МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Стахановский инженерно-педагогический институт менеджмента
Кафедра общеинженерных дисциплин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по дисциплине

«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

для студентов направления подготовки

Профессиональное обучение (по отраслям), профили: «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело»

(в 2-х частях). Часть 1. «Теоретическая механика»

Луганск 2022

УДК 531:681.3

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом
ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ»
(протокол № от . .2022 г.)

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки **Профессиональное обучение (по отраслям), профили:** «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» **(в 2-х частях). Часть 1. «Теоретическая механика»** / Сост.: В.И. Сафонов. – **Стаханов**: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ», 2022. – 76 с.

Представлены методические указания и примеры решения типичных задач по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» раздела «Теоретическая механика». Также приведен минимальный объём основных понятий, необходимых для решения задач, а также задания для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили: «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело».

Составитель: доц. Сафонов В.И.

Ответственный за выпуск: доц. Сафонов В.И.

Рецензент: доц. Петров А.Г.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Курс «Теоретическая и прикладная механика», раздел «Теоретическая механика» включает три подраздела − статику, кинематику и динамику.

Для изучения раздела «Теоретическая механика» необходима соответствующая математическая подготовка. Необходимо уметь: пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, а также знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов; вычислять проекции векторов на координатные оси; находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов; вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений; дифференцировать векторы. При изучении раздела «Кинематика» необходимо уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии. При изучении раздела «Динамика» необходимо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

При самостоятельном изучении материала раздела «Теоретическая механика» по учебнику или учебному пособию необходимо в первую очередь уяснить существо каждого излагаемого вопроса. Главное − это понять изложенное в учебнике, а не «заучить».

При изучении раздела особое внимание уделяется приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, необходимо разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, а также в настоящих методических указаниях, обратив особое внимание на методику их решения.

Закончив изучение темы, нужно осуществить самопроверку по вопросам, приведенным в учебнике или учебном пособии.

ВВЕДЕНИЕ

Ниже приведены основные задачи отдельных подразделов теоретической механики и алгоритмы их решения. В примерах также приведены частные алгоритмы, которых следует придерживаться при решении соответствующих контрольных задач.

Основные задачи статики:

− определение условий равновесия системы сил, действующих на тело;

− преобразование системы сил, действующих на тело, в эквивалентные системы;

− определение положения центра тяжести тела и системы тел.

Наиболее важная задача статики − условие равновесия неподвижного материального объекта, который находится под действием сил. Решение этой задачи (задачи на равновесие) желательно выполнять в соответствии со следующим алгоритмом:

1 − определить объект (точку, тело, систему тел), равновесие которого необходимо рассмотреть; изобразить схему объекта со всеми действующими связями.

2 − выбрать систему координат (если она не задана);

3 − к рассматриваемому объекту приложить все действующие на него силы;

4 − установить действующие реакции связей;

5 − используя принцип освобождения от связей заменить действие связей соответствующими силами − реакциями связей;

6 − к действующей системе сил применить условия равновесия (составить уравнения равновесия), которые соответствуют рассматриваемой системе;

7 − определить искомые величины.

Прим. Иногда целесообразно пункт 2 приведенного алгоритма выполнять совместно с пунктами 3 и 4, тогда при выборе направления координатных осей можно будет учесть направления действия сил и реакций связей.

Прим. Выполняя пункты 3 и 4 необходимо действующие силы и реакции связей разложить на составляющие, параллельные координатным осям, изобразив их на рисунке, что облегчит выполнение пункта 6.

Основная задача кинематики − определение кинематических характеристик движения материальных объектов. При этом движение материального объекта (точки, твердого тела) рассматривается с геометрической точки зрения, т.е. без учёта действующих на объект силовых факторов (сил, моментов), которые обуславливают это движение.

При решении этой задачи желательно придерживаться следующего алгоритма:

1 − выделить материальный объект (точку, твёрдое тело), кинематические параметры движения которого необходимо определить;

2 − установить движение, которое совершает выделенный материальный объект. При этом необходимо учитывать, что:

− материальная точка может совершать два вида движения − простое или сложное; если точка совершает простое движение, то необходимо определить, каким способом задано это движение;

− твёрдое тело может совершать простое движение (поступательное и вращательное вокруг неподвижной оси) и сложное движение (плоскопараллельное движение, движение вокруг неподвижной точки, другие виды сложного движения, которые складываются из простых движений − поступательного и вращательного).

3 − установить формулы, по которым в соответствии с заданными исходными данными будут определяться неизвестные (искомые) кинематические параметры движения.

Основные задачи динамики:

− прямая задача (первая задача динамики): зная кинематические параметры движения (скорость, ускорение) материального объекта определить силовые факторы (силы, моменты), действующие на этот объект;

− обратная задача (вторая задача динамики): зная силовые факторы (силы, моменты), действующие на материальный объект, определить кинематические параметры его движения (скорость, ускорение).

Обе эти задачи решаются с помощью зависимостей между кинематическими параметрами движения материального объекта и действующими на него силовыми факторами в соответствии со следующим алгоритмом:

1 − выделить материальный объект, движение которого изучается;

2 − установить все активные и пассивные силы, действующие на объект;

3 − выбрать систему координат; оси координат желательно направить так, чтобы координаты текущего положения объекта, а также проекции его скорости на координатные оси были бы положительными (это облегчит решение задачи); если тело совершает вращательное движение, то необходимо указать ось вращения;

4 − выбрать один из трёх методов решения задачи: метод дифференциальных уравнений движения; метод общих теорем динамики; метод общих принципов;

5 − подставив в выбранные (в п. 4) уравнения необходимые выражения и величины, выполнить соответствующие преобразования и определить искомые величины.

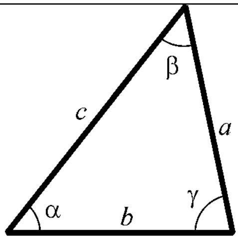
Практическое занятие 1
Решение задач статики

Цель и задачи занятия: освоить решение задач на равновесие тела под действием плоской системы сил, а также определения положения центра тяжести плоской тонкой однородной симметричной пластины.

Постановка задачи: освоить решение задач на равновесие тела под действием плоской системы сил. для чего необходимо повторить школьный материал о векторах и действиях над ними, а также изучить материал, изложенный в [1], с. 12…46, с. 55…58.

1.1 Основные понятия и зависимости статики

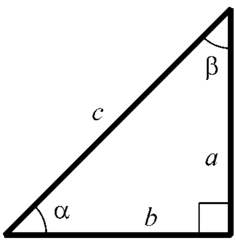
Основные понятия векторной алгебры



Соотношения между элементами треугольника

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha)$$

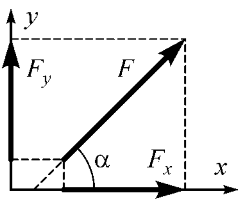


Соотношения между элементами прямоугольного треугольника

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{a}{c}$$

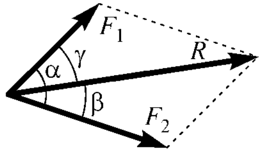
$$\cos(\alpha) = \sin(\beta) = \frac{b}{c}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{ctg}(\beta) = \frac{a}{b}$$



$F_x = F\cos(\alpha)$, $F_y = F\sin(\alpha)$, модуль $F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$ и направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{F_X}{F}$, $\cos\beta = \frac{F_Y}{F}$,

Разложение силы на составляющие $\vec{F} = F_X\vec{i} + F_Y\vec{j} + F_Z\vec{k}$ или в аналитическом виде: F_X=Fcosα; F_Y=Fcosβ; F_Z=Fcosγ; её модуль $F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2}$ и направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{F_X}{F}; \cos\beta = \frac{F_Y}{F}; \cos\gamma = \frac{F_Z}{F}$.

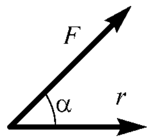


Сумма двух векторов

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

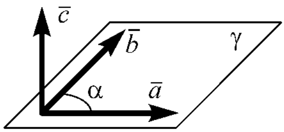
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\alpha)}$$

$$\frac{F_1}{\sin(\beta)} = \frac{F_2}{\sin(\gamma)} = \frac{R}{\sin(\alpha)}$$



Скалярное произведение

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot \cos(\alpha)$$



Векторное произведение

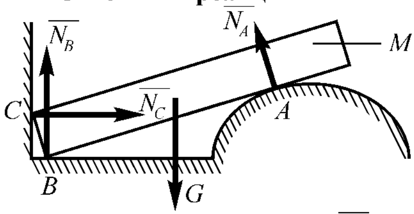
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\alpha)$$

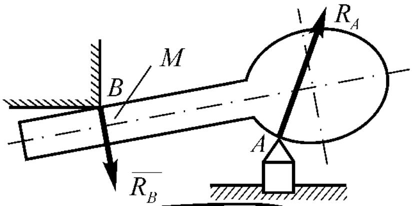
$$\vec{a} \in \gamma; \qquad \vec{b} \in \gamma;$$

$$\vec{c} \perp \vec{a}; \qquad \vec{c} \perp \vec{b}; \qquad \vec{c} \perp \gamma$$

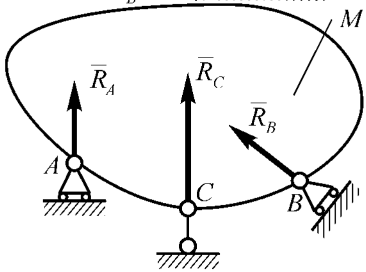
Связи и их реакции



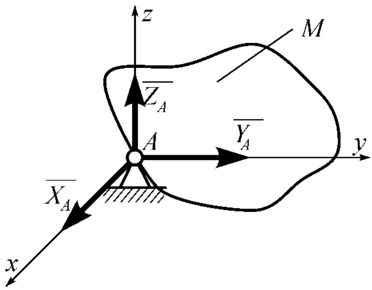
Идеально гладкая поверхность имеет одну реакцию, направленную перпендикулярно поверхности (обычно обозначается буквой N)



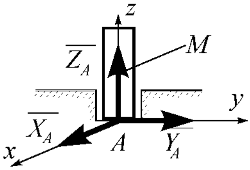
Точечная опора, а также опора «на ребро» имеет одну реакцию, направление которой перпендикулярно к поверхности опирающегося тела (обычно обозначается буквой R).



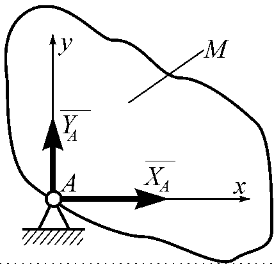
Шарнирно-подвижная опора (эквивалентна идеально гладкой поверхности) имеет одну реакцию, направленную перпендикулярно поверхности, на которую опирается опора (обычно обозначается буквой R).



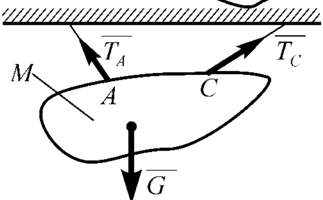
Сферический шарнир имеет одну неизвестную по направлению реакцию, которая раскладывается на три (при рассмотрении пространственных задач) или две (при рассмотрении плоских задач) составляющие (обычно обозначается буквой R с индексами точки и координатной оси, вдоль которой направлена или большой буквой координатной оси, вдоль которой направлена).



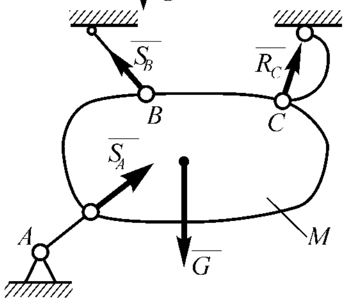
Подпятник (упорный подшипник) имеет одну неизвестную по направлению реакцию, которая раскладывается на три (при рассмотрении пространственных задач) или две (при рассмотрении плоских задач) составляющие.



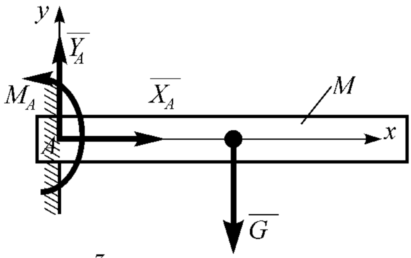
Цилиндрический шарнир или подшипник (втулка *2*, свободно надетая на болт *1*) имеет неизвестную по направлению реакцию, которая раскладывается на две составляющие и лежащую в плоскости, перпендикулярной оси болта и проходящую через его центр.

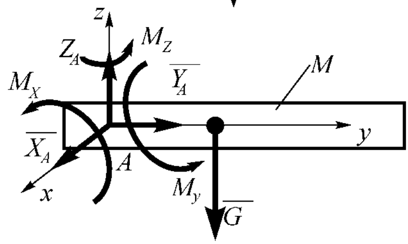


Гибкое тело (нитка, трос, цепь) имеет одну реакцию, направленную по касательной к нити (тросу, цепи) в точке прикрепления в сторону второй точки прикрепления (обычно обозначается буквой T).



