколько раз вокруг тумбы, придерживает его свободный конец, прижимая ногой).

Формула Эйлера «работает» и тогда, когда завязываются шнурки на ботинках, так как узел – это веревка, обвитая вокруг другой части той же веревки, и прочность узла тем больше, чем на больший угол выгибается шнурок «вокруг самого себя» в узле.

геометрической сумме переносного $\vec{a}_e$, относительного $\vec{a}_r$ и кориолисова $\vec{a}_K$ ускорений:

$\vec{a}_{АБС} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K$.

Ускорение кориолиса характеризует:

– изменение значения переносной скорости точки вследствие ее относительного движения;

– изменение направления вектора относительной скорости вследствие криволинейного переносного движения.

Кориолисово ускорение определяется по формуле

$\vec{a}_K = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$.

Модуль ускорения кориолиса вычисляется по формуле

$a_K = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e;\vec{V}_r})$.

При криволинейных относительном и переносном движениях абсолютное ускорение определяется по формуле

$\vec{a}_{АБС} = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_K$.

Прим. Как известно, при вращательном движении нормальное ускорение принято называть центростремительным, а касательное – вращательным, в связи с чем последняя формула по сути верна и для вращательного движения.

Модуль абсолютного ускорения определяется по проекциям на координатные оси:

$a_{АБС} = \sqrt{\sum a_X^2 + \sum a_Y^2 + \sum a_Z^2}$,

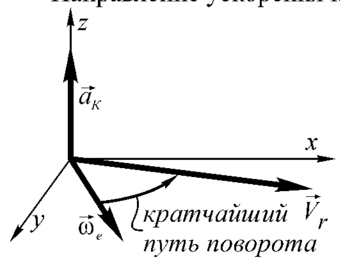
где $\sum a_X$, $\sum a_Y$ и $\sum a_Z$ – соответственно сумма проекций относительного, переносного и кориолисова ускорений на координатные оси x, y и z,

$\sum a_X = a_{e_X}^n + a_{e_X}^\tau + a_{r_X}^n + a_{r_X}^\tau + a_{K_X}$;

$\sum a_Y = a_{e_Y}^n + a_{e_Y}^\tau + a_{r_Y}^n + a_{r_Y}^\tau + a_{K_Y}$;

$\sum a_Z = a_{e_Z}^n + a_{e_Z}^\tau + a_{r_Z}^n + a_{r_Z}^\tau + a_{K_Z}$.

Направление ускорения кориолиса определяется по одному из двух правил:



– правило векторного произведения (см. рис.): ускорение кориолиса направлено перпендикулярно плоскости, в которой расположенные векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$, в ту сторону, откуда поворот $\vec{\omega}_e$ к $\vec{V}_r$ кратчайшим путем (через наименьший угол) видно против хода часовой стрелки;

Для нахождения угловой скорости точки в ее переносном движении продифференцируем по времени уравнения переносного движения точки $\varphi_e = 2t^2 - 5t$. В результате получим:

$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 4t - 5$.

Радиус h вращения точки в ее переносном движении определим по формуле

$h = |OM_1| = R\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = 1{,}41$ м

Тогда в момент времени $t = t_1 = 1$ с:

$\omega_e = 4 \cdot 1 - 5 = -1$ с$^{-1}$;

$V_e = |-1| \cdot 1{,}41 = 1{,}41$ м/с.

Отрицательное значение ω_e означает, что действительное направление ω_e противоположно направлению положительного отсчета угла φ_e (см. рис.).

Вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии OM_1 и направлен согласованно с переносной угловой скоростью ω_e (см. рис.).

Вектор абсолютной скорости $\vec{V}_{АБС}$ точки M_1 определим графически по формуле $\vec{V}_{АБС} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (результирующий вектор изображен на рисунке).

Определим модуль абсолютной скорости $V_{АБС}$ точки M_1. При рассмотрении треугольника OCM_1 устанавливаем, что величина угла β составляет 45°, а величина угла между векторами $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ составляет 135°.

Согласно формулы для вычисления модуля суммы двух векторов имеем:

$$V_{АБС} = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_eV_r\cos 135^\circ} = \sqrt{1{,}41^2 + 1{,}57^2 + 2\cdot 1{,}41\cdot 1{,}57\cos 135^\circ} = 1{,}15$$
м/с.

Иначе $V_{АБС}$ можно вычислить, если спроецировать векторы $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ на координатные оси x и y (см. рис.), а затем – сложить их проекции и вычислить геометрическую сумму проекций. В результате получим:

$$V_{АБС} = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{(V_{rX} + V_{eX})^2 + (V_{rY} + V_{eY})^2} = \sqrt{(0 + V_e\cos 45^\circ)^2 + (V_r + V_e\sin 45^\circ)^2} =$$
$$= \sqrt{(0 + 1{,}41\cdot\cos 45^\circ)^2 + (1{,}57 - 1{,}41\cdot\sin 45^\circ)^2} = \sqrt{1^2 + 0{,}57^2} = 1{,}15 \text{ м/с.}$$

2.6.1. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Как указано выше, основными параметрами сложного движения точки являются скорость и ускорение. Рассмотрим, как определяется абсолютное ускорение точки при ее сложном движении. Оно, так как и скорость, характеризуется тремя ускорениями.

Относительное ускорение точки $\vec{a}_r$ – *ускорение точки относительно подвижной системы координат.*

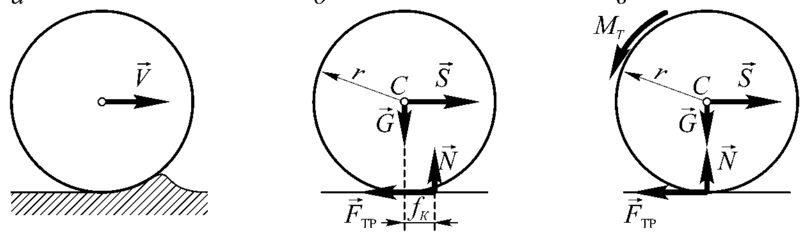
Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ – *ускорение подвижной системы координат относительно основной неподвижной системы координат.*

Абсолютное ускорение точки $\vec{a}_{АБС}$ – *ускорение точки относительно основной неподвижной системы координат.*

Теорема: *Абсолютное ускорение* $\vec{a}_{АБС}$ *точки в сложном движении равно*

1.15.3. Трение качения

При качении тела, например, круглого катка по поверхности, возникает трение качения в результате деформации тела, которое катится, и опорной поверхности, которые в действительности не являются абсолютно твердыми. Если считать, что каток не деформируется, то при него качении по «мягкой» поверхности в результате ее деформации образуется «волна деформаций» (подъем) впереди по направлению качения тела (как волна воды впереди плывущей лодки), в связи с чем колесо постоянно «едет на гору» (см. рис. *а*). Нормальная реакция $\vec{N}$ поверхности при этом смещается относительно центра катка на некоторую величину f_K в сторну движения (см. рис. *б*).

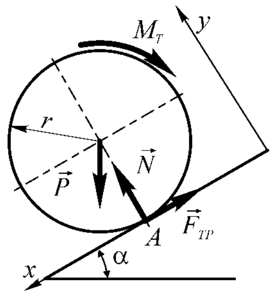


Реакция достигает максимума при движении тела и называется коэффициентом трения качения f_K. Коэффициент трения качения имеет размерность длины (см. рис. *б*). Не смотря на сдвиг нормальной реакции линию ее действия обычно указывают вдоль линии, которая проходит через центр катка, прибавляя при этом к телу пару сил M_T с моментом, который называют моментом трения качения (см. рис. *в*):

$M_T = Nf_K$, при этом $\vec{N} = -\vec{G}$ и $N = G$.

Условие качения колеса без скольжения: $\dfrac{f_K}{r} = \dfrac{M_T}{Nr} \le f_{TP}$, где f_{TP} – коэффициент трения скольжения.

Трение качения, как правило, меньше трения скольжения.



Пример. На наклонной поверхности находится цилиндр радиуса r (см. рис.). Определить, при каком уле α наклона плоскости цилиндр начнет по ней скатываться, если f_{TP} – коэффициент трения скольжения, f_K – коэффициент трения качения.

Решение. Изобразим действующие на цилиндр силы. Силу трения скольжения направим вверх вдоль наклонной поверхности – против направления возможного движения катка. Момент трения качения M_T направим так, чтобы он также препятствовал возможному движению. Установим координатные оси и для полученной уравновешенной двухмерной системы сил составим три уравнения равновесия:

$\sum F_{Xk} = -F_{TP} + P\sin\alpha = 0$;

$\sum F_{Yk} = N - P\cos\alpha = 0$;

$\sum M_A(F_k) = M_T - rP\sin\alpha = 0$.

Решим систему уравнений относительно неизвестных величин:

$$F_{TP} = P\sin\alpha; \qquad M_T = rP\sin\alpha; \qquad N = P\cos\alpha. \qquad (а)$$

Чтобы цилиндр на поверхности покоился, необходимо выполнение следующих условий:

$F_{TP} \le f_{TP}n;$

$M_T \le f_k n.$

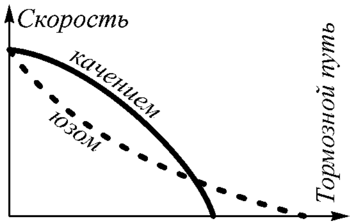
Подставив равенства (*а*) в два последних условия, получим:

$$P\sin\alpha \le f_{TP}P\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha \le f_{TP} \qquad (б)$$

$$rP\sin\alpha \le f_K P\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha \le \frac{f_K}{r} \qquad (в)$$

Таким образом, для равновесия цилиндра на наклонной поверхности необходимо, чтобы одновременно выполнялись два последних неравенства. Если $\frac{f_K}{r} < f_{TP}$, то потеря равновесия цилиндра (его движение) произойдёт за счет его качения по поверхности, т.к. нарушится условие (*в*). Если $\frac{f_K}{r} > f_{TP}$, то потеря равновесия цилиндра (его движение) произойдёт за счет его скольжения по поверхности, т.к. нарушится условие (*б*).

Те, кто ездит на колесном транспорте (автомобиле, мотоцикле, велосипеде), должны знать, как лучше тормозить в экстренных случаях.



На поставленный вопрос отвечает график. Если тормозить скольжением («юзом»), намертво зажимая колеса, то тормозной путь будет длиннее, чем при торможении качением (колеса заторможены, но проворачиваются). Зато при «юзе» скорость сначала падает интенсивнее.

Поэтому при опасности наезда необходимо сначала тормозить юзом. Лучше удариться об препятствие с меньшей скоростью, т.к. энергия удара пропорциональна квадрату скорости. Во всех других случаях надо тормозить качением: и тормозной путь будет короче, и шины меньше изнашиваются.

1.15.4. Трение верчения

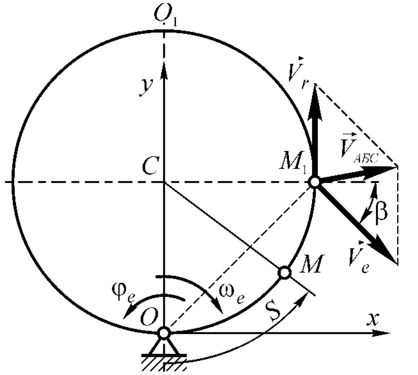
При вращении одного тела на поверхности другого (например, вращение мяча вокруг своей вертикальной оси на поверхности стола), если тела не являются абсолютно твердыми, их взаимный контакт происходит по некоторой площадке. Вращению тела препятствуют силы трения скольжения, которые распределены по площадке контакта и образуют пару сил, которая действует в плоскости контакта. Эта пара сил характеризует так называемое трение верчения, которое оказывает сопротивление вращению одного тела на поверхности другого. Трение вращения характеризуется моментом M_B, предельная величина которого пропорциональна силе нормального давления и вычисляется по формуле: M_B =

Решение задачи об определении абсолютной скорости точки начинают с определения скоростей относительного и переносного движений.

Для определения относительной скорости мысленно останавливают переносное движение (то есть движение подвижной системы координат) и известными способами определяют скорость точки относительно подвижной системы координат.

Для определения переносной скорости известными способами находят скорость подвижной системы координат относительно неподвижной (мысленно останавливать относительное движение, то есть движение точки относительно подвижной системы координат, при этом не обязательно).

Рассмотрим пример, в котором определим абсолютную скорость точки при ее сложном движении.