Невесомый стержень с шарнирами на концах имеет одну реакцию в точке прикрепления, проходящую через точки закрепления (обычно обозначается буквой T или S и называется усилием в стержне).





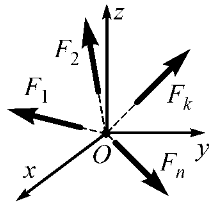
Заделка, защемление (балка M, которая одним концом жестко заделана в стену).

Для плоской конструкции (верхний рисунок) реакция имеет одну силу неизвестного направления, которая раскладывается на две составляющие, и пару сил (момент) величиной M_A (реактивный момент).

Для пространственной конструкции (нижний рисунок) реакция имеет одну силу неизвестного направления, которая раскладывается на три составляющие, и три пары сил (моментов, обычно относительно координатных осей) величиной M_x, M_y, M_z (реактивные моменты).

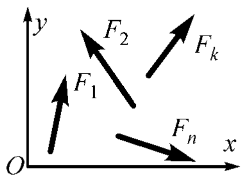
Условия равновесия. Моменты силы

Система сходящихся сил



геометрическое − $\sum \vec{F}_i = 0$;
аналитическое − $\sum X_i = 0$; $\sum Y_i = 0$; $\sum Z_i = 0$.
Равнодействующая сходящихся сил $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$.

Плоская система сил



$\sum X_i = 0$; $\sum Y_i = 0$; $\sum Z_i = 0$.

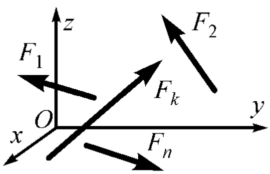
или

$\sum X_i = 0$; $\sum m_A = 0$; $\sum m_B = 0$; $AB \in Ox$.

или

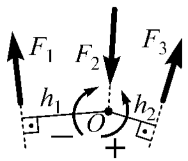
$\sum m_A = 0$; $\sum m_B = 0$; $\sum m_C = 0$; $C \notin AB$.

Произвольная пространственная система сил



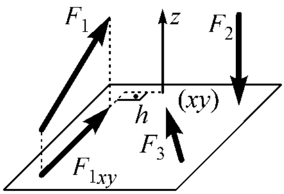
$\sum X_i = 0$;
$\sum Y_i = 0$;
$\sum Z_i = 0$;
$\sum m_x = 0$;
$\sum m_y = 0$;
$\sum m_z = 0$.

Момент силы относительно центра



$m_O(F_1) = -F_1 h_1$
$m_O(F_2) = 0$ (т.к. $h_{F2} = 0$)
$m_O(F_3) = +F_3 h_2$

Момент силы относительно оси



$m_Z(F_1) = -F_{1xy}h$
$m_Z(F_2) = 0$ (т.к. $F_{2xy} = 0$)
$m_Z(F_3) = 0$ (т.к. $h_{F3} = 0$)

Основные зависимости статики

Равнодействующая двух пересекающихся сил $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, её модуль вычисляется как диагональ параллелограмма $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$.

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси $R_X=\sum F_{Xi}$; $R_Y=\sum F_{Yi}$; $R_Z=\sum F_{Zi}$ и её модуль $R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}$.

Векторный момент силы относительно точки $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{R} \times \vec{F}$. Модуль векторного произведения $M_0(\vec{F}) = \vec{R}\vec{F}\sin\alpha = Fh$. Момент плоской системы сил относительно точки – $M_0(\vec{F}) = \sum(\pm F_i h_i)$.

Момент силы относительно оси z: $M_Z(\vec{F}) = M_Z(\vec{F}_{XY}) = M_O(\vec{F}_{XY}) = \pm F_{XY}h$.

Главный вектор $\vec{F}_O = F_X\vec{i} + F_Y\vec{j} + F_Z\vec{k}$ и главный момент $\vec{M}_O = M_{Xo}\vec{i} + M_{Yo}\vec{j} + M_{Zo}\vec{k}$.

Условия равновесия пространственной системы сил: $\sum F_{Xi}=0$; $\sum F_{Yi}=0$; $\sum F_{Zi}=0$; $\sum M_X(F_i)=0$; $\sum M_Y(F_i)=0$; $\sum M_Z(F_i)=0$.

Условие равновесия пар сил: $\sum \vec{M}_i = 0$.

Координаты центра параллельных сил: $x_C = \dfrac{\sum F_{Xi} \cdot x_i}{\sum F_{Xi}}$.

Координаты центра тяжести:

– тела (центра масс системы тел):

$$x_C = \frac{\sum P_{Xi} \cdot x_i}{\sum P_i};\quad y_C = \frac{\sum P_{Yi} \cdot y_i}{\sum P_i};\quad z_C = \frac{\sum P_{Zi} \cdot z_i}{\sum P_i};$$

– плоской фигуры – $x_C = \dfrac{\sum x_i \cdot S_i}{\sum S_i}$, $y_C = \dfrac{\sum y_i \cdot S_i}{\sum S_i}$;

– дуги окружности с центральным углом 2α – $x_C = R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$;

– кругового сектора – $x_C = \dfrac{2}{3}R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.

Закон Кулона (закон Амонта-Кулона): $F_{TP}^{\max} = f_{TP} \cdot N$ или $F_{СЦ}^{\max} = f_{СЦ} \cdot N$; $\mathrm{tg}\varphi_{TP}=f_{TP}$; $\mathrm{tg}\varphi_{СЦ}=f_{СЦ}$. Сила трения скольжения: $F_{TP} \le f_{TP} \cdot N$.

1.2 Примеры решения типичных задач статики

1.2.1 Задачи С1, С2, С3

Задачи С1, С2, С3 − на равновесие тела под действием плоской системы сил. Все силы и реакции связей желательно заранее разложить на составляющие, параллельные координатным осям (это упростит определение плечей действия сил при вычислении создаваемых ими моментов относительно выбранной точки). Составляя уравнения равновесия, необходимо учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержать меньше слагаемых), если определять моменты относительно точки, в которой пересекается наибольшее количество линий действия сил.

Алгоритм решения задач С1, С2, С3.

1. Начертить схему конструкции с наложенными связями.

2. Установить и обозначить на схеме координатные оси Oxy.

3. К рассматриваемому объекту приложить все действующие на него силы (не заданные в варианте точки, силы и моменты на схеме не изображать!). Разложить все силы на составляющие, параллельные координатным осям.

Прим. Действующую равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q необходимо заменить сосредоточенной силой Q, расположенной в середине длины действия нагрузки и численно равной произведению q на длину участка действия нагрузки.

4. Установить и изобразить на схеме действующие реакции связей. Разложить все реакции связей на составляющие, параллельные координатным осям.

Прим. Целесообразно пункт 2 выполнить совместно с пунктами 3 и 4, что позволит учесть направления действующих сил и реакций связей.

5. Составить уравнения равновесия плоской системы сил вида

$\sum F_x = 0;$

$\sum F_y = 0;$

$\sum M_T = 0.$

Прим. При составлении последнего уравнения в качестве точки T, относительно которой определяется момент сил, желательно выбрать такую, в которой сходится наибольшее количество линий действия неизвестных сил, что позволит упростить уравнение (для случая системы сходящихся сил уравнение станет равенством вида 0=0) и его решение.

6. Рассматривая 3 уравнения равновесия как систему линейных алгебраических уравнений, решить её относительно неизвестных реакций связей, т.е. определить их.

7. Выполнить проверку правильности решения и вычислений, составив уравнение моментов относительно точки, отличной от ранее принятой точки T (уравнение рассматривается как равенство, которое должно выполняться при подставлении в него числовых значений, в т.ч. установленных в ходе решения задачи).

Пример решения задачи С3. Жесткая рама $ABCD$ (рис. С3) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B − подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: F = 25 кН, $\alpha = 60^\circ$, P = 18 кН, $\beta = 75^\circ$, M = 50 кН·м, $\gamma = 30^\circ$, ℓ = 0,5 м.

Определить: реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

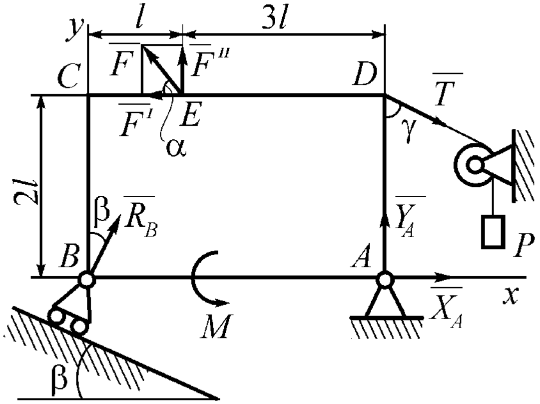


Рис. С3

Решение. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на раму силовые воздействия: силу F, пару сил с моментом M, натяжение троса T (по модулю $T = P$). Установим направления и изобразим реакции связей X_A, Y_A, R_B (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя её составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении моментов силы F и R_B относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу F на составляющие $F' = F\cos(\alpha)$ и $F'' = F\sin(\alpha)$, а силу R_B − на составляющие $R_B^{'} = R_B \sin\beta$ и $R_B^{''} = R_B \cos\beta$. Тогда получим

$\sum F_{ix} = 0$: $\quad X_A + R_B \sin(\beta) - F\cos(\alpha) + T\sin(\gamma) = 0;$ (1)

$\sum F_{iy} = 0$: $\quad Y_A + R_B \cos(\beta) + F\sin(\alpha) - T\cos(\gamma) = 0;$ (2)

$\sum M_A(F_i) = 0$: $M - R_B\cos(\beta)\cdot 4\ell + F\cos(\alpha)\cdot 2\ell - F\sin(\alpha)\cdot 3\ell - T\sin(\gamma)\cdot 2\ell = 0.$ (3)

Составленные уравнения содержат 3 неизвестных величины − реакции опор X_A, Y_A и R_B. Решив уравнения как систему вначале в символьном виде, а затем − в численном (подставив числовые значения известных величин), определим искомые реакции.

Из уравнения (3) найдём R_B, а затем из уравнений (1) и (2) найдём X_A и Y_A:

$$R_B = \frac{M + F\cos(\alpha)\cdot 2l - F\sin(\alpha)\cdot 3l - T\sin(\gamma)\cdot 2l}{\cos(\beta)\cdot 4l} =$$

$$= \frac{50 + 25\cos 60^\circ\cdot 2\cdot 0{,}5 - 25\sin 60^\circ\cdot 3\cdot 0{,}5 - 18\sin 30^\circ\cdot 2\cdot 0{,}5}{\cos 75^\circ\cdot 4\cdot 0{,}5} = 40{,}6 \text{ кН};$$

$X_A = -R_B \sin(\beta) + F\cos(\alpha) - T\sin(\gamma) =$

$= -40{,}6 \sin 75^\circ + 25\cos 60^\circ - 18\sin 30^\circ = -35{,}7$ кН;

$Y_A = -R_B\cos(\beta) - F\sin(\alpha) + T\cos(\gamma) =$

$= -40{,}6\cos 75^\circ - 25\sin 60^\circ + 18\cos 30^\circ = -16{,}6$ кН.

Модуль полной реакции связи A определим как сумму её составляющих:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-35{,}7)^2 + (-16{,}6)^2} = 39{,}4 \text{ кН}.$$

Прим. Решение системы можно упростить, если решать её, подставив численные значения известных величин, а затем, если возможно, преобразовав и упростив полученные выражения.

Для проверки правильности решения и вычислений составим уравнение моментов относительно точки B, подставим в него получившиеся численные значения и сделаем вычисления (в результате должен быть получен ноль):

$M_B = F\cos(\alpha)\cdot 2\ell + F\sin(\alpha)\cdot \ell - T\cos(\gamma)\cdot 4\ell - T\sin(\gamma)\cdot 2\ell + Y_A 4\ell + M =$
$= 25\cdot 0,5\cdot 2\cdot 0,5 + 25\cdot 0,866\cdot 0,5 - 18\cdot 0,866\cdot 4\cdot 0,5 - 18\cdot 0,5\cdot 2\cdot 0,5 - 16,6\cdot 4\cdot 0,5 + 50 =$
$= 12,5 + 10,83 - 31,18 - 9 - 33,15 + 50 = 0.$

Ответ: $X_A = -35,7$ кН, $Y_A = -16,6$ кН, $R_A = 39,4$ кН, $R_B = 40,6$ кН. Знаки указывают, что силы X_A и Y_A направлены в сторону, противоположную показанным на рис. С3.

1.2.2 Задача С4

Задача С4 − на равновесие системы тел под действием плоской системы сил. Составляя уравнения равновесия, необходимо учесть, что, как и в задаче С1, уравнения моментов будут более простыми (содержать меньше слагаемых), если определять их относительно точек, в которых пересекаются линии действия наибольшего числа сил.

Алгоритм решения задачи С4.

1. Начертить схему конструкции с наложенными связями.
2. Установить и обозначить на схеме координатные оси Oxy.
3. К рассматриваемому объекту приложить все действующие на него силы (не заданные в варианте точки, силы и моменты на схеме не изображать!). Разложить все силы на составляющие, параллельные координатным осям.

Прим. Действующую равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q необходимо заменить сосредоточенной силой Q, расположенной в середине длины действия нагрузки и численно равной произведению q на длину действия нагрузки.

4. Установить и изобразить на схеме действующие реакции связей. Разложить все реакции связей на составляющие, параллельные координатным осям.

Прим. Целесообразно пункт 2 выполнить совместно с пунктами 3 и 4, что позволит учесть направления действующих сил и реакций связей.

5. Учитывая, что конструкция представлена системой двух тел, составить уравнения равновесия плоской системы сил вида

$\sum F_{X(1)} = 0;$
$\sum F_{У(1)} = 0;$
$\sum M_{(T1)} = 0;$
$\sum F_{X(2)} = 0;$
$\sum F_{У(2)} = 0;$
$\sum M_{(T2)} = 0;$

Прим. Т.к. конструкция сочлененных тел находится в равновесии, то и каждая из её составных частей находится в равновесии. Тогда для составления системы уравнений необходимо равновесие конструкции рассмотреть одним из двух способов:

− конструкция расчленяется на два отдельных тела и равновесие каждого из них рассматривается в отдельности (при равновесии одного тела системы остальные тела системы будут для него связями; при расчленении необходимо учесть аксиому (закон) о равенстве действия и противодействия); для каждого тела составляются по три уравнения − соответственно с индексами 1 и 2;

− рассматривается равновесие всей составной конструкции (три уравнения с индексом 1), а затем − равновесие одного из тел (любого, изобразив его отдельно; три уравнения с индексом 2); при рассмотрении равновесия системы тел в уравнения равновесия не войдут силы, с которыми отдельные тела действуют друг на друга, т.е. внутренние силы.

Прим. При составлении уравнений моментов в качестве точек T_1 и T_2, относительно которых определяются моменты сил, следует выбирать такие, в которых сходятся наибольшее количество линий действия неизвестных сил, что позволит упростить уравнения и их решение.

6. Рассматривая 6 уравнений равновесия как систему линейных алгебраических уравнений, решить её относительно неизвестных реакций связей, т.е. определить их.

7. Для проверки правильности решения и вычислений можно составить уравнение моментов сил относительно точки для конструкции в целом, отличной от ранее принятых точек (T_1) и (T_2) (уравнение рассматривается как равенство, которое должно выполняться при подставлении в него числовых значений).

Пример решения задачи С4. На угольник ABC, один конец которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (см. рис. С4, *а*). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору; к стержню приложена сила F, а к угольнику − равномерно распределённая нагрузка интенсивности q и пара сил с моментом M.

Дано: $F = 10$ кН; $M = 5$ кН·м; $q = 20$ кН/м; $a = 0{,}2$ м.

Определить реакции в точках A, C, D, вызванные действующими нагрузками.

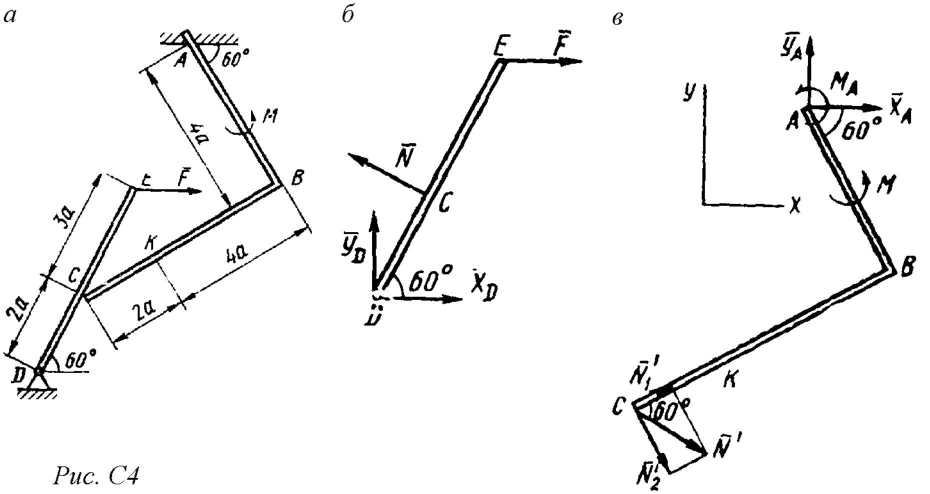


Рис. С4

Решение. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. С4, *б*). Проведем координатные оси Oxy и изобразим действующие на стержень силы: силу $\vec{F}$, реакцию $\vec{N}$, направленную перпендикулярно стержню (реакция $\vec{N}$ проявляется в результате действия "отброшенной" части конструкции − угольника ABC), составляющие $\vec{X}_D$ и $\vec{Y}_D$ реакции шарнира D. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$\sum F_{ix} = 0$: $\quad X_D + F - N\sin 60^\circ = 0$; (1)

$\sum F_{iy} = 0$: $\quad Y_D + N\cos 60^\circ = 0$; (2)

$\sum M_{D(Fi)} = 0$: $N\,2a - F\,5a\sin 60^\circ = 0$. (3)

Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. С4, *в*). На него действуют сила давления стержня $\vec{N}'$, направленная противоположно ранее установленной реакции $\vec{N}$, пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими X_A, Y_A, и пары с моментом M_A. Для этой плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$\sum F_{ix} = 0$: $\quad X_A + N'\sin 60^\circ = 0$; (4)

$\sum F_{iy} = 0$: $\quad Y_A - N'\cos 60^\circ = 0$; (5)

$\sum M_{A(Fi)} = 0$: $\quad M_A + M + N'\cos 60^\circ \cdot 4a + N'\sin 60^\circ \cdot 6a = 0$. (6)

Прим. При вычислении момента силы $\vec{N}'$ разлагаем её на составляющие $\vec{N}_1' = \vec{N}'\cos 60^\circ$ и $\vec{N}_2' = \vec{N}'\sin 60^\circ$ и применяем теорему Вариньона.

Решив составленные уравнения (1)…(6) как систему вначале в символьном виде, а затем − в численном, найдем искомые реакции. При решении учитываем, что в соответствии с законом равенства действия и противодействия значение N' равно N.

Решая последовательно уравнения (3), (2), (1), (4), (5), (6), получаем:

$$N = \frac{F5a\sin 60^\circ}{2a} = \frac{10\cdot 5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}866}{2\cdot 0{,}2} = 21{,}65 \text{ кН};$$

$$Y_D = -N\cos 60^\circ = -21{,}65\cdot 0{,}5 = -10{,}83 \text{ кН};$$

$$X_D = -F + N\sin 60^\circ = -10 + 21{,}65\cdot 0{,}866 = 8{,}75 \text{ кН};$$

$$X_A = -N'\sin 60^\circ = -21{,}65\cdot 0{,}866 = 18{,}75 \text{ кН};$$

$$Y_A = N'\cos 60^\circ = 21{,}65\cdot 0{,}5 = 10{,}83 \text{ кН};$$

$$M_A = -M - N'\cos 60^\circ\cdot 4a - N'\sin 60^\circ\cdot 6a =$$
$$= -5 - 21{,}65\cdot 0{,}5\cdot 4\cdot 0{,}2 - 21{,}65\cdot 0{,}866\cdot 6\cdot 0{,}2 = -36{,}16 \text{ кН}.$$

Модуль полных реакций связей точек A и D определим как сумму их составляющих:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-18{,}75)^2 + 10{,}83^2} = 21{,}65 \text{ кН};$$

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{8{,}75^2 + (-10{,}83)^2} = 13{,}92 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -18{,}75$ кН, $Y_A = 10{,}83$ кН, $R_A = 21{,}65$ кН, $M_A = -36{,}16$ кН·м, $X_D = 8{,}75$ кН, $Y_D = -10{,}83$ кН, $R_D = 13{,}92$ кН, $N = 21{,}65$ кН. Знаки указывают, что силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_D$ и момент $\vec{M}_A$ имеют направления, противоположные показанным на рисунках.

1.2.3 Задача С5

Задача С5 − на равновесие тела под действием пространственной системы сил. При решении учесть, что реакции сферического шарнира и подпятника имеют три составляющие, а реакция цилиндрического шарнира и подшипника − две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов силы F её удобно разложить на составляющие F' и F'', параллельные координатным осям.

Алгоритм решения задачи С5.

1. Начертить схему с приложенными силами и моментами (не заданные в варианте точки на схеме не изображать!).

2. Установить и изобразить на схеме действующие реакции связей.

3. Разложить все действующие силы на составляющие, параллельные координатным осям Ox, Oy и Oz.

4. Составить уравнения равновесия пространственной системы сил вида

$\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum F_z = 0$;

$\sum M_x = 0$; $\sum M_y = 0$; $\sum M_z = 0$.

5. Рассматривая 6 уравнений равновесия как систему линейных алгебраических уравнений, решить её относительно неизвестных реакций связей, т.е. определить их (это удобно сделать сначала в символьном виде, а затем − в численном).

Пример решения задачи С5. Вертикальная прямоугольная плита весом P (рис. С6) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD', лежащим в плоскости, параллельной плоскости yz. На плиту действуют сила F, (в плоскости xz), сила F_2 (параллельная оси y) и пара сил (в плоскости плиты) с моментом M.

Дано: $P = 5$ кН, M = 3 кН·м, $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 7{,}5$ кН, $\alpha = 30^\circ$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $CE = DE = 0{,}5DC$, $CK = BK = 0{,}5BC$.

Определить реакции опор A, В и стержня DD'.

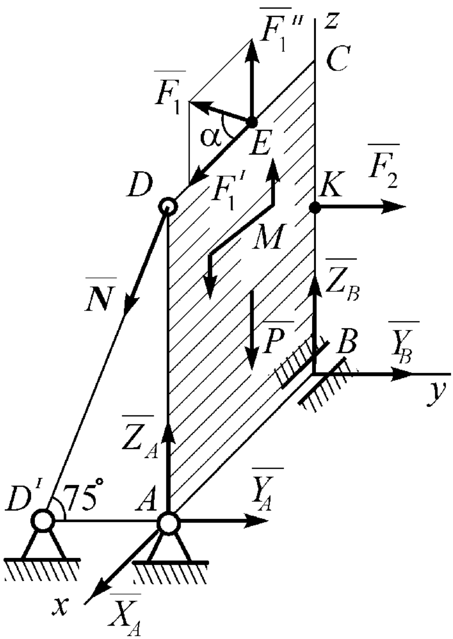


Рис. С5

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы P, F_1, F_2 и пара сил с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие X_A, Y_A, Z_A, цилиндрического шарнира (подшипника) − на две составляющие Y_B, Z_B (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию N стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растягивается.

Для упрощения решения задачи силу F_1 разлагаем на составляющие F_1' и F_1'', параллельные осям x и z. При этом $F_1' = F_1\cos(\alpha)$, $F_1'' = F_1\sin(\alpha)$. Аналогично нужно поступить при определении моментов реакции N (в данном примере разложив силу N на составляющие, параллельные осям y и z).

Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad X_A + F_1 \cos(\alpha) = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad Y_A + Y_B + F_2 - N\cos 75^\circ = 0; \qquad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0: \qquad Z_A + Z_B - P - N\sin 75^\circ + F_1 \sin(\alpha) = 0; \qquad (3)$$

$$\sum M_{x(Fi)} = 0: \qquad -F_2\cdot|BK| + N\cos 75^\circ\cdot|BC| = 0; \qquad (4)$$

$$\sum M_{y(Fi)} = 0: \qquad P\cdot|AB|/2 + F_1\cos(\alpha)\cdot|BC| - F_1\sin(\alpha)\cdot|AB|/2 - $$
$$-Z_A\cdot|AB| + N\sin 75^\circ\cdot|AB| + M = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_{z(Fi)} = 0: \qquad Y_A\cdot|AB| - N\cos 75^\circ\cdot|AB| = 0. \qquad (6)$$

Составленные уравнения содержет 6 неизвестных величины − реакции стержня DD', опор A и B (т.е. N, X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B). Решим уравнения как систему вначале в символьном виде, затем подставим численные значения заданных величин и определим искомые реакции (уравнения в этом примере решаются в следующей последовательности: (1), (4), (6), (5), (2), (3)).

$$X_A = -F_1\cos(\alpha) = -6\cos 30^\circ = -5{,}2 \text{ кН};$$

$$N = \frac{F_2\,|BK|}{\cos 75^\circ\,|BC|} = \frac{7{,}5\cdot 1}{\cos 75^\circ\cdot 2} = 14{,}5 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{N\cos 75^\circ\cdot|AB|}{|AB|} = \frac{14{,}5\cos 75^\circ\cdot 1}{1} = 3{,}8 \text{ кН};$$

$$Z_A = \frac{P\,|AB|/2 + F_1\cos(\alpha)\,|BC| - F_1\sin(\alpha)\,|AB|/2 + N\sin 75^\circ\,|AB| + M}{|AB|} =$$

$$= \frac{5 \cdot 1/2 + 6\cos 30^\circ \cdot 2 - 6\sin 30^\circ \cdot 1/2 + 14{,}5\sin 75^\circ \cdot 1 + 3}{1} = 28{,}4 \text{ кН};$$

$$Y_B = -Y_A - F_2 + N\cos 75^\circ = -3{,}8 - 7{,}5 + 14{,}5\cos 75^\circ = -7{,}5 \text{ кН};$$

$$Z_B = -Z_A + P + N\sin 75^\circ - F_1\sin(\alpha) = -28{,}4 + 5 + 14{,}5\sin 75^\circ - 6\sin 30^\circ = -12{,}4 \text{ кН}.$$

Модуль полных реакций связей A и B определим как сумму их составляющих:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-5{,}2)^2 + 3{,}8^2 + 28{,}4^2} = 29{,}12 \text{ кН};$$

$$R_B = \sqrt{Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{(-7{,}5)^2 + (-12{,}4)^2} = 14{,}5 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -5{,}2$ кН, $Y_A = 3{,}8$ кН, $Z_A = 28{,}4$ кН, $R_A = 29{,}12$ кН, $Y_B = -7{,}5$ кН, $Z_B = -12{,}4$ кН, $R_B = 14{,}5$ кН, $N = 14{,}5$ кН. Знаки указывают, что силы X_A, Y_B и Z_B имеют направление, противоположное показанному на рис. С5.

1.2.4 Задача С6

Задача С6 – на определение положения центра тяжести (ЦТ) плоской тонкой однородной симметричной пластины методом разбиения на части. При решении учесть, что пластина симметрична относительно одной из своих осей.

Алгоритм решения задачи С6.

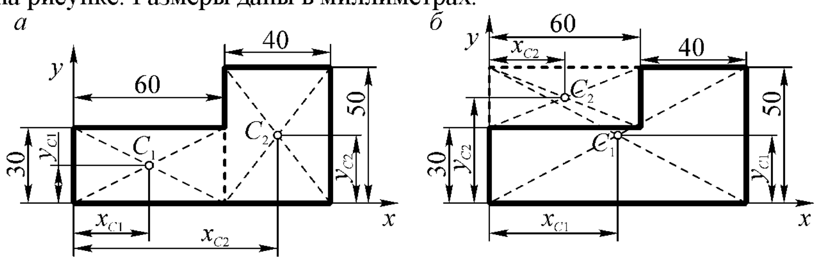
1. Вычертить поперечное сечение в произвольном масштабе, показать все размеры.

2. Указать координатные оси. Их начало удобно привязать к левому нижнему углу пластины (тогда все отсчёты координат будут положительны) или совместить одну из координатных осей с осью симметрии.

3. Разбить сечение на составные части, представляющие собой простые геометрические фигуры. Для каждой части вычислить площадь S_k, установить положение их ЦТ и их координаты x_k и y_k.

4. В соответствии с выражениями $x_C = \dfrac{\sum x_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k}$; $y_C = \dfrac{\sum y_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k}$ вычислить координаты центра ЦТ и отметить его положение.

Пример решения задачи С6. Определить ЦТ плоской фигуры, изображенной на рисунке. Размеры даны в миллиметрах.



Решение. Решим задачу двумя способами.

1-й способ. Воспользуемся методом разбиения на части. Разобьем фигуру на два прямоугольника, местоположения ЦТ которых известны и находятся в точках C_1 и C_2 (см. рис. *а*). Определим координаты ЦТ каждой части:

$x_{C1} = 30$ мм; $y_{C1} = 15$ мм;

$x_{C2} = 80$ мм; $y_{C2} = 25$ мм.

Определим площади частей:

$S_{C1} = 30 \cdot 60 = 1800$ мм^2;

$S_{C2} = 40 \cdot 50 = 2000$ мм^2.

Тогда координаты ЦТ фигуры будут:

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k} = \frac{30 \cdot 1800 + 80 \cdot 2000}{1800 + 2000} = 56{,}3 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{\sum y_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k} = \frac{15 \cdot 1800 + 25 \cdot 2000}{1800 + 2000} = 20{,}3 \text{ мм}.$$

2-й способ. Воспользуемся методом отрицательных площадей. Разобьем фигуру на два прямоугольника с ЦТ в точках C_1 и C_2 (см. рис. *б*). Определим координаты ЦТ частей:

$x_{C1} = 50$ мм; $y_{C1} = 25$ мм;

$x_{C2} = 30$ мм; $y_{C2} = 40$ мм.

Определим площади частей:

$S_{C1} = 100 \cdot 50 = 5000$ мм^2;

$S_{C2} = 20 \cdot 60 = 1200$ мм^2.

Тогда координаты ЦТ фигуры будут:

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k} = \frac{50 \cdot 5000 + 30 \cdot (-1200)}{5000 + (-1200)} = 56{,}3 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{\sum x_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k} = \frac{25 \cdot 5000 + 40 \cdot (-1200)}{5000 + (-1200)} = 20{,}3 \text{ мм}.$$

Прим. В двух последних формулах площадь S_{C2} взята со знаком минус потому, что эта площадь «вырезана» (или «отнята») из площади S_{C1}.

Ответ: $x_C = 56{,}3$ мм; $y_C = 20{,}3$ мм.

1.3 Задания для самостоятельной работы

1.3.1 Задача С1

Недеформируемая горизонтальная двухопорная балка длиной ℓ нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q, сосредоточенной силой F и моментом M (см. рис. С1.0…С1.9), точки прикладывания которых, а также длина действия нагрузки q, определяются соответствующими размерами a, b и c. Числовые значения всех величин указаны в табл. С1.

Определить реакции связей, вызванные заданными нагрузками.

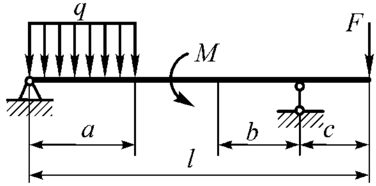


Рис. С1.0

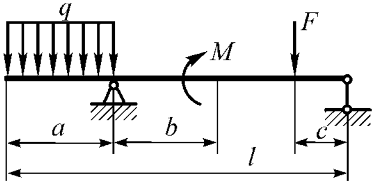


Рис. С1.1

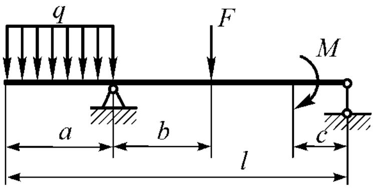


Рис. С1.2

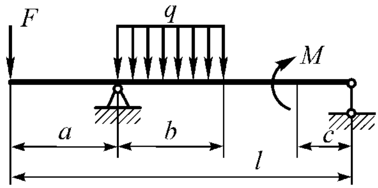


Рис. С1.3

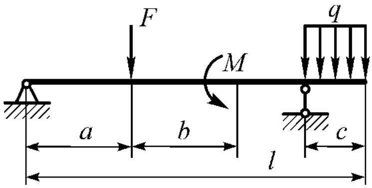


Рис. С1.4

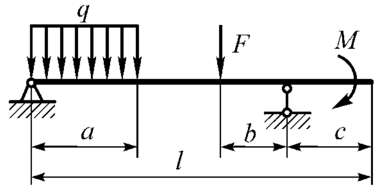


Рис. С1.5

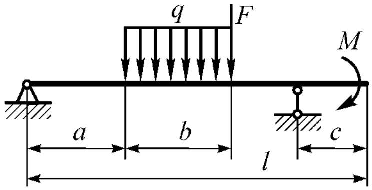


Рис. С1.6

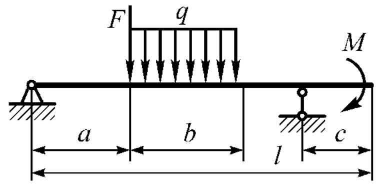


Рис. С1.7

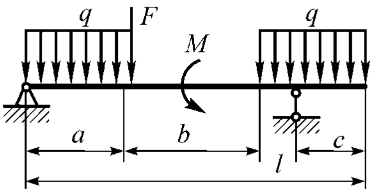


Рис. С1.8

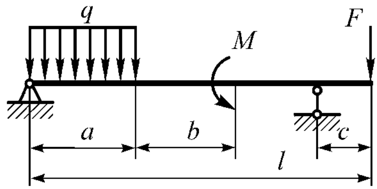


Рис. С1.9

Таблица С1. Числовые данные к задаче С1

Номер условия	Заданные величины						
	a, м	*b*, м	*c*, м	*ℓ*, м	*M*, кН·м	*F*, кН	*q*, кН/м
0	2,0	3,2	1,8	10	7	28	22
1	2,2	3,4	1,9	10,5	9	26	21
2	2,4	3,6	2,0	11	11	24	20
3	2,6	3,8	2,1	11,5	13	22	19
4	2,8	4,0	2,2	12	15	20	18
5	3,0	4,2	2,3	12,5	17	18	17
6	3,2	4,4	2,4	13	19	16	16

7	3,4	4,6	2,5	13,5	21	14	15
8	3,6	4,8	2,6	14	23	12	14
9	3,8	5,0	2,7	14,5	25	10	13

1.3.2 Задача С2

Недеформируемая горизонтальная двухопорная балка (см. рис. С2.0…С2.9) с расстоянием между опорами ℓ нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q, которая действует на длине a, сосредоточенной силой F (угол ее действия α задан относительно горизонтали) и парой сил с моментом M. Численные значения всех величин указаны в табл. С2.

Определить реакции связей, вызванные заданными нагрузками.

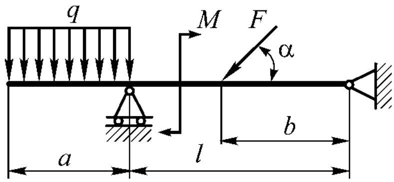


Рис. С2.0

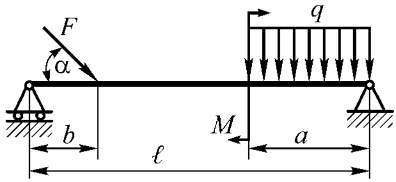


Рис. С2.1

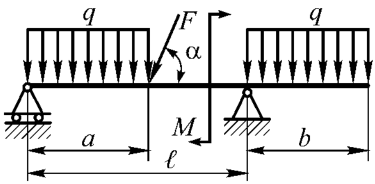


Рис. С2.2

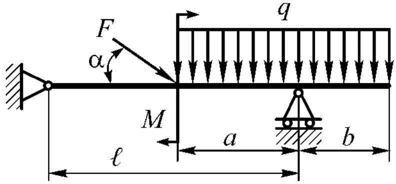


Рис. С2.3

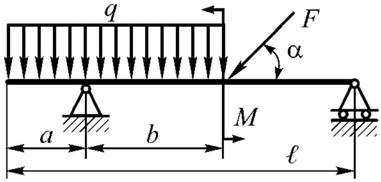


Рис. С2.4

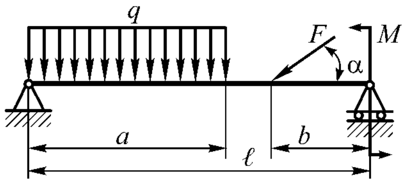


Рис. С2.5

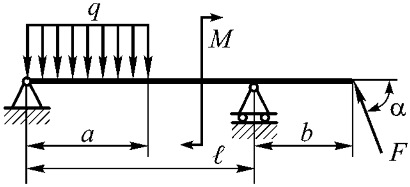


Рис. С2.6

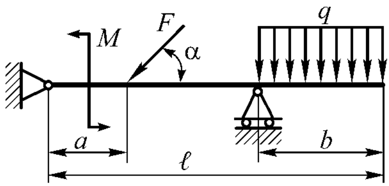


Рис. С2.7

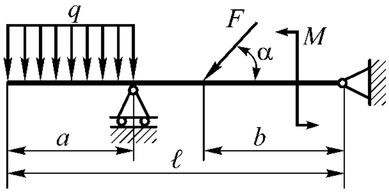


Рис. С2.8

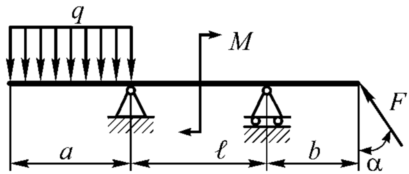


Рис. С2.9

Таблица С2. Численные данные к задаче С2

Номер условия	Заданные величины						
	F, кН	q, кН/м	M, Н·м	ℓ, м	a, м	b, м	α
0	20	8	8000	8	4	3	30°
1	12	7,5	7500	8	4	3	45°
2	14	7	7000	7	4	3	60°
3	16	6,5	6500	7	3	2	30°
4	18	6	6000	6	3	2	45°
5	20	5,5	5500	6	3	2	60°
6	22	5	5000	5	2	1	30°
7	24	4,5	4500	5	2	1	45°
8	26	4	4000	4	2	1	60°
9	28	3,5	3500	4	2	1	30°

1.3.3 Задача С3

Недеформируемая рама закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню BB_1 (стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами), или к шарнирной опоре на катках.