Пример. Диск вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2t^2 - 5t$ (см. рис.). По ободу диска из точки O движется точка M по закону $|OM| = S = 0{,}5\pi R(2t^2 - t^3)$. Определить абсолютную скорость точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Радиус диска $R = 1$ м.

Решение. Точка M осуществляет сложное движение. Примем, что движение точки M по ободу диска – относительное, а движение диска вместе с точкой M – переносное.

Определим положение точки M на линии траектории относительного движения (то есть – на ободе диска), которое определяется дуговой координатой $S_r = |OM|$ в заданный момент времени. При $t = 1$ с: $|OM| = S_r = 0{,}5\pi R(2 \cdot 12 - 1) = 0{,}5\pi R$.

При таком значении дуговой координаты S_r значение угла $\widehat{OCM} = \dfrac{S_r}{R} = \dfrac{\pi}{2}$ (в этом положении на рисунке изображенная точка M_1).

Находим скорость относительного движения, для чего продифференцируем по времени уравнения относительного движения точки $S_r = 0{,}5\pi R(2t^2 - t^3)$. В результате получим:

$$V_r = \dot{S}_r = 0{,}5\pi R(4t - 3t^2).$$

В момент времени $t = t_1 = 1$ с:

$$V_r = 0{,}5\pi \cdot 1(4 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2) = \pi = 1{,}57 \text{ м/с}.$$

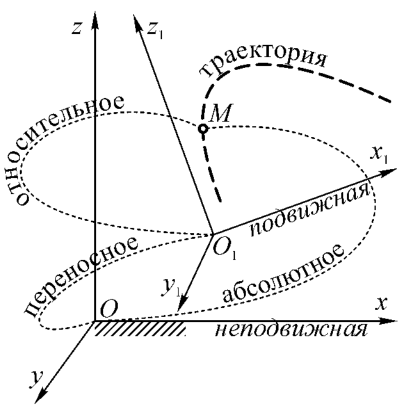
Так как $V_r > 0$, то вектор $\vec{V}_r$ направлен в сторону увеличения координаты S_r (или дуги OM) по касательной к окружности в точке M_1 (см. рис.).

Определим скорость V_e переносного движения. Потому, что переносное движение точки – это вращение ее вместе с диском вокруг точки O, то

$V_e = |\omega_e| h,$

где ω_e – угловая скорость точки в ее переносном движении;

h – радиус вращения.



Сложное движение необходимо «разделить» на два движения – относительное и переносное (см. рис.; для упрощения вагон и перрон на рисунке не показаны, а пассажир представлен как точка M).

Относительное движение – это движение точки M относительно подвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$. Переносное движение – это движение подвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ вместе с точкой M относительно неподвижной (основной) системы отсчета $Oxyz$. Абсолютное движение – это движение точки M относительно основной неподвижной системы отсчета $Oxyz$.

Таким образом, для выше приведенного примера сложного движения необходимо выделить три движения: 1 – относительное (движение пассажира в вагоне относительно подвижной системы координат, которая связана с вагоном); 2 – переносное (движение вагона вместе с пассажиром и подвижной системой координат относительно неподвижной системы координат, которая связана с перроном); 3 – абсолютное (движение пассажира относительно неподвижной системы координат, которая связанная с перроном).

Параметрам относительного движения принято в обозначениях присваивать индекс «r», переносного – индекс «e».

Основными параметрами сложного движения точки являются координаты, скорость и ускорение. Основной задачей при решении задач о сложном движении точки является задача определения ее абсолютных скорости и ускорения.

Рассмотрим, как определяется абсолютная скорость точки при ее сложном движении.

Относительная скорость точки $\vec{V}_r$ – *скорость точки относительно подвижной системы координат.*

Переносная скорость точки $\vec{V}_e$ – *скорость подвижной системы координат относительно основной неподвижной системы координат.*

Абсолютная скорость точки $\vec{V}_{АБС}$ – *скорость точки относительно основной неподвижной системы координат.*

Теорема: *Абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей,* то есть

$$\vec{V}_{АБС} = \vec{V}_r + \vec{V}_e .$$

Если это выражение спроецировать на оси координат, то получим модуль абсолютной скорости:

$$V_{АБС} = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} ,$$

где $V_X = V_{rX} + V_{eX}$; $V_Y = V_{rY} + V_{eY}$,

тогда

$$V_{АБС} = \sqrt{(V_{rX} + V_{eX})^2 + (V_{rY} + V_{eY})^2} .$$

f_Bn, где f_B – коэффициент трения верчения, который имеет размерность длины. Коэффициент трения верчения зависит от условий контакта тел и, как правило, меньше коэффициента трения качения.

Проверь свои знания!

1. Какие составляющие имеет реакция шероховатой поверхности при соприкосновении двух тел?
2. Как определяется и как направлена сила трения скольжения?
3. Что такое угол и конус трения?
4. Чему равен коэффициент трения скольжения и какая его размерность?
5. Сформулируйте законы трения.
6. Будет ли находиться в равновесии тело на шероховатой поверхности, если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения?
7. Что представляет собой коэффициент трения качения и какая его размерность?
8. От чего зависит коэффициент трения качения?
9. Что такое момент сопротивления качения?
10. Объясните понятие «трение верчения».

1.16. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Центр тяжести (ЦТ) − *геометрическая точка, которая неизменно связана с телом и через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, которые действуют на частицы этого тела при любом его положении в пространстве.* Эта точка может не совпадать ни с одной из точек данного тела (например, у кольца). Если свободное тело подвешивать на нити, которые прикрепляются последовательно к разным точкам тела, то направления этих нитей пересекутся в ЦТ тела. Положение ЦТ твердого тела в однородном поле тяготения совпадает с положением центра масс (ЦМ) или центра веса (ЦТ) тела и системы тел.

Предпосылкой для определения ЦТ тела есть такие частные случаи приведения системы параллельных сил в зависимости от значений их главного вектора $\vec{R}_0$ и главного момента $\vec{M}_0$:

$\vec{R}_0 = 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ – система приводится к паре сил, равной главному моменту;

$\vec{R}_0 = 0$, $\vec{M}_0 = 0$ – система находится в равновесии;

$\vec{R}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ – система приводится к равнодействующей;

$\vec{R}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 = 0$ – система приводится к равнодействующей.

Предпоследний случай приведения при «правильном» выборе центра приведения вырождается в последний из приведенных случаев. Именно он и используется при определении положения ЦТ твердого тела (системы тел или точек).

Если твердое тело разбить на отдельные малые части весом $\Delta\vec{G}_k$ (или массой $\Delta\vec{m}_k$), то каждая часть будет притягиваться к Земле, а вектор тяготения будет направлен к ее центру. Так как размеры Земли значительно больше размеров реальных тел, то можно считать, что силы притяжения являются параллельными силами, направленными в одну сторону − вертикально вниз. Равнодействующая $\vec{G} = \sum \Delta\vec{G}_k$ этих параллельных сил является весом тела, а центр C системы параллельных сил, в котором будет приложен вектор силы веса тела, называют ЦТ тела.

Если координаты ЦТ каждой малой части тела обозначить как x_k, y_k и z_k, то координаты ЦТ тела можно определить согласно выражениям

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta G_k}{\sum \Delta G_k}; \qquad y_C = \frac{\sum y_k \Delta G_k}{\sum \Delta G_k}; \qquad z_C = \frac{\sum z_k \Delta G_k}{\sum \Delta G_k}.$$

Прим. В выше приведенных формулах вместо значений веса G_k могут быть подставлены значения массы m_k.

Для однородной пластины, площадь которой равняется S и которая разбитая на отдельные малые части площадью ΔS_k, можно определить ЦТ площади, координаты которого определяются согласно выражениям

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k}; \qquad y_C = \frac{\sum y_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k}.$$

Для однородного стрежня длиной L, в том числе непрямолинейного, разбитого на отдельные малые части длиной Δl_k, координаты ЦТ можно определить согласно выражениям

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta L_k}{\sum \Delta L_k}; \qquad y_C = \frac{\sum y_k \Delta L_k}{\sum \Delta L_k}; \qquad z_C = \frac{\sum z_k \Delta L_k}{\sum \Delta L_k}.$$

Анализ выше приведенных выражений для определения ЦТ позволяет установить методы определения положения ЦТ любого тела.

Метод симметрии состоит в следующем:

– если однородное тело имеет плоскость симметрии, то ЦТ находится на этой плоскости;

– если однородное тело имеет ось симметрии, то ЦТ лежит на этой оси;

– если однородное тело имеет центр симметрии, то ЦТ совпадает с центром симметрии.

Метод разбиения на части, ЦТ каждой из которой известен, используют для нахождения ЦТ тел сложных форм. Тогда в формулы для нахождения координат ЦТ тела входят объемы или площади частей.

Метод отрицательных площадей (масс) удобно применять для определения ЦТ тел сложной формы, которые имеют вырезанные (пустые) части. При этом тело разбивают на части, учитывая, что вырезанные (пустые) части тела имеют отрицательную площадь (массу).

Пример. Определить ЦТ плоской фигуры, изображенной на рисунке. Размеры даны в миллиметрах.

$$a^{BP}_{C(A)} = \varepsilon_{B(A)} \,|\, AC \,| = 0{,}238 \cdot 0{,}7 = 0{,}167 \text{ м/с}^2;$$

$$a^{Ц}_{C(A)} = \omega^2_{B(A)} \,|\, AC \,| = 0{,}64^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}448 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^{BP}_{C(A)}$ направлен согласованно с направлением $\varepsilon_{B(A)}$, а $\vec{a}^{Ц}_{C(A)}$ – вдоль линии, которая проходит через точки C и A от точки C к полюсу A.

Проецируем выражение (4) на координатные оси:

$$a_{Cx} = a^{Ц}_{A} \cos 30^\circ + a^{Ц}_{C(A)} = 120 \cos 30^\circ + 0{,}448 = 104{,}4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -a^{Ц}_{A} \cos 60^\circ - a^{BP}_{C(A)} = -120 \cos 60^\circ - 0{,}167 = -60{,}167 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = \sqrt{a^2_{Cx} + a^2_{Cy}} = \sqrt{104{,}4^2 + (-60{,}167)^2} = 120{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Проверь свои знания!

1. Какое движение твердого тела называется плоским?
2. Из которых движений составляется плоское движение твердого тела и какое движение зависит от выбора полюса?
3. Запишите уравнение плоского движения твердого тела.
4. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
5. Как определить вращательную скорость точки плоской фигуры относительно полюса?
6. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на линию, которая проходит через эти точки?
7. Что называется МЦС?
8. Как определить положение МЦС в общем случае?
9. Как определить скорость любой точки плоской фигуры, если известен МЦС?
10. Как определить ускорение любой точки плоской фигуры?
11. Какая точка называется МЦУ?
12. Как определить ускорение любой точки плоской фигуры, если известен МЦУ?

2.6. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

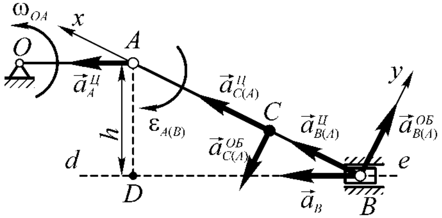
Выше рассмотрены простейшие движения точки и тела, однако в повседневной жизни чаще всего они осуществляют сложное движение.

Сложным движением называют такое движение, при котором точка одновременно принимает участие в двух или больше независимых движениях.

Примером сложного движения может служить следующий.

Пассажир идет по вагону, который движется. Движение пассажира можно рассматривать как сложное, которое складывается из трех движений: 1 – движение пассажира в вагоне; 2 – движение вагона вместе с пассажиром относительно перрона; 3 – движение пассажира относительно перрона.

Для описания такого движения необходимо установить две системы координат: с вагоном жестко свяжем подвижную систему координат; с перроном жестко свяжем основную неподвижную систему координат.



$\vec a_A = \vec a_A^{ВР} + \vec a_A^{Ц}$;

$a_A^{ВР} = \varepsilon\,|OA| = \dot\omega\,|OA| = 0\cdot 0{,}3 = 0$ м/с^2;

$a_A^{Ц} = \omega_{OA}^2\,|OA| = 20^2\cdot 0{,}3 = 120$ м/с^2;

$a_A = a_A^{Ц} = 120$ м/с^2.

Вектор $\vec a_A$ направлен вдоль линии, которая проходит через точки A и O от точки A к точке O.