На раму действуют пара сил с моментом $M = 100$ Н·м и две силы, значение которых, направления и точки приложения указаны в табл. С3 (например, в условии № 1 на раму действуют сила $F_1 = 10$ Н, приложенная в точке C под углом 30° к горизонтальной оси, и сила $F_4 = 40$ Н, приложенная в точке H под углом 60° к горизонтальной оси). Принять $a = 0{,}5$ м.

Определить реакции связей, вызванные заданными нагрузками.

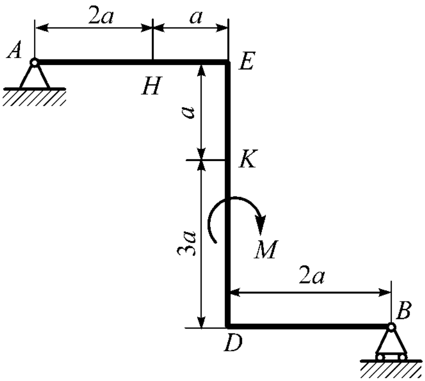


Рис. С3.0

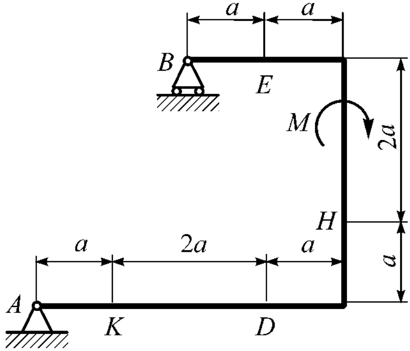


Рис. С3.1

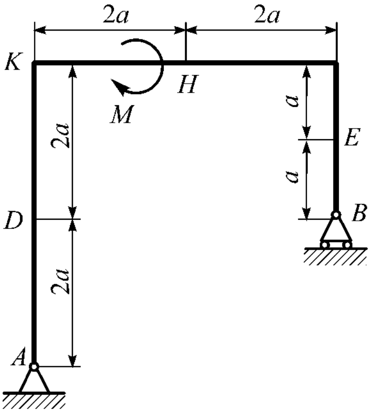


Рис. С3.2

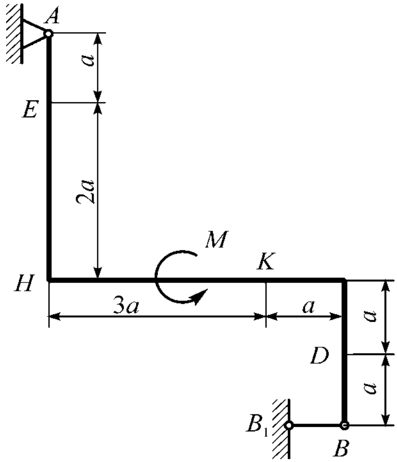


Рис. С3.3

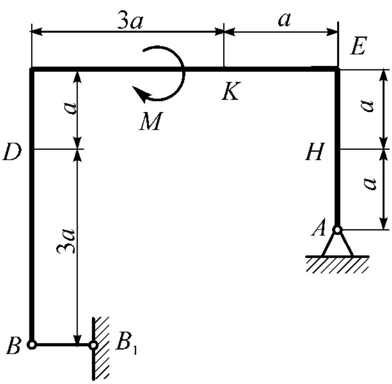


Рис. С3.4

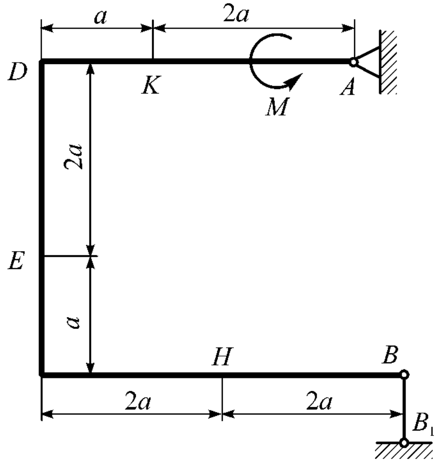


Рис. С3.5

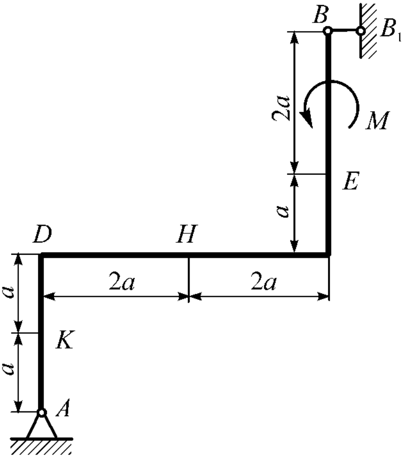


Рис. С3.6

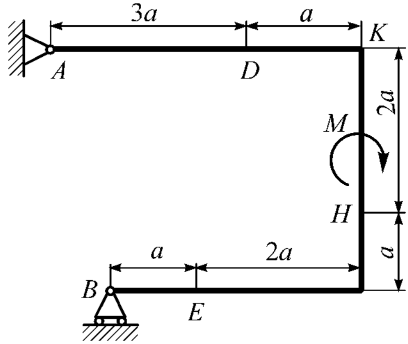


Рис. С3.7

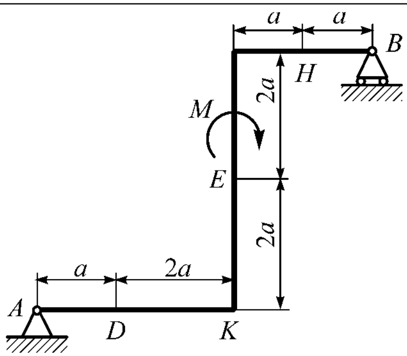


Рис. С3.8

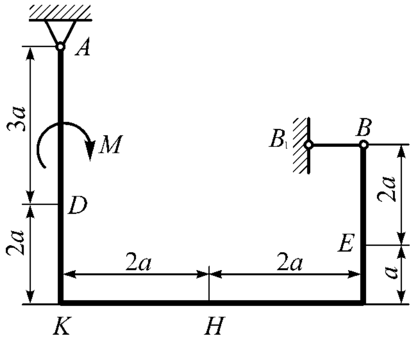
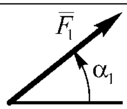
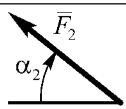
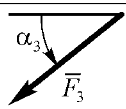
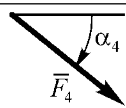


Рис. С3.9

Таблица С3. Численные данные к задче С3

Номер условия	Точка и схема приложения силы, ее величина			
	 F_1 = 10 Н	 F_2 = 20 Н	 F_3 = 30 Н	 F_4 = 40 Н
0	–	D, $\alpha_2 = 60°$	E, $\alpha_3 = 45°$	–
1	K, $\alpha_1 = 30°$	–	–	H, $\alpha_4 = 60°$
2	–	H, $\alpha_2 = 45°$	K, $\alpha_3 = 30°$	–
3	D, $\alpha_1 = 60°$	–	–	E, $\alpha_4 = 30°$
4	–	K, $\alpha_2 = 30°$	E, $\alpha_3 = 60°$	–
5	H, $\alpha_1 = 60°$	–	D, $\alpha_3 = 30°$	–

6	–	E, $\alpha_2 = 30°$	–	K, $\alpha_4 = 45°$
7	D, $\alpha_1 = 45°$	–	H, $\alpha_3 = 60°$	–
8	–	H, $\alpha_2 = 60°$	–	D, $\alpha_4 = 30°$
9	E, $\alpha_1 = 30°$	–	–	K, $\alpha_4 = 60°$

1.3.4 Задача С4

Конструкция состоит из жестких угольника и стержня, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. С4.0…С4.5), или свободно опираются один на один (рис. С4.6…С4.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются: в точке A – шарнир или жесткая заделка; в точке B – невесомый стержень BB_1 (рис. С4.0, С4.1), гладкая поверхность (рис. С4.2, С4.3) или шарнир (рис. С4.4…С4.9); в точке D – невесомый стержень DD_1 (рис. С4.1, С4.2, С4.7) или шарнирная подвижная опора (рис. С4.9).

На каждую конструкцию действуют: пары сил с моментом $M = 60$ Н·м и две силы (величины сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С4, например, в условии № 1 на конструкцию действуют сила F_2 под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L, сила F_4 под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E).

Принять $a = 0{,}2$ м.

Определить реакции связей, вызванных заданными нагрузками: для черт. С4.3…С4.6, С4.8 – в точках A, B, C; для черт. С4.1, С4.2, С4.7, С4.9 – в точках A, B, C, D.