Определим ускорение a_B точки B:

$$\vec a_B = \vec a_A + \vec a_{B(A)}^{ВР} + \vec a_{B(A)}^{Ц}; \qquad (1)$$

$$a_{B(A)}^{ВР} = |\varepsilon_{AB}|\cdot|AB|;$$

$$a_{B(A)}^{Ц} = \omega_{AB}^2\,|AB| = 0{,}64^2\cdot 1{,}2 = 0{,}49 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec a_{B(A)}^{Ц}$ направлен вдоль линии, которая проходит через точки A и B от точки B к полюсу A.

Определим значение вращательного ускорения ε_{AB}, для чего назначим направление вектора $\vec a_{B(A)}^{ВР}$, при этом учтем, что $\vec a_{B(A)}^{ВР} \perp \overrightarrow{BA}$. Значение угла ABD треугольника ABD равняется $\arcsin\dfrac{h}{|AB|} = \arcsin\dfrac{0{,}6}{1{,}2} = 30^\circ$. Устанавливаем координатные оси Bxy и проецируем на них выражение (1):

– на ось x: $\quad a_B\cos 30^\circ = a_A^{Ц}\cos 30^\circ + a_{B(A)}^{Ц}$; $\qquad$ (2)

– на ось y: $\quad a_B\cos 60^\circ = a_{B(A)}^{ВР} - a_A^{Ц}\cos 60^\circ$. $\qquad$ (3)

Из уравнения (2): $a_B = \dfrac{a_A^{Ц}\cos 30^\circ + a_{B(A)}^{Ц}}{\cos 30^\circ} = \dfrac{120\cdot\cos 30^\circ + 0{,}49}{\cos 30^\circ} = 120{,}57$ м/с^2.

Из уравнения (3): $a_{B(A)}^{ВР} = -a_B\cos 60^\circ + a_A^{Ц}\cos 60^\circ =$

$$= -120{,}57\cdot\cos 60^\circ + 120\cdot\cos 60^\circ = \cos 60^\circ(-120{,}57+120) = \cos 60^\circ(-0{,}57) = -0{,}285 \text{ м/с}^2.$$

Отрицательное значение ускорения $a_{B(A)}^{ВР}$ указывает на то, что истинное направление вектора $\vec a_{B(A)}^{ВР}$ противоположно изображенному на схеме (см. рис.).

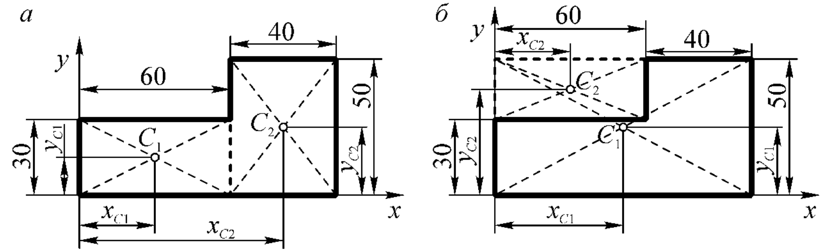
Определим угловое ускорение шатуна AB в его вращении вокруг полюса A:

$$\varepsilon_{B(A)} = \frac{|a_{B(A)}^{ВР}|}{|AB|} = \frac{0{,}285}{1{,}2} = 0{,}238 \text{ с}^{-2.}$$

Направление $\varepsilon_{B(A)}$ – по часовой стрелке (согласованно с действительным направлением вектора $\vec a_{B(A)}^{ВР}$).

Определим ускорение точки C, для чего назначим полюсом точку A и разложим вектор $\vec a_C$ по установленным координатным осям:

$$\vec a_C = \vec a_{Cx} + \vec a_{Cy} = \vec a_A + \vec a_{C(A)}^{ВР} + \vec a_{C(A)}^{Ц}; \qquad (4)$$



Решение. Воспользуемся методом разбиения на части. Разобьем фигуру на два прямоугольника, местоположения ЦТ которых известны и находятся в точках C_1 и C_2 (см. рис. *а*). Определим координаты ЦТ каждой части:

$x_{C1} = 30$ мм; $y_{C1} = 15$ мм;
$x_{C2} = 80$ мм; $y_{C2} = 25$ мм.

Определим площади частей:

$S_{C1} = 30\cdot 60 = 1800$ мм^2;
$S_{C2} = 40\cdot 50 = 2000$ мм^2.

Тогда координаты ЦТ фигуры будут:

$$x_C = \frac{\sum x_k\Delta S_k}{\sum\Delta S_k} = \frac{30\cdot 1800 + 80\cdot 2000}{1800+2000} = 56{,}3 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{\sum y_k\Delta S_k}{\sum\Delta S_k} = \frac{15\cdot 1800 + 25\cdot 2000}{1800+2000} = 20{,}3 \text{ мм}.$$

Для решения этой задачи также воспользуемся методом отрицательных площадей. Разобьем фигуру на два прямоугольника с ЦТ в точках C_1 и C_2 (см. рис. *б*). Определим координаты ЦТ частей:

$x_{C1} = 50$ мм; $y_{C1} = 25$ мм;
$x_{C2} = 30$ мм; $y_{C2} = 40$ мм.

Определим площади частей:

$S_{C1} = 100\cdot 50 = 5000$ мм^2;
$S_{C2} = 20\cdot 60 = 1200$ мм^2.

Тогда координаты ЦТ фигуры будут:

$$x_C = \frac{\sum x_k\Delta S_k}{\sum\Delta S_k} = \frac{50\cdot 5000 + 30\cdot(-1200)}{5000+(-1200)} = 56{,}3 \text{ мм};$$

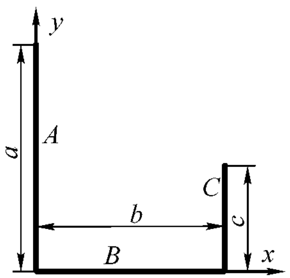
$$y_C = \frac{\sum x_k\Delta S_k}{\sum\Delta S_k} = \frac{25\cdot 5000 + 40\cdot(-1200)}{5000+(-1200)} = 20{,}3 \text{ мм}.$$

Прим. В двух последних формулах площадь S_{C2} взята со знаком минус потому, что эта площадь «вырезана» (или «отнята») из площади S_{C1}.

Пример. Определить ЦТ тонкого однородного провода, выгнутого под прямыми углами (см. рис.).

Решение. Воспользуемся методом разбиения на части. Для этого разобьем фигуру на части A, B и C. Определим координаты ЦТ отдельных частей:

$x_A = 0$; $\quad y_A = a/2$;
$x_B = b/2$; $\quad y_B = 0$;
$x_C = b$; $\quad y_C = c/2$.



Координаты ЦТ фигуры определим согласно выражениям

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta L_k}{\sum \Delta L_k} = \frac{0 \cdot a + \frac{b}{2} b + bc}{a+b+c} = \frac{\frac{b^2}{2} + bc}{a+b+c} = \frac{b(b+2c)}{2(a+b+c)}$$

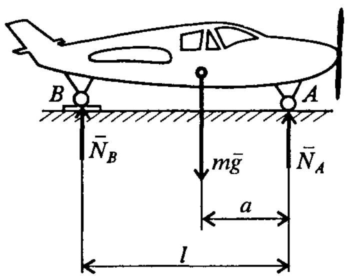
$$y_C = \frac{\sum y_k \Delta L_k}{\sum \Delta L_k} = \frac{\frac{a}{2} a + 0 \cdot b + \frac{c}{2} c}{a+b+c} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2}}{a+b+c} = \frac{a^2 + c^2}{2(a+b+c)}$$

Существуют и другие методы определения положения ЦТ.

Метод интегрирования применяется в случаях, когда для определения ЦТ не могут быть применены выше описанные способы.

Экспериментальный метод реализуется подвешиванием и взвешиванием.

Метод подвешивания заключается в том, что плоское тело, которое нельзя разбить на простые фигуры с известным положением ЦТ, подвешивается на нити. Прочерчивается вертикальная линия вдоль этой нити на плоскости тела. Затем эту плоскую фигуру подвешивают за другую точку, после чего снова проводят вертикальную линию вдоль линии подвеса. Сечение этих двух линий дает точку, в которой находится ЦТ.



Метод взвешивания применяется для крупных тел. Если известна масса, например, самолета, то его ставят на весы задними колесами (см. рис.) и определяют реакцию NB. Затем составляют одно из уравнений равновесия, например, уравнение суммы моментов относительно точки A и из него определяют положение ЦТ:

$$mga - N_B l = 0 \Rightarrow a = \frac{N_B l}{mg}.$$

Проверь свои знания!

1. По каким формулам можно определить ЦТ тела?
2. Перечислите основные методы определения положения ЦТ тел.
3. В чем состоит метод симметрии при определении положения ЦТ тел?
4. В чем состоит метод разбивки на части при определении положения ЦТ тел?
5. В чем состоит метод отрицательных площадей (масс) при определении положения ЦТ?
6. В чем состоят экспериментальные методы определения положения ЦТ?

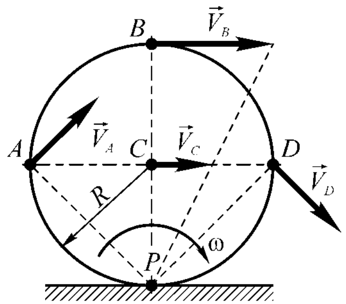
Из первых четырёх уравнений получаем:

$$\omega = \frac{V_A}{|AP|} = \frac{V_B}{|BP|} = \frac{V_C}{|CP|} = \frac{V_D}{|DP|},$$

то есть – отношение скорости любой точки плоской фигуры к ее расстоянию от МЦС является величиной угловой скорости вращения. Отсюда вытекает, что:

– если положение МЦС и вектор скорости какой-нибудь точки плоской фигуры определены, то можно определить вектор скорости любой другой точки этой плоской фигуры;

– если известно положение МЦС, а также величина угловой скорости и направление вращения плоской фигуры вокруг МЦС, то можно определить вектор скорости любой точки этой плоской фигуры.



Пример. Колесо электровоза катится без скольжения по рельсу (см. рис.). Скорость центра колеса $V_C = 10$ м/с, радиус колеса $R = 0{,}4$ м. Найти скорости точек A, B, D и угловую скорость ω колеса.

Решение. Колесо в текущий момент времени вращается вокруг МЦС, который находится в точке P касания колеса с неподвижной поверхностью рельса. Угловая скорость ω направлена по часовой стрелке (согласованно с направлением $\vec{V}_C$), а ее значение

$$\omega = \frac{\vec{V}_C}{|PC|} = \frac{\vec{V}_C}{R} = \frac{10}{0{,}4} = 25 \text{ c}^{-1}.$$

Скорости точек A, B, D:

$V_A = \omega|PA|$; $V_B = \omega|PB|$; $V_D = \omega|PD|$;

$|PA| = |PD| = \sqrt{|PC|^2 + |AC|^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} = 0{,}4\sqrt{2} = 0{,}57$ м;

$|PB| = 2R = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$ м;

$V_A = V_D = 25 \cdot 0{,}57 = 14{,}25$ м/с;

$V_B = 25 \cdot 0{,}8 = 20$ м/с.

Вектор $\vec{V}_A$ перпендикулярен прямой PA, вектор $\vec{V}_B$ перпендикулярен прямой PB, вектор $\vec{V}_D$ перпендикулярен прямой PD, а их направления согласованны с угловой скоростью ω колеса (см. рис.).

Ускорение точки плоской фигуры при плоскопаралельном движении *равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.*

Пример. На схеме показан кривошипно-шатунный механизм (см. рис.). Определить ускорение точек A, B и C, если $\omega_{OA} = 20$ c^{-1}, $|OA| = 0{,}3$ м, $|AB| = 1{,}2$ м, $|AC| = 0{,}7$ м, $h = 0{,}6$ м.