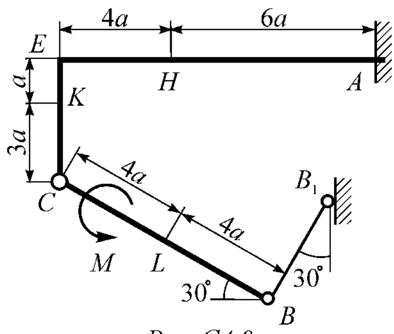


Рис. С4.0

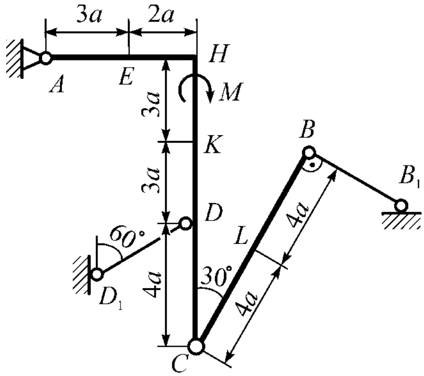


Рис. С4.1

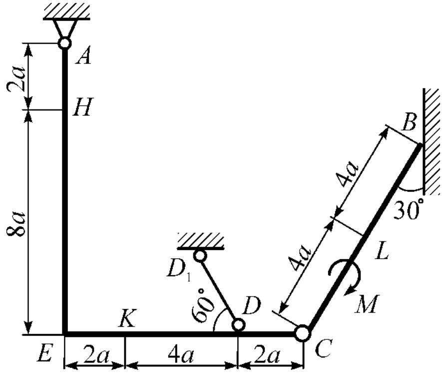


Рис. С4.2

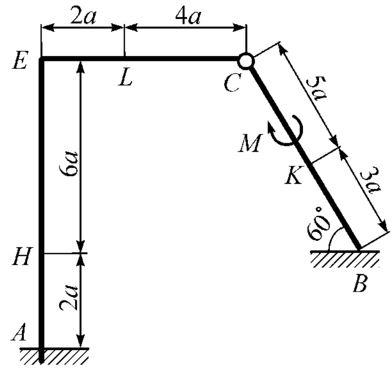


Рис. С4.3

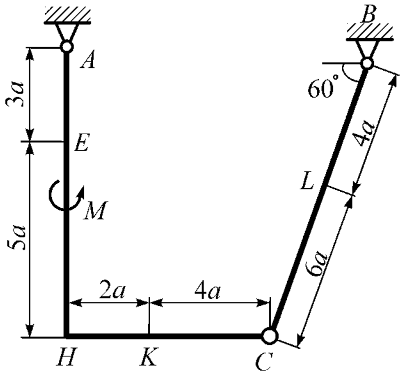


Рис. С4.4

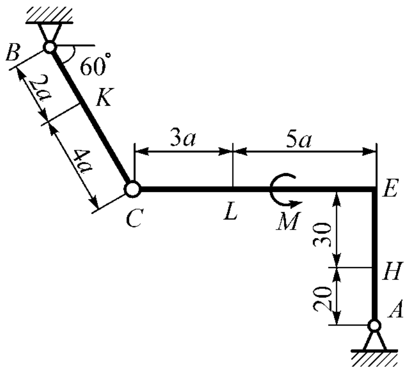


Рис. С4.5

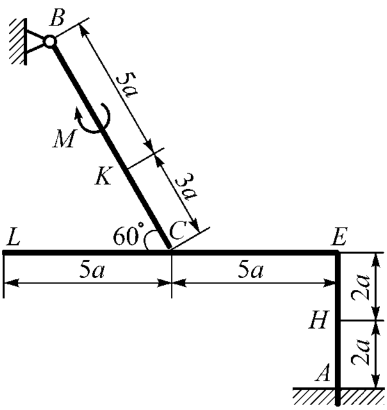


Рис. С4.6

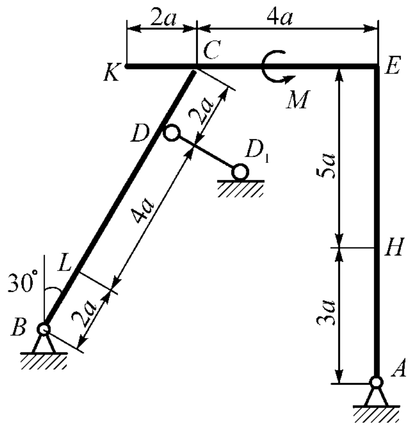


Рис. С4.7

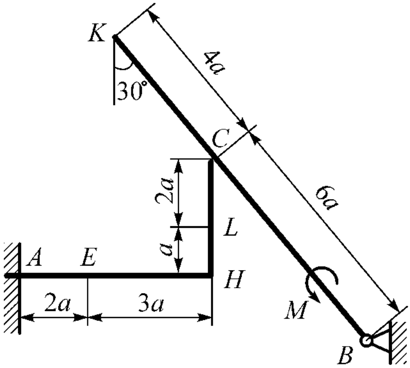


Рис. С4.8

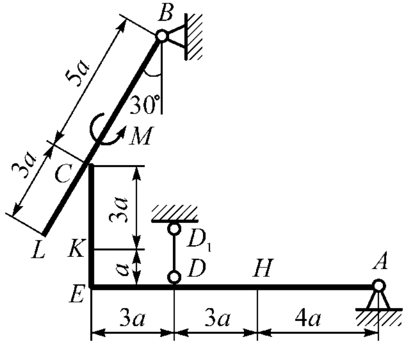
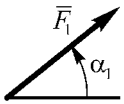
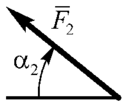
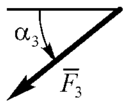
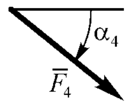


Рис. С4.9

Таблица С4. Численные данные к задача С4

Номер условия	Точка и схема приложения силы, ее величина			
	 F_1 = 10 Н	 F_2 = 20 Н	 F_3 = 30 Н	 F_4 = 40 Н
0	K; $\alpha_1 = 60°$		H; $\alpha_3 = 30°$	–
1	–	L; $\alpha_2 = 60°$	–	E; $\alpha_4 = 30°$
2	L; $\alpha_1 = 15°$	–	K; $\alpha_3 = 60°$	–
3	–	K; $\alpha_2 = 30°$	–	H; $\alpha_4 = 60°$
4	L; $\alpha_1 = 30°$	–	E; $\alpha_3 = 60°$	–
5	–	L; $\alpha_2 = 75°$		K; $\alpha_4 = 30°$
6	E; $\alpha_1 = 60°$	–	K; $\alpha_3 = 75°$	–
7	–	H; $\alpha_2 = 60°$	L; $\alpha_3 = 30°$	–
8	–	K; $\alpha_2 = 30°$	–	E; $\alpha_4 = 15°$
9	H; $\alpha_1 = 30°$	–	–	L; $\alpha_4 = 60°$

1.3.5 Задача С5

Однородная прямоугольная плита весом P = 5 кН со сторонами AB = 3 м, BC = 2 м, закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B – цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC_1 (рис. С5.0…С5.9; вектор $\vec{P}$ на рисунках не показан).

На плиту действуют пара сил с моментом M = 6 кН·м, которая лежит в плоскости плиты, и две локальные силы. Значение этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С5.

Определить реакции связей в точках A, B и C.

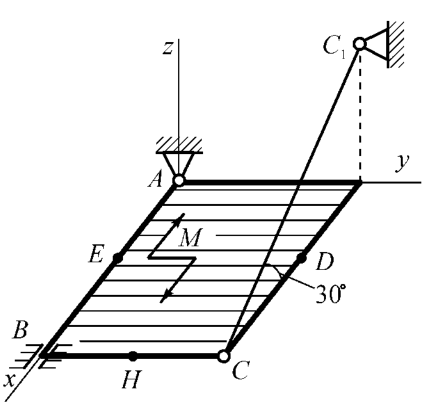


Рис. С5.0

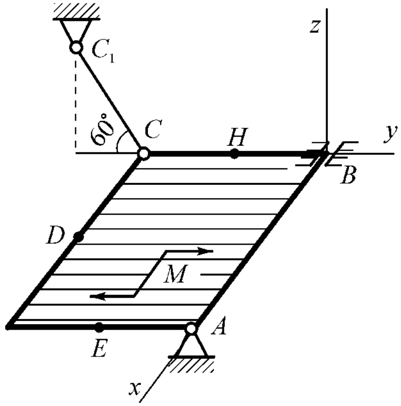


Рис. С5.1

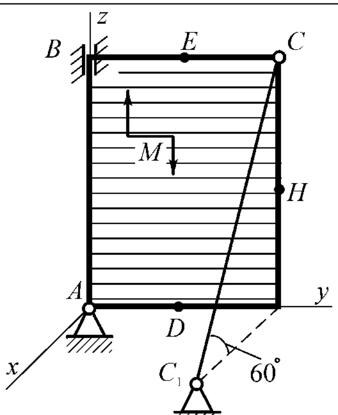


Рис. С5.2

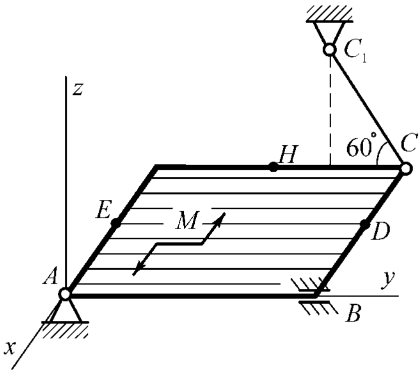


Рис. С5.3

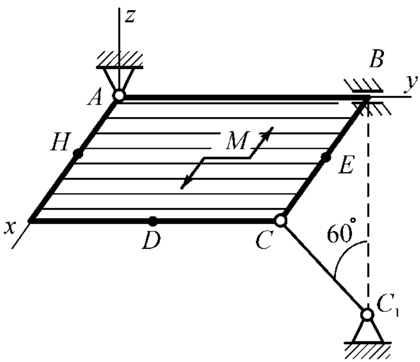


Рис. С5.4

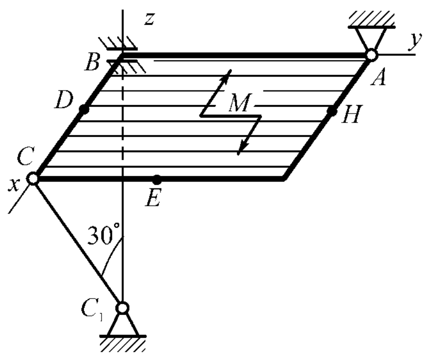


Рис. С5.5

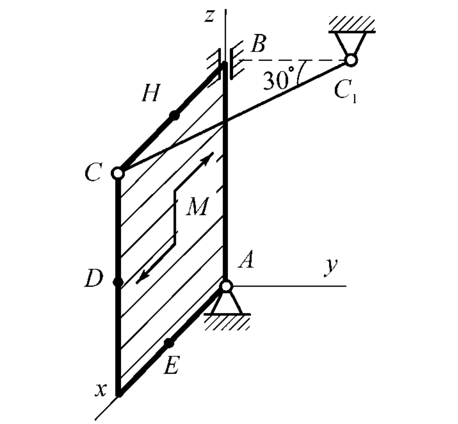


Рис. С5.6

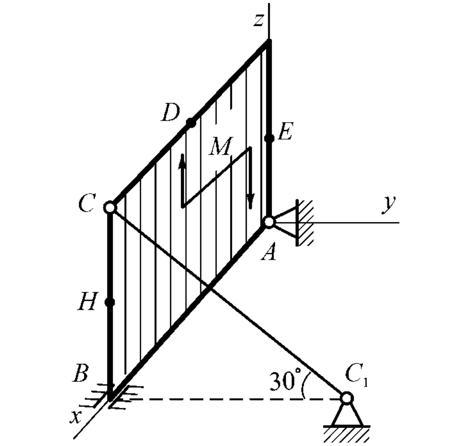


Рис. С5.7

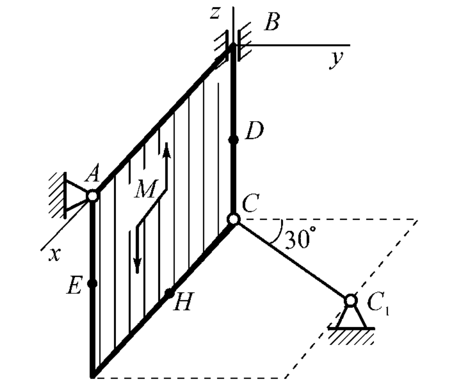


Рис. С5.8

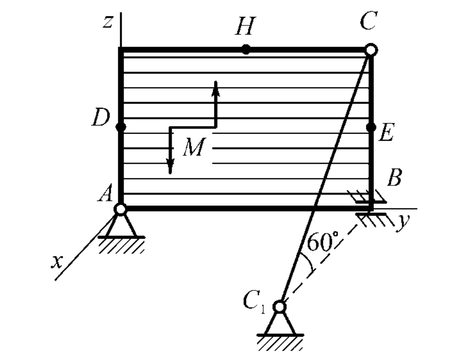
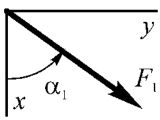
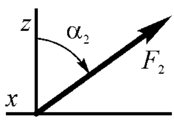
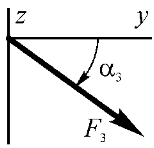
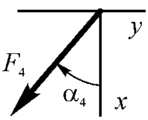


Рис. С5.9

Таблица С5. Численные данные к задаче С5

Номер условия	Точка и схема приложения силы, ее величина			
	 F_1 = 4 кН	 F_2 = 6 кН	 F_3 = 8 кН	 F_4 = 10 кН
0	D; $\alpha_1 = 60°$	–	E; $\alpha_3 = 0°$	–
1	H; $\alpha_1 = 90°$	D; $\alpha_2 = 30°$	–	–
2	–	E; $\alpha_2 = 60°$	–	D; $\alpha_4 = 60°$
3	–	–	E; $\alpha_3 = 30°$	H; $\alpha_4 = 0°$

4	E; $\alpha_1 = 0°$	–	H; $\alpha_3 = 60°$	–
5	–	D; $\alpha_2 = 60°$	H; $\alpha_3 = 0°$	–
6	–	H; $\alpha_2 = 30°$	–	D; $\alpha_4 = 90°$
7	E; $\alpha_1 = 30°$	H; $\alpha_2 = 90°$	–	–
8	–	–	D; $\alpha_3 = 0°$	E; $\alpha_4 = 60°$
9	–	E; $\alpha_2 = 90°$	D; $\alpha_3 = 30°$	–

Прим. Силы F_1 и F_4 лежат в плоскости, которая параллельна плоскости xy, сила F_2 – в плоскости, которая параллельная плоскости xz, сила F_3 – в плоскости, которая параллельная плоскости yz.

Прим. Точки приложения сил D, E и H находятся в серединах соответствующих сторон плиты.

1.3.6 Задача С6

Для заданной тонкой плоской однородной пластины определить положение ЦТ. Размеры пластины указаны в табл. С6.