Решение. Выберем в качестве полюса точку A кривошипа. Определим ее ускорение:

определяется по направлению вектора $\vec{V}_A$ относительно МЦС (угловая скорость ω_{AB} шатуна AB направлена по часовой стрелке). Модули скоростей V_B ползуна B и V_C точки C шатуна составят:

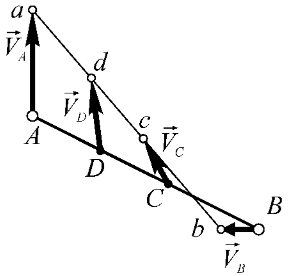
$$V_B = \omega_{AB}\,|PB| = \omega_{AB}h = 0{,}64 \cdot 0{,}5 = 0{,}32 \text{ м/с};$$

$$V_C = \omega_{AB}\,|PC|.$$

Определим размер $|PC|$, для чего рассмотрим треугольник PBC: $|PB| = h = 0{,}6$ м; $|BC| = |AB| - |AC| = 1{,}2 - 0{,}6 = 0{,}6$ м, тогда $|PB| = |BC|$, ведь треугольник PBC равнобедренный. Далее определим величину угла B рассмотренного треугольника: $P\hat{B}C = \arccos\dfrac{|PB|}{|AC|} = \arccos\dfrac{0{,}6}{1{,}2} = 60^\circ$. Так как $|PB| = |BC|$ и $P\hat{B}C = 60^\circ$, то треугольник PBC равносторонний. Ведь $|PC| = |PB| = |BC| = 0{,}6$ м. Тогда

$$V_C = 0{,}64 \cdot 0{,}6 = 0{,}384 \text{ м/с}.$$

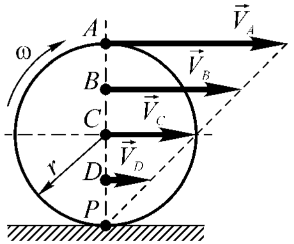
Векторы скоростей $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ направлены согласованно с ω_{AB} (вектор $\vec{V}_C$ перпендикулярен отрезку $[PC]$).



Определить скорость точки C можно графически. Для этого необходимо векторы скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B вычертить на схеме в масштабе (см. рис.). Затем концы векторов соединить прямой линией. Затем на эту линию нанести точку c так, чтобы выполнялось условие $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{|ac|}{|cb|}$, то есть разделить полученную линию ab точкой c на части ac и cb в таком соотношении, в каком соотношении точка C делит шатун AB на части AC и CB.

Затем из точки C в точку c проводится вектор, который и будет вектором скорости $\vec{V}_C$ точки C. Численное значение скорости V_C можно определить, измерив длину вектора $\vec{V}_C$ с учетом ранее принятого масштаба.

Для примера на этом же рисунке показано нахождение скорости точки D шатуна AB графическим способом.



Пример. Определить скорости точек A, B, C и D колеса (точки B, C и D делят диаметр колеса AP на 4 равных отрезка), которое катится по гладкой поверхности без скольжения и вращается с угловой скоростью ω. Радиус колеса равен r.

Решение. Точка P есть МЦС для колеса, которое катится по неподвижной поверхности. Скорости точек A, B, C и D колеса:

$$V_A = \omega|AP|; \quad V_B = \omega|BP|; \quad V_C = \omega|CP|; \quad V_D = \omega|DP|,$$

откуда

$$V_A = \omega\, 2r; \quad V_B = \omega\, 1{,}5r; \quad V_C = \omega r; \quad V_D = \omega\, 0{,}5r.$$

РАЗДЕЛ 2 КИНЕМАТИКА

2.1. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение материальных тел без учета их инертности (массы) и действующих сил.

Механическое движение – простейшая форма движения материи – изменение положения одного тела относительно другого тела, с которым связана система координат. Такая система координат называется системой отсчета. Механическое движение происходит в пространстве и времени, которые полагают независимыми одно от другого. Движение в геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого. Тело может двигаться лишь относительно к другому тела, двигаться же безотносительно нельзя. Например, Земля и Солнце двигаются одно относительно другого так, что при наблюдении с Земли Солнце кажется оббегающим вокруг Земли, а при наблюдении с Солнца Земля кажется оббегающей вокруг Солнца. Однако никакой астроном, даже и сам Коперник, не отказывался от «птоломеевского» выражения «Солнце восходит» и не заменял его «коперниковским» «Земля в своем вращательном движении подставляет лучам Солнца то место, в котором я нахожусь». Для определения времени дня взгляд Птоломея удобнее Коперника, и мы без колебания становимся в этом случае на точку зрения древнего грека. Кто вздумал бы описывать солнечный восток в свете учения Коперника, тот не сразу был бы понят даже самым убежденным коперниканцем.

Для удобства исследования движения устанавливается система отсчета – система координат (чаще всего взаимно ортогональная), связанная с одним из тел (если тело, с которым связана система отсчета, движется, то система отсчета будет подвижной, если тело покоится – то система отсчета будет неподвижной).

Пространство рассматривают как трехмерное эвклидово, в котором за единицу длины для измерения расстояний принимается один метр. Время в этом пространстве одинаково во всех его точках и не зависит от движения материальных тел, является универсальным и таким, которое протекает одинаково во всех системах отсчета. За единицу времени принимается одна секунда. Время является скалярной величиной, которая непрерывно меняется, течет от прошлого к будущему. В кинематике время принимается за независимую переменную (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и другие) рассматривают как переменные, которые зависят от времени, то есть как функции времени t. Отсчет времени ведется от некоторого начального момента (t=0), о выборе которого в каждом случае договариваются. Всякий данный момент времени t определяется числом секунд, которое прошло от начального момента к данному моменту; различие между какими-нибудь двумя последовательными моментами времени называется промежутком времени.

Эвклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приблизительно. Однако, как показывает опыт, для движений, которые изучаются в классической механике (движение со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света), это приближение дает достаточную точность для практического использования.

Таким образом: движение в механике – это изменение положения тела в пространстве и во времени; пространство в классической механике трехмерное, которое подчиняется эвклидовой геометрии; время – скалярная величина, которая одинаково протекает в любых системах отсчета; в кинематике изучается движение как оно есть.

2.1.1. Основные задачи кинематики:

– определение по заданному закону движения кинематических характеристик этого движения; основными простанственно-временными (кинематическими) характеристиками движения являются положение, перемещение, скорость и ускорение;

– установление закона движения тела относительно выбранной системы отсчета.

Для решения задач кинематики необходимо, чтобы движение, которое исследуется, был как-то задано (описано). С точки зрения кинематики задать движение или закон движения тела (точки) означает задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики. Поэтому изучение движения начнем с установления способов задания движения.

2.2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

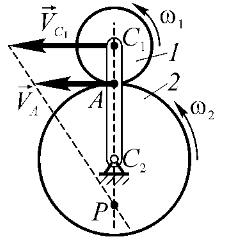
Материальная точка – *простейшая модель материального тела, размерами которого можно пренебречь; точка при этом имеет вес, равный весу тела, которое моделируется.*

Система материальных точек (механическая система или просто система) – *совокупность материальных точек, которые взаимодействуют между собой.*

Движение точки считают заданным, если определен способ, который позволяет установить ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Это определяется зависимостью, которая называется законом движения. Для определения положения точки в пространстве выбирают некоторую систему отсчета (систему координат).

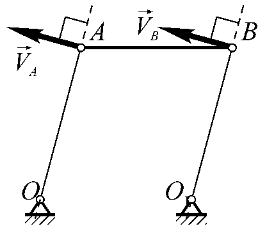
Траектория – *линия, которую описывает точка при своем движении (или – геометрическая линия, вдоль которой движется точка) в выбранной системе отсчета.* При этом вид траектории зависит от системы отсчета. Движение точки называют прямолинейным, если траекторией ее движения является прямая линия, и криволинейным, если – кривая линия (если траекторией точки будет круг, то движение точки называется круговым, парабола – параболическим и т.д.).

Перемещение – это изменение положения точки в пространстве относительно системы отсчета с течением времени. **Скорость** характеризует то, как быстро меняется положения точки в пространстве. **Ускорение** характеризует то, как быстро меняется скорость движения. Траектория, перемещение, скорость и ускорения являются основными кинематическими параметрами движения.



4. Если известны векторы скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_{C_1}$ точек A и C_1 кривошипа C_1C_2 (см. рис.), то МЦС находится на пересечении двух прямых, одна из которых проведена через точки A и C_1, а вторая – через концы векторов скоростей. Точка пересечения P этих прямых и есть МЦС (см. рис.).

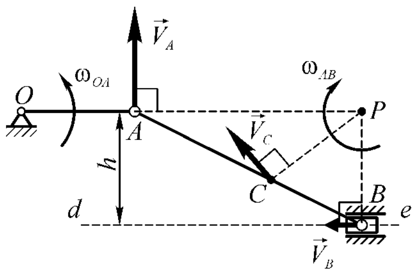
Прим: МЦС в этом случае находится на линии, которая проходит через точки C_1 и C_2, а его положение на этой линии зависит от величины и направления угловых скоростей ω_1 и ω_2 и, следовательно, значений $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_{C_1}$.



5. Если тело движется поступательно, то МЦС не существует (или находится в бесконечности).

Например, стержень AB спарника $OABO_1$ движется поступательно (см. рис.). Тогда перпендикуляры к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B не пересекаются, и, следовательно, МЦС не существует (или он находится в бесконечности).

При таком движении стержня скорости всех его точек будут одинаковыми по величине и направлению, а его угловая скорость $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{|PA|} = \dfrac{V_B}{|PB|} = \dfrac{V_A}{\infty} = 0$.



Пример. На схеме показан кривошипно-шатунный механизм. Определить скорости точек A, B, C и угловую скорость шатуна AB, если $\omega_{OA} = 2{,}2$ с$^{-1}$, $|OA| = 0{,}3$ м, $|AB| = 1{,}2$ м, $|AC| = 0{,}7$ м, $h = 0{,}6$ м.

Решение. Найдем скорость V_A точки A кривошипа:

$V_A = \omega_{OA}|OA| = 2{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}66$ м/с.

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен согласованно с направлением угловой скорости ω_{OA} перпендикулярно линии, которая соединяет точки O и A, то есть перпендикулярно кривошипу OA. Скорость ползуна B должна быть направлена по прямой de (так как направляющие ползуна не допускают другого его перемещения). Тогда МЦС шатуна AB будет находиться в точке P – в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных к вектору $\vec{V}_A$ из точки A и к прямой de из точки B. Таким образом, шатун AB в текущий момент времени вращается вокруг полюса P (то есть вокруг МЦС).

Определим мгновенную угловую скорость ω_{AB} шатуна AB в его вращательном движении вокруг МЦС:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{|PA|} = \frac{V_A}{\sqrt{|AB|^2 - |PB|^2}} = \frac{V_A}{\sqrt{|AB|^2 - h^2}} = \frac{0{,}66}{\sqrt{1{,}2^2 - 0{,}6^2}} = \frac{0{,}66}{1{,}04} = 0{,}64 \text{ с}^{-1}$$

Таким образом, шатун AB в текущий момент времени вращается вокруг точки P с угловой скоростью ω_{AB}=0,64 с$^{-1}$. Направление угловой скорости шатуна

Вектор $V_{M(C)}$ перпендикулярен отрезку MC и направлен согласованно с угловой скоростью, то есть вектор $\vec{V}_{M(C)}$ является вектором угловой скорости относительно полюса C.

Так как $\vec{V}_{M(C)} \perp \vec{V}_C$, то $V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{M(C)}^2} = \sqrt{3{,}3^2 + 3{,}3^2} = 4{,}67$ м/с.

Аналогично определяется скорость точки K (см. рис.).

2.5. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – точка в плоскости движения плоской фигуры, скорость которой в текущий момент времени равна нулю (иначе: МЦС – точка, вокруг которой как вокруг центра в текущий момент времени вращается плоская фигура).

Скорости точек тела в плоском движении распределяются так же, как и при вращательном движении, а их модули определяются по формуле

$V_M = \omega \cdot |PM|$,

где V_M – скорость точки M, которая рассматривается;

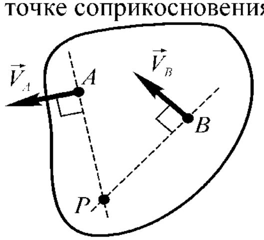
ω – угловая скорость точки M вокруг полюса P, который и есть МЦС;

$|PM|$ – расстояние от точки M до полюса P.

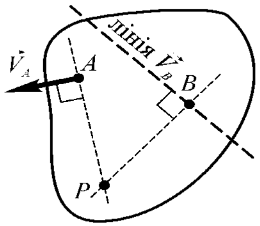
Таким образом, модули скоростей точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям от этих точек до МЦС. Векторы скоростей точек плоской фигуры перпендикулярны отрезкам, которые соединяют эти точки с МЦС, и направлены согласованно с угловой скоростью.

Частные случаи определения МЦС.

1. Если колесо катится по поверхности без скольжения, то МЦС находится в точке соприкосновения колеса с поверхностью.