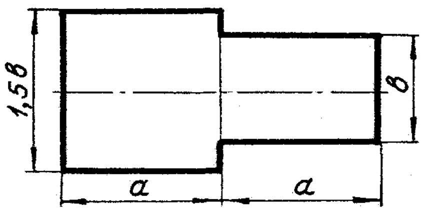


Рис. С6.0

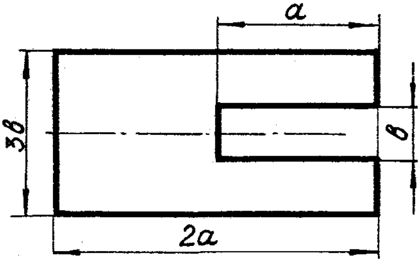


Рис. С6.1

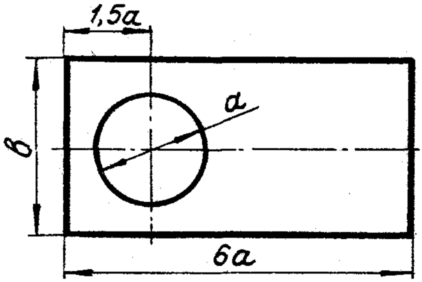


Рис. С6.2

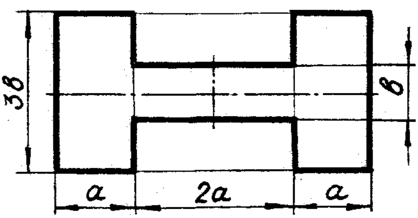


Рис. С6.3

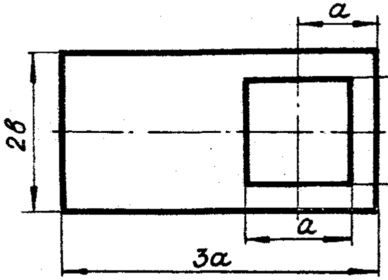


Рис. С6.4

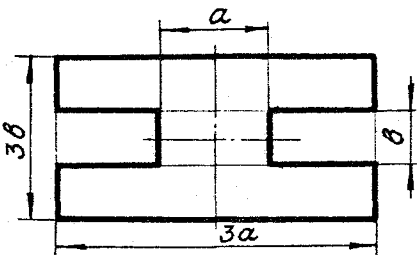


Рис. С6.5

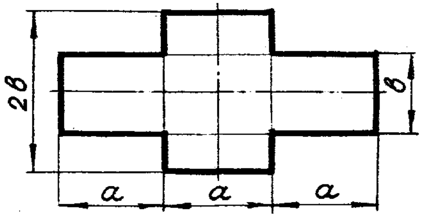


Рис. С6.6

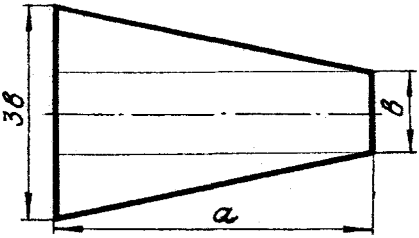


Рис. С6.7

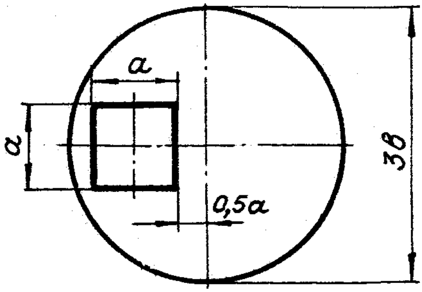


Рис. С6.8

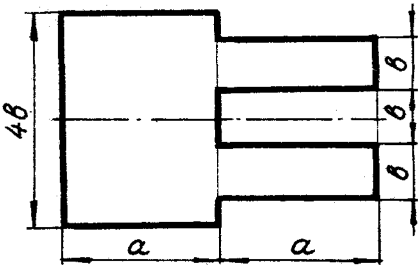


Рис. С6.9

Таблица С6. Численные значения к задаче С6

Параметры	№ варианта численных значений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a, м	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,04	0,06	0,08	0,12	0,16
b, м	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16

1.4 Критерии оценки работы студента на практическом занятии

Критерии работы студента на практическом занятии приведены в прил. А.

1.5 Рекомендованная литература

Для успешного освоения темы практического занятия необходимо проработать соответствующие разделы литературы [1]…[6].

Практическое занятие 2
Решение задач кинематики

Цель и задачи занятия: освоить решение задач кинематики при поступательном, вращательном и сложном движении.

Постановка задачи: освоить решение задач кинематики при поступательном, вращательном и сложном движении, для чего необходимо уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии, а также изучить материал, изложенный в [1], с. 59…92.

2.1 Основные понятия и зависимости кинематики

Способы задания движения: естественный − $s=f(\mathrm{t})$ (для прямолинейного движения − $x=f(t)$); координатный способ − в естественном трёхграннике $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$; векторный − с помощью радиус-вектора $\vec{r}=\vec{r}(t)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$, модуль радиус-вектора $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, направляющие косинусы радиус-вектора $\cos(x,\vec{r})=\dfrac{x}{r}$, $\cos(y,\vec{r})=\dfrac{y}{r}$, $\cos(z,\vec{r})=\dfrac{z}{r}$. Переход от координатного способа к естественному: $s=\int\limits_0^t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$.

Скорость и ускорение точки. При естественном способе задания движения: скорость $v=\dfrac{ds}{dt}=\dot{s}$, $\vec{v}=\dfrac{ds}{dt}\cdot\vec{\tau}$ (здесь $\vec{\tau}$ – орт касательной) и модуль ускорения нормального $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}=\omega^2 r=\omega v$ (здесь ρ – радиус кривизны траектории) и касательного $a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=\dot{v}=\dfrac{d^2s}{dt^2}=\ddot{s}$. При векторном способе задания движения: вектор скорости $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}=\dfrac{dx}{dt}\cdot\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\cdot\vec{j}+\dfrac{dz}{dt}\cdot\vec{k}$ и ускорения $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}$. При координатном способе задания движения: проекции вектора скорости $v_X=\dfrac{dx}{dt}=\dot{x}$, $v_Y=\dfrac{dy}{dt}=\dot{y}$, $v_Z=\dfrac{dz}{dt}=\dot{z}$ и ускорения $a_X=\dfrac{dv_X}{dt}=\dot{v}_X=\ddot{x}$, $a_Y=\dfrac{dv_Y}{dt}=\dot{v}_Y=\ddot{x}$, $a_Z=\dfrac{dv_Z}{dt}=\dot{v}_Z=\ddot{x}$; модуль скорости $v=\sqrt{v_X^2+v_Y^2+v_Z^2}$ и ускорения $a=\sqrt{a_X^2+a_Y^2+a_Z^2}$; − направляющие косинусы вектора скорости $\cos(x,\vec{v})=\dfrac{v_X}{v}$, $\cos(y,\vec{v})=\dfrac{v_Y}{v}$, $\cos(z,\vec{v})=\dfrac{v_Z}{v}$ и ускорения

$\cos(x,\vec{a}) = \dfrac{a_X}{a}$, $\cos(y,\vec{a}) = \dfrac{a_Y}{a}$, $\cos(z,\vec{a}) = \dfrac{a_Z}{a}$.

Частные случаи движения: при прямолинейном $\rho=\infty$, $a_n=0$, $a=a_\tau$; при равномерном криволинейном v=const, $a_\tau=0$, $a=a_n$. $s=s_0+vt$; при равномерном прямолинейном $a=a_\tau=a_n=0$; при равнопеременном криволинейном a_τ=const, $v=v_0+a_\tau t$, $s = s_0 + v_0 t + \dfrac{a_\tau t^2}{2}$.

Вращательное движение. Уравнения вращательного движения: $\varphi=f(t)$. Угловые скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ и ускорение $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$. Линейная скорость точек вращающегося тела $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ или $v = \omega r$ и ускорение вращательное $\vec{a}^{BP} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ или $a^{BP} = \varepsilon r$, центростремительное $\vec{a}^{Ц} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ или $a^{Ц}=\omega^2 r=\omega v$, полное $a = \sqrt{(a^{Ц})^2 + (a^{BP})^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Угол между полным и центростремительным ускорениями $\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{a^{BP}}{a^{Ц}} = \mathrm{arctg}\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Частные случаи движения: при равномерном вращении ω=const, $\varphi=\omega t$, $\omega=\varphi/t$; при равнопеременном вращении $\omega=\omega_0+\varepsilon t$, $\varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

Плоское движение твердого тела. Уравнения плоского движения: $x_A=f_1(t)$, $y_A=f_2(t)$, $\varphi=f_3(t)$. Скорость $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ или $v_{BA}=\omega \cdot BA$, $v_A\cos\alpha=v_B\cos\beta$.

Мгновенный центр скоростей (точка P). Скорости $\vec{v}_B = \vec{\omega}\,|PB|$, $\omega = \dfrac{v_B}{|PB|}$ и их соотношения $\dfrac{v_A}{|PA|} = \dfrac{v_B}{|PB|}$. Ускорения $\vec{a}_B = \dfrac{d\vec{v}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{v}_A}{dt} + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{Ц} + \vec{a}_{BA}^{BP}$, $a_{BA}^{Ц} = \omega^2\,|BA|$, $a_{BA}^{BP} = \varepsilon\,|BA|$, $a_{BA} = |AB|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ ($tg\alpha = \dfrac{a_{BA}^{BP}}{a_{BA}^{Ц}} = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$).

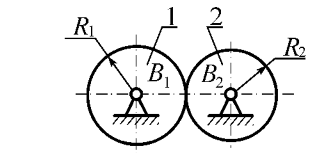
Сложное движение точки.

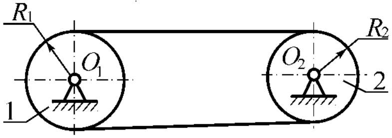
Теорема о сложении скоростей: $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_O + \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{v}_r$, $v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(\vec{v}_e, \vec{v}_r)}$, $\vec{\rho} = \vec{\rho}_O + \vec{r}$.

Теорема о сложении ускорений:

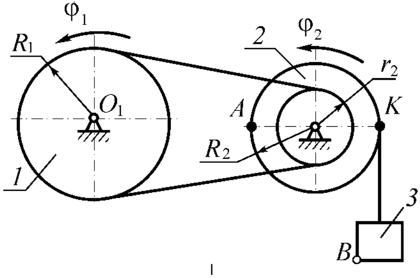
$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}) + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$, $\vec{a}_e^{BP} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}$; $\vec{a}_e^{OC} = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r})$,

$\vec{a}_e = \vec{a}_O + \vec{a}_e^{BP} + \vec{a}_e^{OC}$, $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$, $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times v_r$; $a_c = 2\cdot|\omega_e \cdot v_r|\cdot\sin(\omega_e \widehat{\ } v_r)$.





При передаче вращения посредством соприкосновения или с помощью ремня (цепи, нити) углы поворота шкивов, их угловые скорости и ускорения обратно пропорциональны их радиусам. Линейные скорости шкивов в точке касания одинаковы. Линейные скорости любой точки ремня также одинаковы.



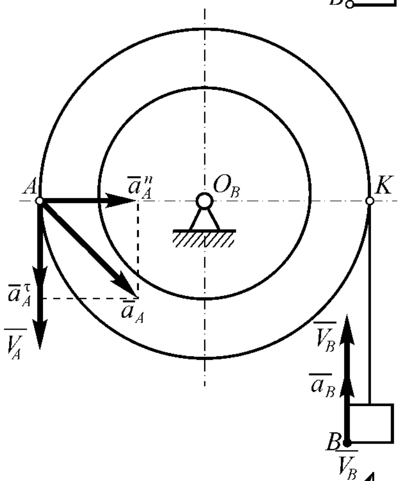
Окружные скорости и ускорения точек A, K (лежащих на ободе колеса 2) и B (или груза 3) одинаковы.

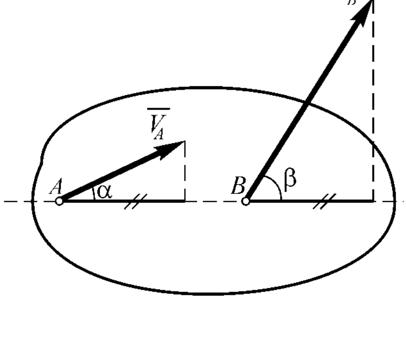
$$v_A = v_K = v_B = \omega_2 R_2;$$

$$a_A^\tau = a_K^\tau = a_B = \varepsilon_2 R_2;$$

$$a_A^n = a_K^n = \omega_2^2 R_2 = v_A R_2;$$

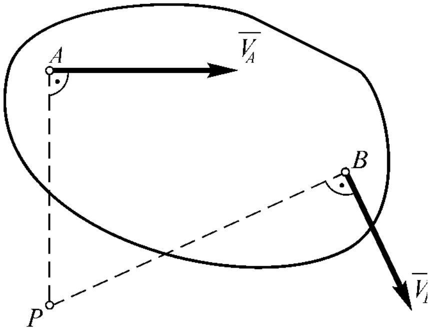
$$a_A = a_K = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2}.$$





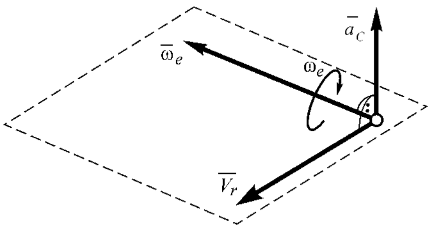
Проекции векторов скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой, т.е.

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$$



Мгновенный центр скоростей (МЦС) плоской фигуры находится на перпендикуляре, восстановленном к вектору скорости полюса.

Следовательно, для определения положения МЦС необходимо знать направления векторов скоростей каких-либо двух точек плоской фигуры. Тогда МЦС будет находиться в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из рассматриваемых точек к векторам их скоростей.



$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \vec{v}_r \cos(\vec{\omega}_e; \vec{v}_r);$$

$$a_C = 2|\omega_e||v_r|\cos(\vec{\omega}_e; \vec{v}_r)$$

Вектор ускорения Кориолиса $\vec{a}_C$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы переносного вращения $\vec{\omega}_e$ и относительной скорости $\vec{v}_r$, и направлен в ту сторону, откуда наикратчайшее совмещение $\vec{\omega}_e$ с $\vec{v}_r$ способом поворачивания происходит против хода часовой стрелки.