2. Если известны скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B плоской фигуры, то для нахождения МЦС необходимо провести перпендикуляры к векторам скоростей из точек, которые рассматриваются. Точка P пересечение этих перпендикуляров и есть МЦС (см. рис.).



3. Если известны скорость $\vec{V}_A$ одной точки A и линия, вдоль которой направлена скорость точки B плоской фигуры, то для нахождения МЦС необходимо провести перпендикуляры к вектору скорости точки A из самой точки A и к линии, вдоль которой направлена скорость точки B из самой точки B. Точка пересечения P этих перпендикуляров и есть МЦС (см. рис.).

2.3. ТРИ СПОСОБА ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЯ

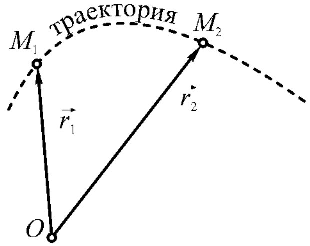
Под способами задания движения понимается описание движения в виде математических формул, которые показывают зависимости кинематических параметров движения от времени.

2.3.1. Векторный способ задания движения

Векторный способ задания движения состоит в задании положения точки радиус-вектором, который является векторной функцией времени, относительно выбранной точки отсчета: $\vec{r} = f(t)$.

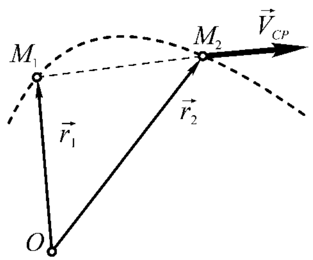
Последнее выражение называется законом движения точки в векторной форме (функция при этом должна быть однозначной и непрерывной).

Векторный способ задания движения удобно использовать при изучении движения точки, когда расстояние до нее и направление ее наблюдения известны.



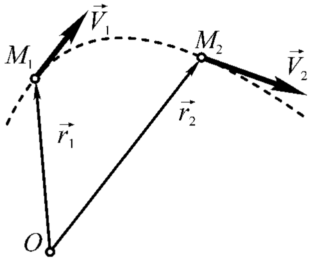
Траектория точки (см. рис.) при векторном способе – это геометрическое место точек концов радиус-вектора $\vec{r}$ при изменении времени t (то есть годограф радиус-вектора; годограф – это линия, которую описывает конец радиус-вектора при изменении его аргумента, когда начало вектора находится в неподвижной точке O).

Скорость $\vec{V}$ точки характеризует скорость изменения ее положения. Известно (из математики и физики), что $V = \dfrac{S}{t}$ (здесь S – путь, пройденный за время t).



Относительно случая векторного способа задания движения можно записать $\vec{V} = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$. Но точка на рассмотренном участке могла двигаться с непостоянной скоростью. Поэтому последнее выражение характеризует среднюю скорость движения точки на участке траектории от ее положения M_1 к положению M_2, то есть $\vec{V}_{CP} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ (вектор $\vec{V}_{CP}$ направлен по секущей M_1M_2 в сторону движения точки; см. рис.).

Чтобы определить скорость точки в любой точке траектории в момент времени t (мгновенную скорость) необходимо предельно уменьшить рассмотренный отрезок времени, то есть необходимо, чтобы $\Delta t \to 0$. Тогда $\vec{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.



Таким образом, скорость точки равна производной радиус-вектора точки по времени: $\vec V = \dot{\vec r}$ (в механике производные по времени обозначают точками над переменной: производную первого порядка – одной точкой, второго порядка – двумя). Направлен вектор скорости $\vec V$ по секущей M_1M_2 в сторону движения точки, но при $\Delta t \to 0$ секущая совпадает с касательной к траектории точки (см. рис.).

Если точка из положения M_1 в положение M_2 движется с непостоянной скоростью, то она движется с ускорением. Ускорение характеризует скорость изменения скорости точки.

Ускорение точки определим аналогично определению ее скорости:

– среднее ускорение $\vec a_{CP} = \dfrac{\Delta \vec V}{\Delta t}$;

– мгновенное ускорение (ускорение в любой момент времени) $\vec a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec V}{\Delta t} = \dfrac{d\vec V}{dt} = \dot{\vec V} = \dfrac{d^2 \vec r}{dt^2} = \ddot{\vec r}$.

Таким образом, ускорение точки равно первой производной вектора скорости по времени или второй производной радиус-вектора по времени. Направлен вектор ускорения по касательной к годографу вектора скорости (но не по касательной к траектории!).

2.3.2. Координатный способ задания движения

Координатный способ задания движения состоит в задании координат точки в виде известных непрерывных функций времени. Системы координат могут быть декартовими, полярными, сферическими, цилиндрическими и др.

В декартовых координатах уравнения движения точки имеют такой вид (в зависимости от сложности траектории):

– при движении в пространстве	$x = F_1(t)$;	$y = F_2(t)$;	$z = F_3(t)$;
– при движении на плоскости	$x = F_1(t)$;	$y = F_2(t)$;	$z = 0$;
– при прямолинейном движении	$x = F_1(t)$;	$y = 0$;	$z = 0$.

Эти уравнения являются также уравнениями траектории точки в параметрическом виде (за исключением последнего – здесь заранее известно, что траектория – прямая линия, направленная вдоль координатной оси x). Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, необходимо исключить параметр «время» из уравнений.

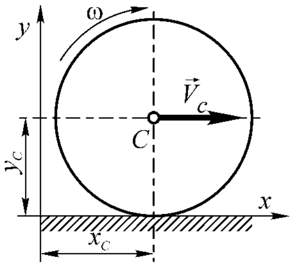
Координатный способ задания удобно использовать при изучении движения точки, когда траектория движения заранее неизвестна.

Пример. Движение точки задано уравнениями: $x = 2\cos \pi t$; $y = 3 \sin \pi t$ (задано в метрах). Найти траекторию точки в координатной форме.

Решение. Исключим из уравнений движения параметр t. Для этого обе части уравнений возведем в квадрат, преобразуем и сложим их:

$\varphi = F_3(t)$.

Плоское движение твердого тела можно разложить на два простых движения – на поступательное движение, которое описывается координатами x_A и y_A полюса, и вращательное движение вокруг выбранного полюса (точки A), которое описывается углом поворота φ выбранного отрезка AB. При этом параметры поступательного перемещения зависят от выбора полюса, а величина и направление угла поворота не зависят.



Пример. Электровоз движется по прямолинейному горизонтальному участку рельсового пути с постоянной скоростью $V = 2{,}2$ м/с. Радиус колеса электровоза $r = 0{,}4$ м. Записать уравнение плоского движения колеса.

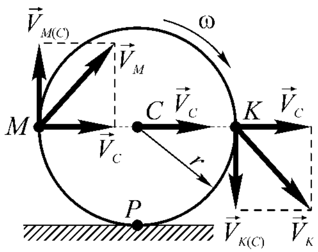
Решение. Центр колеса C связан с электровозом, поэтому можно записать $V_C = V$ (см. рис.). Электровоз движется равномерно, тогда угловая скорость ω колеса будет постоянна, а координата центра колеса x_C будет меняться по закону $x_C = V_C t = 2{,}2t$, м. Координата y_C центра колеса постоянна и равна радиусу, то есть $y_C = R = 0{,}4$ м.

Угол φ поворота колеса при равномерном вращении меняется по закону $\varphi = \omega t$.

Прим. В этом примере полагается, что в начальный момент времени $t = 0$ начальные координаты $x_{C0} = 0$ и $\varphi_{C0} = 0$.

При плоскопаралельном движении плоской фигуры скорость любой ее точки *равна геометрической сумме скорости полюса и скорости точки, которая рассматривается, во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса,* то есть $\vec V_M = \vec V_O + \vec\omega_M \times \vec r$, где $\vec V_M$ – скорость точки, которая рассматривается, $\vec V_O$ – скорость полюса O, $\vec\omega_M$ – вращательная скорость точки M вокруг полюса O, $\vec r$ – радиус вращения точки M вокруг полюса O (расстояние от точки M до полюса O).

Следствие: *Проекции векторов скоростей двух точек твердого тела на прямую, которая проходит через эти точки, равны между собой.*



Пример. Определить скорость точки M обода колеса электровоза, который движется по прямолинейному горизонтальному участку рельсового пути с постоянной скоростью $V = 3{,}3$ м/с. Радиус колеса электровоза $r = 0{,}3$ м.

Решение. Примем за полюс точку C (см. рис.). Скорость центра колеса $V_C = V$. Тогда

$$\vec V_M = \vec V_C + \vec V_{M(C)}.$$

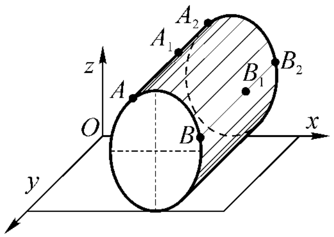
Вращательную скорость $V_{M(C)}$ точки M относительно полюса C определим по формулам $V_{M(C)} = \omega |MC|$, где $\omega = \dfrac{V_C}{r}$, тогда $V_{M(C)} = \dfrac{V_C}{r}|MC| = \dfrac{3{,}3}{0{,}3} 0{,}3 = 3{,}3$ м/с.

вые угловые скорости в текущий момент времени?

11. Как определить линейную скорость точки твердого тела при его вращательном движении и как она направлена?
12. Как определить ускорение точки твердого тела при его вращательном движении? Как направлены и чему равны его составляющие?
13. Как направлены скорость, центростремительное и вращательное ускорения точек твердого тела при замедленном, равномерном и ускоренном вращении?

2.4.2. Плоское (плоскопаралельное) движение твердого тела

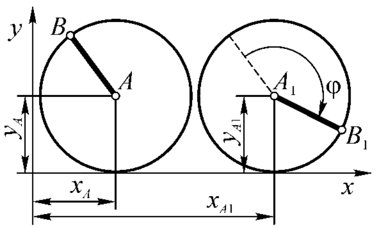
Плоское движение – *такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.*



Примером плоского (плоскопаралельного) движения может быть цилиндр, который катится по гладкой поверхности (см. рис.). Основание цилиндра движется параллельно плоскости Ozx. Все точки, которые лежат на образующей поверхности цилиндра (A_1, A_2, B_1, B_2 и т.д.) перемещаются аналогично точкам A, B и т.д., которые принадлежат основанию цилиндра.

Для определения движения всего цилиндра достаточно исследовать движение его основания (или другого сечения цилиндра, которое параллельно его основанию).

Таким образом, для исследования плоского движения твердого тела достаточно исследовать движение плоской фигуры, которая принадлежит телу и при его движении остается параллельной самой себе.



Уравнение плоского движения твердого тела. Проведем на основании цилиндра, который катится по горизонтальной поверхности, отрезок AB (см. рис.). В процессе плоского движения цилиндра отрезок займет новое положение A_1B_1. Такие же отрезки можно рассмотреть в любом поперечном сечении тела. Их движение будет аналогично движению отрезка AB.

Положение отрезка AB определяется координатами (x_A;y_A) точки A, которая назначена полюсом, и углом поворота φ отрезка AB, который отсчитывается от выбранного начального положения (см. рис.).

Таким образом, для того, чтобы задать плоское движение тела, достаточно описать движение отрезка AB, который принадлежит поперечному сечению твердого тела. Тогда уравнениями плоского движения твердого тела будут уравнения, которые характеризуют положение полюса A и угол поворота φ отрезка AB:

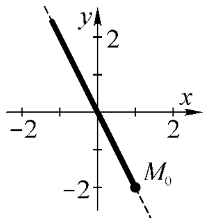
$x_A=F_1(t)$;
$y_A=F_2(t)$;

$$x^2 = 2^2\cos^2\pi t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2^2} = \cos^2\pi t\,;$$

$$y^2 = 3^2\sin^2\pi t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{3^2} = \sin^2\pi t\,;$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = \cos^2\pi t + \sin^2\pi t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1\,.$$

Последнее уравнение – уравнение траектории движения точки в координатной форме, которое описывает эллипс с радиусами 2 и 3 м.



Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 1 - \frac{t^2}{2}$; $y = t^2 - 2$ (задано в метрах). Найти траекторию точки в координатной форме.

Решение. Исключим из уравнений движения параметр t, преобразовав их:

$$x = 1 - \frac{t^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 2 - t^2;$$

$$y = t^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -\mathbf{y} = 2 - t^2,$$

откуда получим уравнение траектории (вычев из правого верхнего уравнения правое нижнее):

$2x = -y \quad \Leftrightarrow \quad x = -y/2.$

Уравнение описывает прямую линию (на рис. показана штриховой). Начало траектории отвечает моменту времени t=0, конец траектории – моменту времени $t\to\infty$:

при $t = 0$: $x = 1$ м; $y = -2$ м;
при $t\to\infty$: $x \to -\infty$; $y \to \infty$.

Ответ. Траекторией точки будет полупрямая $x = -y/2$, ограниченная точкой $M_0(1,-2)$ (см. рис.).

2.3.2.1. Скорость точки в декартовых координатах.

Для определения скорости в декартовых координатах по заданным уравнениям движения необходимо продифференцировать их по времени (так же, как и при векторном способе задания движения):

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = V_X\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y + \vec{V}_Z\,;$$

$$V_X = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,; \qquad V_Y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\,; \qquad V_Z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,;$$

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}\,,$$

где V_X, V_Y, V_Z – проекции вектора скорости на соответствующие оси координат.

Формула $V_{Xcc} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ для определения скорости (в этом случае ее проекция на ось x) позволяет вычислить значение средней скорости точки при ее движении от координаты x_1, в которой она находилась в момент времени t_1, к координате x_2, в которой она находилась в момент времени t_2.

Углы вектора скорости с осями координат определяются по формулам:

$$\cos(\widehat{\vec{V},x}) = \frac{V_X}{V}; \qquad \cos(\widehat{\vec{V},y}) = \frac{V_Y}{V}; \qquad \cos(\widehat{\vec{V},z}) = \frac{V_Z}{V}.$$

2.3.2.2. Ускорение точки в декартовых координатах.

Для определения ускорения в декартовых координатах по заданным уравнениям движения необходимо дважды продифференцировать их по времени или единожды продифференцировать уравнение скорости по времени (так же, как и при векторном способе задания движения):

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \frac{d\vec{V}}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt}(V_X\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k}) = \dot{V}_X\vec{i} + \dot{V}_Y\vec{j} + \dot{V}_Z\vec{k} = a_X\vec{i} + a_Y\vec{j} + a_Z\vec{k} = \vec{a}_X + \vec{a}_Y + \vec{a}_Z;$$

$$a_X = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \frac{dV_X}{dt} = \dot{V}_X;$$

$$a_Y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \frac{dV_Y}{dt} = \dot{V}_Y;$$

$$a_Z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = \frac{dV_Z}{dt} = \dot{V}_Z;$$

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2},$$

где a_X, a_Y, a_Z и a – соответственно проекции вектора ускорения на оси координат и полное ускорение точки.

Так же, как и для скорости, формула $\vec{a}_{CP} = \dfrac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ для определения ускорения позволяет получить значение среднего ускорения точки при ее движении из начального положения, в котором она имела скорость V_1 в момент времени t_1, к конечному положению, в котором она имела скорость V_2 в момент времени t_2.

Углы вектора ускорения с осями координат определяются по формулам:

$$\cos(\widehat{\vec{a},x}) = \frac{a_X}{a}; \qquad \cos(\widehat{\vec{a},y}) = \frac{a_Y}{a}; \qquad \cos(\widehat{\vec{a},z}) = \frac{a_Z}{a}.$$

Пример. Найти скорость, ускорение точки и их направляющие векторы в любой момент времени, использовав условие предыдущего примера ($x = 1 - \dfrac{t^2}{2}$; $y = t^2 - 2$, м).

Решение. Определим скорость, ускорение точки и их направляющие векторы:

Тогда модуль полного ускорения точки M и угол β между полным и центростремительным ускорениями представляют:

$$a_M = \sqrt{(a_{BP(M)})^2 + (a_{Ц(M)})^2} = \sqrt{3{,}75^2 + 39{,}06^2} = 39{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{a_{BP(M)}}{a_{Ц(M)}} = \operatorname{arctg}\frac{3{,}75}{39{,}06} = 5{,}5^\circ.$$

Сравнение формул для вычисления параметров поступательного и вращательного движений.			
Параметры движения	Характер движения	Вид движения	
		поступательное	вращательное
Перемещение	неравномерное	$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
	равномерное	$s = vt$	$\varphi = \omega t$
	равнопеременное	$s = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$
Скорость	неравномерное	$v = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$
	равномерное	$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
	равнопеременное	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
Ускорение касательное	неравномерное	$a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dot{v}$	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$
	равномерное	$a_\tau = 0$	$\varepsilon = 0$
	равнопеременное	$a_\tau = \text{const}$	$\varepsilon = \text{const}$
Ускорение нормальное	любое	$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$	$a_n = \omega^2 r = \omega v$

Проверь свои знания!

1. Какое движение твердого тела называется поступательным?
2. По каким траекториям двигжутся точки твердого тела при его поступательном движении?
3. Сформулируйте основную теорему поступательного движения твердого тела.
4. Запишите уравнение поступательного движения.
5. Какое движение твердого тела называется вращательным?
6. По каким траекториям движутся точки твердого тела при его вращательном движении?
7. Запишите уравнение вращательного движения.
8. Как определить угловые скорость и ускорения твердого тела?
9. Как направлены векторы угловых скорости и ускорения при ускоренном и замедленном вращении?
10. Почему точки твердого тела при вращательном движении имеют одинако-

$\vec{a}_Ц = \vec{\omega} \times \vec{V}$ i. $a_Ц = \omega V = \omega(\omega r) = \omega^2 r$

Вектор центростремительного ускорения $\vec{a}_Ц$ всегда направлен к оси вращения.

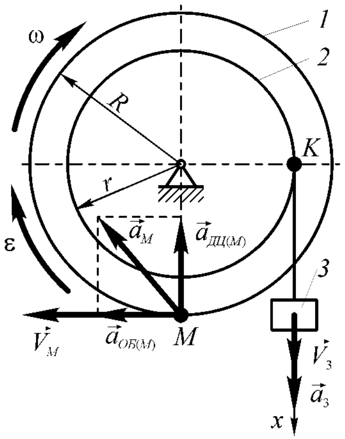
Модуль полного ускорения a точки M вращающегося твердого тела вычисляется по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \ .$$

Таким образом, ускорения точек вращающегося твердого тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения.

Угол β между вектором полного ускорения $\vec{a}$ и центростремительным $\vec{a}_Ц$ (или радиус-вектором $\vec{r}$) определяется согласно выражению $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{a_\tau}{a_{ДЦ}} = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Из последней формулы вытекает, что угол отклонения полного ускорения от центростремительного в каждый момент времени одинаковый для всех точек тела.



Пример. На рисунке изображенная схема грузоподъемной установки (*1* – венец зубчатого колеса; *2* – барабан с канатом). Груз *3* на участке разгона опускается по закону $x = 1{,}5t^2 + 2t$, м. Определить скорость и ускорение барабана, груза и точки M в момент времени t = 1 с, если R = 1 м, r = 0,8 м.

Решение. Определим скорость и ускорение груза:

$V_3 = \dot{x} = 3t + 2$; при t=1 с: $V_3 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ м/с;

$a_3 = \ddot{x} = \dot{V} = 3$; при t=1 с: $a_3 = 3$ м/с^2.

Так как груз и точка K барабана связаны нерастяжимой нитью (тросом), то их линейные скорости и ускорения взаимно равны. Тогда угловые скорость и ускорения барабана составят:

$$\omega = \frac{V_3}{r} = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25 \ \text{с}^{-1};$$

$$\varepsilon = \frac{a_3}{r} = \frac{3}{0{,}8} = 3{,}75 \ \text{с}^{-2}.$$

Определим скорость и ускорение точки M. Очевидно, что венец зубчатого колеса *1* и барабан с канатом *2* вращаются как одно целое тело, следовательно, они имеют одинаковые угловые скорости и ускорения. Тогда получим:

$V_M = \omega R = 6{,}25 \cdot 1 = 6{,}25$ м/с;

$a_{BP(M)} = a_{\tau(M)} = \varepsilon R = 3{,}75 \cdot 1 = 3{,}75$ м/с^2;

$a_{Ц(M)} = a_{n(M)} = \omega^2 R = 6{,}25^2 \cdot 1 = 39{,}06$ м/с^2.

$V_X = \dot{x} = \dfrac{d}{dt}(1 - \dfrac{t^2}{2}) = -t$; $a_X = \ddot{x} = \dot{V}_X = \dfrac{d}{dt}(-t) = -1$;

$V_Y = \dot{y} = \dfrac{d}{dt}(t^2 - 2) = 2t$; $a_Y = \ddot{y} = \dot{V}_Y = \dfrac{d}{dt}(2t) = 2$;

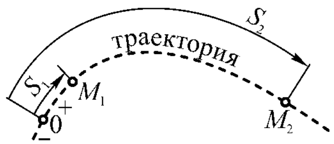
$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{5t^2} = t\sqrt{5}$;

$\cos(\widehat{\vec{V}, x}) = \dfrac{-t}{t\sqrt{5}} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$; $\cos(\widehat{\vec{V}, y}) = \dfrac{2t}{t\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$;

$\cos(\widehat{\vec{a}, x}) = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$; $\cos(\widehat{\vec{a}, y}) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

2.3.3. Естественный способ задания движения



Естественный способ задания движения состоит в задании траектории точки и закона ее движения уравнением вида S=F(t) вдоль линии траектории, а также задании начала отсчета и направления движения (см. рис.).

Закон движения S=F(t) не следует путать с длиной пути, пройденного точкой, так как за начало отсчета может быть выбрано любое место на траектории или движение может быть, например, колебательным.

Естественный способ задания движения удобен в случае, когда траектория движения точки заведомо известна.

Пример. Найти расстояние между координатами, в которых находилась точка в момент времени 0, 3 и 5 с, если закон ее движения задан уравнениям $S = 4t^2 - 2t - 8$, м.

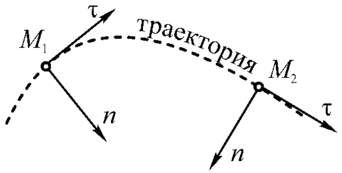
Решение. Координаты S точки в начальный момент времени и в моменты времени 3 и 5 с, то есть при t = 0 с, t = 3 с и t = 5 с равны:

$S_{(t=0)}$ = 4 · 02 + 2 · 0 – 8 = –8 м;
$S_{(t=3)}$ = 4 · 32 – 2 · 3 – 8 = 22 м;
$S_{(t=5)}$ = 4 · 52 – 2 · 5 – 8 = 82 м.

Тогда расстояния между координатами, в которых находилась точка в момент времени 0, 3 и 5 с, равны:

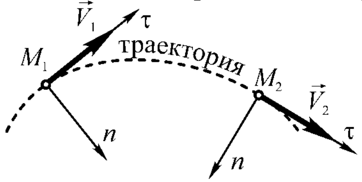
$S_{(t=0\ldots3)} = S_{(t=3)} - S_{(t=0)}$ = 22 – (–8) = 30 м;
$S_{(t=0\ldots5)} = S_{(t=5)} - S_{(t=0)}$ = 82 – (–8) = 90 м;
$S_{(t=3\ldots5)} = S_{(t=5)} - S_{(t=3)}$ = 82 – 22 = 60 м.

При естественном способе задания движения точки в качестве координатных осей, как правило, принимаются оси натурального трехгранника (ортогональная система координат): τ – касательная, n – нормаль, b – бинормаль (см. рис. ниже).



При движении точки вместе с ней перемещаются естественные оси, образуя правую систему координат (на рисунке выше точка движется в плоскости чертежа, поэтому бинормаль b направлена «от нас» и не видна как линия).

2.3.3.1. Скорость точки при естественном способе задания движения.



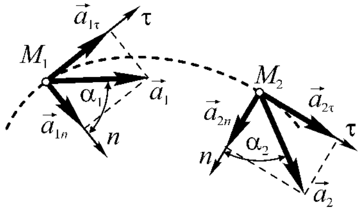
Используя определение скорости, можно записать: $\vec{V} = \dfrac{d\vec{S}}{dt} = \dot{\vec{S}}$. При этом вектор скорости $\vec{V}$ направлен по касательной к линии траектории в сторону движения точки (см. рис.).

Скалярную величину $V = \dot{S}$, которая является проекцией вектора скорости на касательную τ, называют алгебраической скоростью точки. Если $\dot{S}>0$, то направление вектора скорости $\vec{V}$ совпадает с направлением оси τ, (то есть вектор $\vec{V}$ направлен в сторону роста значений S); если $\dot{S}<0$, то направление вектора скорости $\vec{V}$ противоположно направлению оси τ (то есть вектор $\vec{V}$ направлен в сторону уменьшения значений дуговой координаты S). Так как $\vec{\tau}$ – единичный вектор, то можно записать: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau} = V\vec{\tau}$.

2.3.3.2. Ускорение точки при натуральном способе задания движения.

Используя выше установленное определение ускорения, можно записать:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{\tau}) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}V .$$



Как видим, ускорение $\vec{a}$ точки складывается из двух взаимно перпендикулярных составляющих – касательного ускорения $\vec{a}_\tau = \dfrac{dV}{dt}\vec{\tau}$, направленного по касательной к линии траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n = \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}V$, направленного по нормали к линии траектории в сторону ее вогнутости (см. рис.).

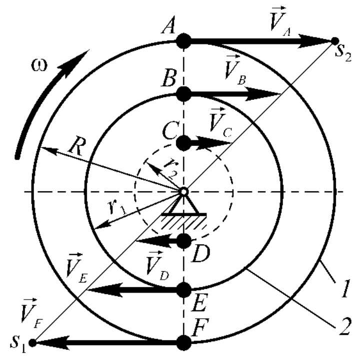
Касательное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует изменение вектора скорости $\vec{V}$ по модулю, а нормальное $\vec{a}_n$ – по направлению.

Векторы ускорений и их модули вычисляются по формулам:

$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$; $\qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$;

$\vec{a}_\tau = \dfrac{d\vec{V}}{dt}\vec{\tau} = a_\tau\vec{\tau}$; $\qquad a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dot{V}$;

то $\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ (это выражение – векторная формула Эйлера) и $V = |\vec{\omega}\times\vec{r}|$. При этом направление вектора $\vec{V}$ определяется векторным произведением.



Пример. На рисунке изображена схема грузоподъемной установки (*1* – венец зубчатого колеса; *2* – барабан с канатом). Определить скорости точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F*, если ω=10 с$^{-1}$, R=2 м, r_1 = 1,5 м, r_2 = 0,7 м.

Решение. Определим скорость точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F* согласно формулы

V=ω·h,

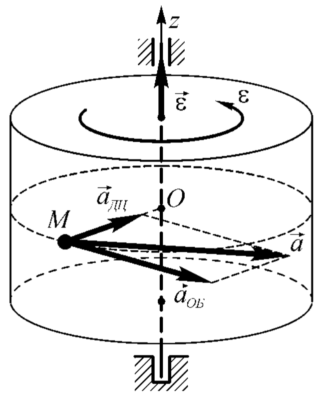
где h – радиус вращения точки, которая рассматривается. Тогда

$V_A = V_F = \omega R = 10 \cdot 2 = 20$ м/с;

$V_B = V_E = \omega r_1 = 10 \cdot 1{,}5 = 15$ м/с;

$V_C = V_D = \omega r_2 = 10 \cdot 0{,}7 = 7$ м/с.

Примечательным в полученной картине распределения скоростей точек тела, которое вращается, есть то, что концы векторов скоростей лежат на одной прямой s_1s_2, которая проходит через центр вращения.



Линейное ускорение. Продолжим рассматривать точку *M* на поверхности цилиндра, который вращается вокруг неподвижной оси (см. рис.). Уравнение, которое описывает линейное ускорение точки *M*, можно получить, если продифференцировать по времени ранее полученное уравнение ее скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Так как $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ и $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{V} .$$

Как видим, ускорения $\vec{a}$ складывается из двух взаимно перпендикулярных составляющих. Вектор $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ согласно правилу векторного произведения направлен по касательной к линии траектории точки *M* (см. рис.), то есть является касательным (тангенциальным – индекс τ) ускорением $\vec{a}_\tau$ точки *M* (во вращательном движении может называться линейным или вращательным ускорениям $\vec{a}_{BP}$):

$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ $\qquad$ и $\qquad$ $a_\tau = \varepsilon r$

Вектор $\vec{\omega}\times\vec{V}$ лежит на окружности радиуса $|OM|$ в ее плоскости и направлен от точки *M* к оси вращения (см. рис.), то есть является нормальным (индекс *n*) ускорением $\vec{a}_n$ точки *M*, но во вращательном движении этот вектор называется, как правило, центростремительным (стремящимся по направлению к центру) ускорением $\vec{a}_Ц$:

ренно из состояния покоя. За 2,5 с он достиг скорости вращения 7200 мин.$^{-1}$. Определить угловые перемещения φ, скорость ω и ускорение ε диска, а также число сделанных им за время разгона оборотов N.

Решение. Установим начальные условия движения: $\varphi_0 = 0$; $n_0 = \omega_0 = 0$; $\varepsilon = \text{const}$. Тогда значение искомых величин, вычисленные по ниже приведенным формулам, составят:

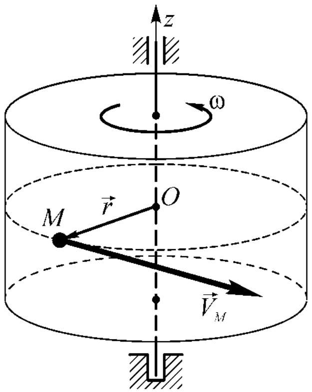
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t};$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 7200}{30} = 754 \text{ с}^{-1}, \text{ тогда } \varepsilon = \frac{754 - 0}{2{,}5} = 301{,}6 \text{ с}^{-1};$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = 0 + 0 \cdot 2{,}5 + \frac{301{,}6 \cdot 2{,}5^2}{2} = 942{,}5 \text{ рад.};$$

$$\varphi = 2\pi N \Rightarrow N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{942{,}5}{2\pi} = 150 \text{ об.}$$

Линейная скорость $\vec{V}$ **и линейное ускорение** $\vec{a}$ также характеризует вращательное движение тела. Установим их зависимость от угловых скорости ω и ускорения ε.



Линейная скорость. Рассмотрим точку M на поверхности цилиндра, который вращается вокруг неподвижной оси (см. рис.). Движение точки можно описать радиус-вектором $\vec{r}$, который имеет постоянный модуль для рассмотренного случая движения. Тогда решение задачи о скорости и ускорении сводится к аналогичной задаче при векторном способе задания движения. При этом необходимо учитывать, что вектор $\vec{r}$ постоянен по величине, а его конец описывает окружность. Если продифференцировать вектор по времени и принять $|\vec{r}| = |OM| = h$ (здесь h – расстояние от оси вращения до точки или радиус вращения точки M), то получим:

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = |\vec{r}|\frac{d\varphi}{dt}\vec{\tau} = |OM|\omega\vec{\tau} = h\omega\vec{\tau} = V_M\vec{\tau}.$$

Модуль скорости точки определяется по формуле $V_M = \omega|\vec{r}|$. Таким образом, скорости точек твердого тела, которое вращается, пропорциональны расстояниям от оси вращения до этих точек.

Прим. Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор, который направлен вдоль радиуса цилиндра (но не равен его радиусу!).

Вектор скорости $\vec{V}$ (иногда его называют линейной скоростью или вращательной скоростью) направлен по касательной к траектории точки M согласованно с направлением угловой скорости ω.

Так как произведение $\omega \cdot h$ является модулем векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$,

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n}; \qquad a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Векторы ускорений $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ лежат в плоскости, которая является касательной к линии траектории (проекция ускорения точки на бинормаль равна нулю). Угол α отклонения вектора ускорения $\vec{a}$ от нормали $\vec{n}$ определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Касательное и нормальное ускорения точки при ее движении в плоскости можно определить через проекции скорости и ускорения на декартовы координаты:

$$a_\tau = \frac{V_X a_X + V_Y a_Y}{V}; \qquad a_n = \frac{|V_X a_Y - V_Y a_X|}{V}.$$

Таким образом, для нахождения уравнения скорости точки (независимо от способа задачи ее движения) необходимо продифференцировать уравнение ее движения по времени; для нахождения уравнения ускорения точки необходимо дважды продифференцировать уравнение ее движения по времени или, что то же самое, единожды продифференцировать уравнение скорости по времени.

Вектор скорости $\vec{V}$ точки всегда направлен по касательной к линии траектории движения в сторону ее движения.

Вектор ускорения $\vec{a}$ складывается из двух составляющих – вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к линии траектории движения, и вектора нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного перпендикулярно вектору $\vec{a}_\tau$ в сторону вогнутости линии траектории движения.

Если $a\tau$=0, то V=const, а движение точки будет равномерным. Движение будет ускоренным или замедленным в зависимости от того, возрастает или убывает значение скорости. Движение будет неравномерным, если $a_\tau \neq 0$, а именно: ускоренным, если знаки величин V и a одинаковые (при этом направления векторов $\vec{V}$ и $\vec{a}_\tau$ совпадают), и замедленным, если их знаки противоположны (при этом направления векторов $\vec{V}$ и $\vec{a}_\tau$ взаимно противоположны). Если на каком-нибудь участке траектории a=0, то на этом участке движение будет равномерным. Если на каком-нибудь участке траектории a_n=0, то на этом участке движение будет прямолинейным (при этом радиус кривизны траектории $\rho=\infty$).

Частные случаи движения в зависимости от значений ускорений:

1. $a_\tau = 0$, $a_n = 0$ – движение прямолинейное равномерное;
2. $a_\tau \neq 0$, $a_n = 0$ – движение прямолинейное неравномерное;
3. $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$ – движение криволинейное равномерное;
4. $a_\tau \neq 0$, $a_n \neq 0$ – движение криволинейное неравномерное.

Уравнение движения точки вдоль линии траектории движения любой формы:

– равномерное движение (V = const): $S = S_0 + Vt$;

– равнопеременное движение ($a_\tau = \text{const}$):

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}; \; V = V_0 + a_\tau t,$$

где S_0 – начальное положение, V_0 – начальная скорость.

Пример. Автомобиль выезжает из гаража и движется равноускоренно по закруглению радиусом 18 м. Через 10 с он достигает скорости 3 м/с. Определить путь, пройденный автомобилем и его полное ускорение.

Решение. За начало отсчета примем положение автомобиля в момент начала движения, при котором начальный пройденный путь $S=S_0=0$, начальная скорость движения $V=V_0=0$. Тогда

$$V = V_0 + a_\tau t \Rightarrow a_\tau = \frac{V - V_0}{t} = \frac{3-0}{10} = 0{,}3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{3^2}{18} = 0{,}5 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}5^2} = 0{,}58 \text{ м/с}^2;$$

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} = 0 + 0 \cdot 10 + \frac{0{,}3 \cdot 10^2}{2} = 15 \text{ м}.$$

Пример. Пуля нагана при выходе из ствола длиной 22 см имеет скорость 270 м/с. Найти ускорение пули и время прохождения ею ствола.

Решение. Воспользуемся формулами $S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$ и $V = V_0 + a_\tau t$, где S – пройденный пулей путь, S = 22 см = 0,22 м; S_0 и V_0 – соответственно начальные положение и скорость, S_0=0 и V_0=0; a_τ – ускорение пули; t – время движения пули. Из первого и второго уравнений с учетом исходных данных имеем:

$$a_\tau = \frac{2(S - S_0 - V_0 t)}{t^2} = \frac{2S}{t^2};$$

$$a_\tau = \frac{V - V_0}{t} = \frac{V}{t}.$$

Решив эти уравнения совместно, имеем:

$$\frac{V}{t} = \frac{2S}{t^2} \Leftrightarrow V = \frac{2S}{t} \Rightarrow t = \frac{2S}{V} = \frac{2 \cdot 0{,}22}{270} = 1{,}63 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$a_\tau = \frac{2 \cdot S}{t^2} = \frac{2 \cdot 0{,}22}{1{,}63 \cdot 10^{-3}} \approx 166 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2.$$

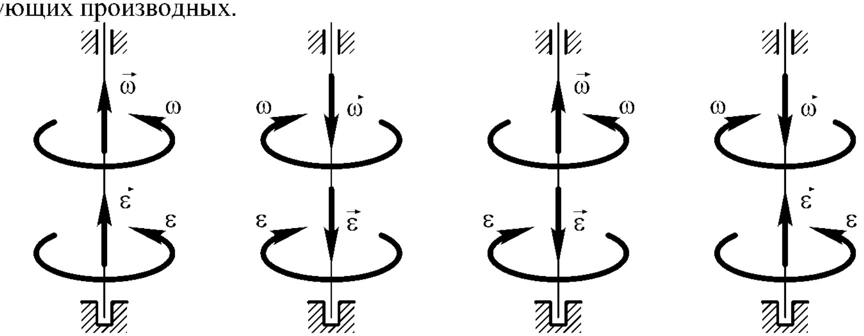
Пример. Самолет делает разворот, двигаясь равномерно по круговой траектории радиусом 60 км со скоростью 3000 км/ч. Найти полное ускорение, которое действует на пилота самолета.

Решение. Так как самолет движется с постоянной скоростью, то $a_\tau = 0$. Нормальное ускорение, которое обусловлено движением самолета вдоль круговой

водной от угла поворота по времени: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$. На схемах ε обычно показывается дуговой стрелкой. Единица измерения углового ускорения – радиан в секунду за секунду ($с^{-2}$ или $1/с^2$ или рад./$с^2$).

Угловые скорость и ускорение на схемах обычно обозначают дуговыми стрелками, но фактически они представляют собой векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$, которые совпадают с осью вращения (эти векторы являются скользящими). Направление вектора $\vec{\omega}$ такое, что с его конца направление вращения тела ω видно против хода часовой стрелки. Аналогично направление вектора $\vec{\varepsilon}$ такое, что с его конца направление ускорения ε видно против хода часовой стрелки.

Ниже на рисунке в качестве примера приведены различные случаи соединений знаков ω и ε. Направление векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ определяются знаком соответствующих производных.



ω > 0 ε > 0	ω < 0 ε < 0	ω > 0 ε < 0	ω < 0 ε > 0
ускоренное	ускоренное	замедленное	замедленное

Знак ускорения ε определяет изменение абсолютного значения угловой скорости ω: если знак ε совпадает со знаком ω, то абсолютное значение угловой скорости ω увеличивается (движение ускоренное); если знак ε не совпадает со знаком ω, то абсолютное значение угловой скорости уменьшается (движение замедленное).

Угловые скорость и ускорение являются главными характеристиками вращательного движения и являются одинаковыми для всех точек твердого тела в текущий момент времени.

Частные случаи вращательного движения тела в зависимости от значения углового ускорения:

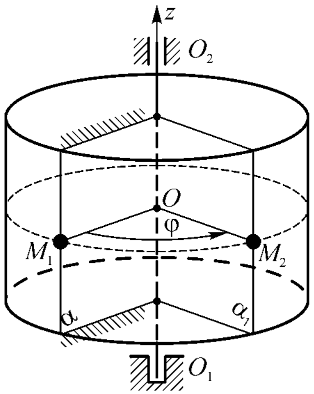
1. $\varepsilon = 0$ – движение равномерное ($\omega = \text{const}$); закон равномерного вращения $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, где φ_0 – начальный угол поворота тела;

2. $\varepsilon \neq 0$ – движение неравномерное ($\omega \neq \text{const}$);

3. $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = \text{const}$ – движение равноускоренное или равнозамедленное; закон равнопеременного вращения $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$, где ω_0 – начальная угловая скорость тела.

Пример. Жесткий диск компьютера («винчестер») вращается равноусколежат оси вращения, двигаются в плоскостях, которые перпендикулярны оси вращения и описывают траектории в виде кругов с центрами на этой оси.

Необходимо во вращательном движении различать вращение (вокруг оси, которая проходит через тело) от оббегания (вокруг оси, которая не проходит через тело). Например, Земля оббегает полный круг вокруг Солнца за год и вращается вокруг своей оси на один оборот на протяжении суток.



В качестве примера рассмотрим цилиндр, который вращается вокруг своей продольной оси (см. рис). Проведем ось z так, чтобы она совпадала с продольной осью цилиндра. При этом линия O_1O_2, которая совпадает с осью z, является осью вращения.

Проведем через ось две полуплоскости: неподвижную α и связанную с телом подвижную α_1. При вращении тела точка M, которая лежит на поверхности цилиндра, переместится из своего первоначального положения M_1 в положение M_2.

Для задания вращательного движения тела достаточно задать угол его поворота вокруг оси (то есть угол между полуплоскостями α и α_1) в зависимости от времени $\varphi = F(t)$ и направление его изменения.

Положительным направлением отсчета полагается поворот тела против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси O_1z.

Угол поворота φ измеряется в радианах, но иногда – в числе оборотов N. Взаимосвязь между φ и N следующий:

$$\varphi = 2\pi N\,; \qquad N = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Угловая скорость ω *характеризует скорость поворота тела, то есть – скорость и направление изменения угла поворота φ в текущий момент времени.* Величина угловой скорости равна первой производной от угла поворота по времени: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$. На схемах ω обычно показывается дуговой стрелкой, направленной в сторону вращения. Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду ($с^{-1}$ или 1/с или рад./с).

Знак ω определяется направлением вращения: если $\omega > 0$, то вращение происходит против хода часовой стрелки, если $\omega < 0$, то – по ходу часовой стрелки (если смотреть с конца координатной оси, которая совпадает с осью вращения).

Скорость вращения часто определяют частотой вращения n, измеренную в оборотах в минуту (об./мин.). Взаимосвязь между ω и n следующая:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}\,; \qquad n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Угловое ускорение ε *характеризует скорость и направление изменения угловой скорости ω в текущий момент времени.* Величина углового ускорения равна первой производной от угловой скорости по времени или второй произ-

траектории: $a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{3000}{3,6}\right)^2}{60000} = 11,57$ м/с^2. Тогда полное ускорение с учетом действия земного тяготения: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2 + g^2} = \sqrt{0^2 + 11,57^2 + 9,81^2} = 15,17$ м/с^2.

Пример. Клеть шахтного подъема движется со скоростью 10 м/с. При торможении ускорение равно 0,5 м/с^2. Найти время и путь торможения.

Решение. За начало отсчета примем момент начала торможения, при котором начальный пройденный путь $S = S_0 = 0$, начальная скорость движения $V = V_0 = 10$ м/с. Так как скорость клети уменьшается, то $a_\tau = a = -0,5$ м/с^2. Так как в конце движения клеть остановилась, то $V = 0$. Тогда можно записать

$$V = V_0 + (-a_\tau)t$$

или (в конце торможения)

$$0 = 10 - a_\tau t \Rightarrow t = \frac{V_0}{a_\tau} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ с};$$

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{(-a_\tau)t^2}{2}$$

или

$$S = 0 + 10 \cdot 20 - \frac{0,5 \cdot 20^2}{2} = 100 \text{ м}.$$

Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 4t^2$, $y = t^3$. Установить скорость, ускорение точки, радиус кривизны траектории через 5 с после начала движения из состояния покоя и уравнение, которое определяет форму траектории.

Решение. Определим выражения, которые определяют проекции скорости и ускорений на координатные оси, а затем – их численные значения в заданный момент времени:

$V_X = \dot{x} = 8t$; при t=5 с: $V_X = 8 \cdot 5 = 40$ м/с;

$V_Y = \dot{y} = 3t^2$; при t=5 с: $V_Y = 3 \cdot 5^2 = 75$ м/с;

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{40^2 + 75^2} = 85 \text{ м/с};$$

$a_X = \dot{V}_X = 8$; при t=5 с: $a_X = 8$ м/с^2;

$a_Y = \dot{V}_Y = 6t$; при t=5 с: $a_Y = 6 \cdot 5 = 30$ м/с^2;

$$a_\tau = \frac{V_X a_X + V_Y a_Y}{V} = \frac{40 \cdot 8 + 75 \cdot 30}{85} = 30,24 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{|V_X a_Y - V_Y a_X|}{V} = \frac{|40 \cdot 30 - 75 \cdot 8|}{85} = 7,06 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = \sqrt{8^2 + 30^2} = 31,05 \text{ м/с}^2$$

или

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{30,24^2 + 7,06^2} = 31,05 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны при t=5 с определим из выражения

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{85^2}{7,06} = 1023 \text{ м}.$$

Уравнения, которое определяет форму траектории точки, определим из исходных уравнений движения точки, для чего исключим из них параметр t. Для этого из первого уравнения выразим t и подставим во второе уравнение:

$x = 4t^2 \Rightarrow t = 0,5\sqrt{x} = 0,5x^{0,5}$;

$y = (0,5x^{0,5})^3 = 0,125x^{1,5}$ (парабола).

Начало траектории определяется точкой, которая имеет координаты, вычисленные с помощью исходных уравнений движения при подстановке в них значения t=0: x=0 м; y=0 м. При t=5 с точка имеет координаты

$x = 4 \cdot t^2 = 4 \cdot 52 = 100$ м;

$y = t^3 = 53 = 125$ м.

Проверь свои знания!

1. Что изучает кинематика?
2. Какие основные задачи решаются в кинематике?
3. Что называется механическим движением, системой отсчета? Что такое время?
4. Что называется траекторией точки?
5. Какие существуют способы задания движения точки?
6. В чем состоит векторный способ задания движения?
7. В чем состоит координатный способ задания движения?
8. В чем состоит естественный способ задания движения?
9. Как определить траекторию точки при разных способах задания ее движения?
10. Как определить скорость точки при разных способах задания ее движения?
11. Как определить ускорение точки при разных способах задания ее движения?
12. Что характеризует скорость?
13. Что характеризует касательное ускорение?
14. Что характеризует нормальное ускорение?
15. Какие ускорения имеет точка при ее равномерном движении по криволинейной траектории?
16. Какие ускорения имеет точка при ее прямолинейном неравномерном движении?
17. Какие ускорения имеет точка при ее криволинейном неравномерном движении?

2.4. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.4.1. Простейшие движения твердого тела

2.4.1.1. Поступательное движение твердого тела

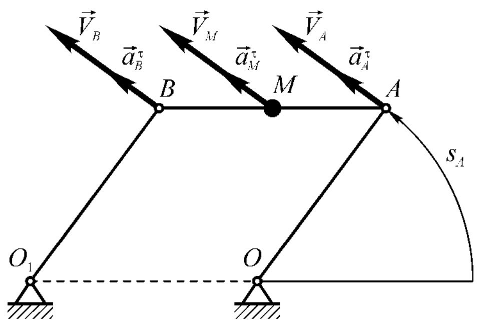
Поступательное движение твердого тела – такое движение, при котором прямая, которая соединяет две любые точки этого тела, перемещается вместе с телом, оставаясь параллельной своему начальному положению.

Примером поступательного движения может быть движение кабин колеса обзора («чертова колеса»). Во время вращения колеса кабины всегда находятся в вертикальном положении и любая линия, например, проведенная на полу или стенке кабины, всегда будет оставаться параллельной самой себе (если кабину не раскачивать!). Итак, кабины двигаются поступательно. При этом траекториями движения всех точек кабины являются окружности.

При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

Так как все точки тела при его поступательном движении описывают одинаковые траектории, то для задания (описания) этого движения достаточно задать параметры движения одной точки тела любым из выше изученных способов. Например, уравнения поступательного движения твердого тела в декартовой системе координат записываются так: $x = F_1(t)$; $y = F_2(t)$; $z = F_3(t)$.

Скорость и ускорения твердого тела определяются по формулам, представленным выше в разделе «Кинематика точки».



Пример. Стержень AB шарнирного спарника $OABO_1$ движется поступательно (см. рис.). Точка A стержня движется по закону S_A=S=πt^2. Определить скорость и касательное ускорение точки M, которая расположена в середине длины стержня AB, в момент времени t = 5 с.

Решение. Стержень AB осуществляет поступательное движение, следовательно, скорости и ускорения точек A, B и M будут одинаковые:

$$V_A = V_B = V_M = \dot{S} = 2\pi t;$$

$$a_A = a_B = a_M = \dot{V} = 2\pi.$$

При t=5 с: $V_A = V_B = V_M = 2\pi \cdot 5 = 31,4$ м/с;

$$a_A^\tau = a_B^\tau = a_M^\tau = 2\pi = 6,28 \text{ м/с}^2.$$

Векторы скорости $\vec{V}$ и ускорений $\vec{a}^\tau$ направлены согласованно с перемещением (в соответствии с направлением перемещения и полученными знаками скорости и ускорений) вдоль линий, касательных к траектории движения. Так как траекторией движения всех точек являются окружности, то эти векторы расположены нормально к радиусам вращения (то есть перпендикулярно к кривошипам OA и O_1B).

Ответ. V_M = 31,4 м/с, a_M^τ = 6,28 м/с^2.

2.4.1.2. Вращательное движение твердого тела

Вращательное движение твердого тела – *такое движение, при котором некоторая прямая, связанная с телом, всегда остается неподвижной.* Эта неподвижная прямая называется осью вращения. Точки тела, которые не принад-