По правилу Жуковского направление вектора ускорения Кориолиса $\vec{a}_C$ можно определить, если спроецировать вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ точки на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, а затем повернуть его в этой плоскости на угол 90° в сторону переносного вращения.

2.2 Примеры решения типичных задач кинематики

2.2.1 Задача К1

Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В этой задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t = t_1$.

Алгоритм решения задачи К1.

1. Установить уравнение траектории точки, для чего из уравнений движения необходимо исключить параметр t (т.е. получить уравнение вида $y = f_2(x)$ или $x = f_1(y)$). В соответствии с полученным уравнением траектории необходимо, выбрав удобный масштаб, в декартовых координатах вычертить линию − траекторию движения точки. Затем, подставив в уравнения $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$ значение $t = t_1$, определить положение точки в заданный момент времени, показав её на траектории.

2. Определить скорость и ускорение точки в заданный момент времени по проекциям на координатные оси как производные уравнений $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$ соответственно первого и второго порядков по времени. Определить полные

скорость и ускорение точки.

3. Вычертить на схеме движения точки соответствующие векторы скоростей и ускорений.

4. Определить радиус кривизны траектории точки в заданный момент времени.

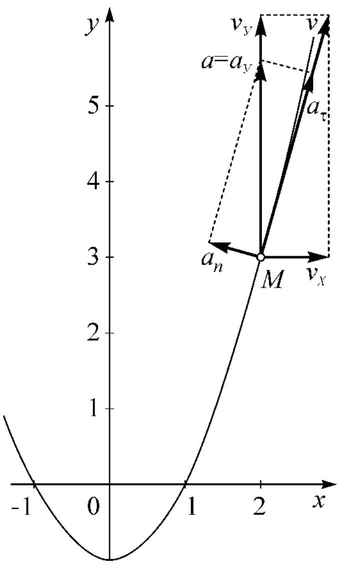


Рис. К1

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	3

Пример решения задачи К1. Даны уравнения движения точки в плоскости xy: $x = 4t$; $y = 16t^2 - 1$ (здесь x и y выражены в метрах, t − в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 0{,}5$ с определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорения, радиус кривизны.

Решение. Для определения уравнения траектории точки в обычной координатной форме из заданных параметрических уравнений движения исключим время t. Для этого из уравнения $x = f_1(t)$ выразим t через x и подставим полученный результат в уравнение $y = f_2(t)$:

$x = 4t \quad \Rightarrow \quad t = x / 4,$

тогда

$$y = 16\,(x / 4)^2 - 1 = x^2 - 1. \qquad (1)$$

Выражение (1) (уравнение траектории движения точки) является уравнением параболы. Построим график в декартовых координатах − траекторию движения точки (см. рис. К1), для чего в равенство (1) подставим числовые значения x и найдём соответствующие значения y.

Прим. В данном случае уравнение (1) представлено в виде функции $y = f(x)$. Иногда удобно уравнение траектории представить в виде $x = f(y)$.

Для определения положения точки в заданный момент времени в уравнения её движения подставим значение $t = t_1 = 0{,}5$ с. Получим:

$x = 4 \cdot 0{,}5 = 2$ м;

$y = 16 \cdot 0{,}5^2 - 1 = 3$ м.

Изображаем точку M с координатами (2; 3) (при этом точка должна находиться на линии, изображающей траекторию).

Определение скорости v, касательного a_τ, нормального a_n и полного a ускорений точки выполним по их проекциям на координатные оси, для чего продифференцируем соответствующие выражения. Для определения числовых значений скорости и ускорений точки M в заданный момент времени в полученные выражения подставим значение $t = t_1 = 0{,}5$ с.

Вначале определим проекции вектора скорости на оси x и y (продифференцировав по времени уравнения движения точки), а затем − полную:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 4 \text{ м/с};$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 32t = 32 \cdot 0{,}5 = 16 \text{ м/с};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = \sqrt{272} = 16{,}49 \text{ м/с}.$$

Выбрав удобный масштаб для изображения векторов скорости точки, построим на схеме $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, а затем и $\vec{v}$ − как геометрическую сумму $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$.

Определим ускорения точки M. Проекции полного ускорения на оси x и y определим, дважды продифференцировав по времени уравнения движения точки:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \dot{v}_y = \frac{dv_y}{dt} = 32 \text{ м/с}^2.$$

Для нахождения касательного ускорения a_τ продифференцируем по времени уравнение, определяющее скорость v движения точки. Известно, что $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ или $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Тогда, дифференцируя по времени последнее равенство, и учитывая, что $2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt}$, получим:

$$a_\tau = |\dot{v}| = \frac{2v_x\dot{v}_x + 2v_y\dot{v}_y}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{4 \cdot 0 + 16 \cdot 32}{16{,}49} = 31{,}05 \text{ м/с}^2.$$

Положительное значение a_τ свидетельствует о том, что направления $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ совпадают, а движение точки − ускоренное.

Нормальное ускорение a_n точки при $t = t_1 = 0{,}5$ с определим в соответствии с выражением

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{32^2 - 31{,}05^2} = 7{,}74 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рисунке все полученные векторы ускорений, для чего, выбрав удобный масштаб, построим $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$ а затем и $\vec{a}$ − как геометрическую сумму $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ или $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$.

Прим. Если вычисления и построения векторов ускорения выполнены верно, то на рисунке должно выполняться равенство $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Радиус кривизны траектории в той точке, где в момент времени $t = t_1 = 0{,}5$ с находится точка M, определим в соответствии с выражением

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{16{,}49^2}{7{,}74} = 35{,}1 \text{ м}.$$

Ответ: $v_x = 4$ м/с, $v_y = 16$ м/с, $v = 16{,}49$ м/с, $a_\tau = 31{,}05$ м/с^2, $a_n = 7{,}74$ м/с^2, $a = 32$ м/с^2, $\rho = 35{,}1$ м.

2.2.2 Задача К2

Задача К2 – на исследование вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи необходимо учесть следующее: если два колеса находятся во взаимном зацеплении, то скорость точки зацепления у каждого из колёс имеют одинаковое значение; если колёса взаимно связаны ременной передачей (ремень по ободу колеса не скользит), то скорости всех точек ремня и всех точек обода колеса, с которым контактирует ремень, имеют одинаковое значение.

Алгоритм решения задачи К2.

1. Начертить схему механизма, соблюдая пропорции между размерами его отдельных элементов. Обозначить на схеме (векторами, дуговыми стрелками) все исходные данные и искомые величины – радиусы, скорости, ускорения и др.

2. Определить угловые и линейные скорости точек всех элементов механизма как функции времени t.

3. Определить угловые и линейные ускорения точек элементов механизма, а затем – заданной точки, как функции времени t.

Прим. Пункты 2 и 3 можно выполнять сначала в символьном виде, а затем определять численные значения соответствующих величин. Решение можно упростить, если определить численные значения параметров движения в соответствии с пунктами 2 и 3 для тела, для которого задан закон движения. Тогда дальнейшие вычисления параметров движения остальных элементов механизма можно производить в численном виде (как это сделано в примере ниже).

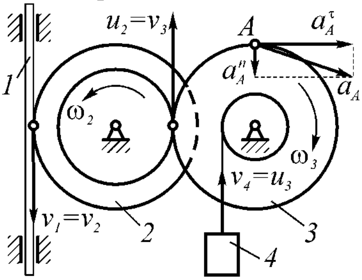


Рис. К2

Пример решения задачи К2. Механизм состоит из двух шкивов, груза и рейки, находящихся во взаимном зацеплении.

Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $S = 81$ см. Закон движения рейки $s_1 = 3t^3$ (здесь s – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить: ω_3, v_4, ε_3, a_A, a_4 в момент времени, когда путь, пройденный рейкой *1*, равен S.

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колёс радиуса R через v, на внутренних радиуса r – через u.

Определим момент времени t_1, в который рейка *1* пройдёт путь S:

$$S = s_{1(t=t_1)} - s_{1(t=0)} = 3t_1^3 - 3\cdot 0 = 81 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3\text{ с}.$$

Определим скорости элементов механизма как функцию времени t.

Скорость рейки *1* в заданный момент времени найдём, продифференцировав уравнение закона её движения и подставив значение $t = t_1 = 3$ с:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2 = 9\cdot 3^2 = 81 \text{ см/с}.$$

Дальнейшие вычисления скоростей движения элементов механизма выполним в численном виде для момента времени $t = t_1 = 3$ с.

Так как рейка *1* и колесо *2* находятся в зацеплении, то $v_2 = v_1$ (см. рис. К2). Известно, что $v = \omega R$ или, для нашего случая, $v_2 = \omega_2 R_2$, откуда

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v_1}{R_2} = \frac{81}{6} = 13{,}5 \ \text{с}^{-1}.$$

Линейную скорость u_2 малого обода колеса *2* определим по формуле

$$u_2 = \omega_2 r_2 = 13{,}5 \cdot 4 = 54 \ \text{см/с}.$$

Так как колеса *2* и *3* взаимно сцеплены ободами, то $u_2 = v_3$. Известно, что $v_3 = \omega_3 R_3$, откуда

$$\omega_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_2}{R_3} = \frac{54}{8} = 6{,}75 \ \text{с}^{-1}.$$

Прим. Иначе значение ω_3 можно определить из соотношения, связывающего радиусы колёс, находящихся в зацеплении:

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{r_2}, \text{ откуда } \omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{R_3} = 13{,}5 \cdot \frac{4}{8} = 6{,}75 \, \text{с}^{-1}.$$

Определим скорость v_4 груза:

$$v_4 = \omega_3 r_3 = 6{,}75 \cdot 3 = 20{,}25 \ \text{см/с}.$$

Определим ускорения элементов механизма как функцию времени t.

Ускорение рейки *1* в заданный момент времени $t = t_1 = 3$ с найдём, дважды продифференцировав уравнение закона её движения:

$$a_1 = \ddot{s}_1 = \dot{v}_1 = 18t = 18 \cdot 3 = 54 \ \text{см/с}^2.$$

Дальнейшие вычисления ускорений элементов механизма выполним в численном виде для момента времени $t = t_1 = 3$ с.

Ускорения точек остальных элементов механизма определяются по зависимостям, аналогичным для определения скоростей:

– угловое ускорение ε_2 колеса *2*

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} = \frac{54}{6} = 9 \ \text{с}^{-2};$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{r_2}{R_3} = 9 \cdot \frac{4}{8} = 4{,}5 \ \text{с}^{-2};$$

$$a_4 = \varepsilon_3 r_3 = 4{,}5 \cdot 3 = 13{,}5 \ \text{см/с}^2.$$

Определим полное ускорение a_A точки A. Точка испытывает нормальное a_A^n и касательное a_A^τ ускорения, тогда $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$. Модули ускорений определяются по формулам

$$a_A^n = \omega_3^2 R_3 = 6{,}75^2 \cdot 8 = 364{,}5 \ \text{см/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_3 R_3 = 4{,}5 \cdot 8 = 36 \ \text{см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{364{,}5^2 + 36^2} = 366{,}3 \ \text{см/с}^2.$$

Прим. Направления векторов скоростей и ускорений устанавливается в соответствии со знаком их вычисленных значений и анализа схемы механизма.

Ответ: $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$, $v_4 = 20{,}25$ см/с, $\varepsilon_3 = 4{,}5$ с^2, $a_A = 366{,}3$ см/с^2, $a_4 = 13{,}5$ см/с^2.

2.2.3 Задача К3

Задача К3 − на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

Алгоритм решения задачи К3.

1. Начертить схему механизма в удобном масштабе и в заданном положении, которое определяется углами α, β, γ, φ, θ и размерами отдельных элементов механизма. Указать на схеме дуговой стрелкой направления ω_1 и ε_1.

2. Определить скорость точки A, принадлежащей элементам *1* и *2* механизма. При этом в соответствии с условием задачи принять $\varepsilon_1 = 0$.

3. Определить скорость второй точки элемента *2* механизма, используя план скоростей.

4. Найти скорости всех точек механизма, как это сделано для второй точки элемента *2* механизма (см. п. 3).

5. Приняв $\varepsilon_1 = 10$ с$^{-2}$, определить полное ускорение a_A точки как сумму нормального a_{An} и касательного $a_{A\tau}$ ускорений.

Пример решения задачи К3. Механизм (см. рис. К1, *а*) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DE$, $\ell_1 = 0{,}6$ м, $\ell_3 = 1{,}2$ м, $\omega_1 = 5$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 8$ с$^{-2}$.

Определить: v_B, v_E, ω_3 и a_A.

Решение. Строим положение механизма в соответствии с заданными линейными и угловыми размерами (см. рис. К3, *б*).

Прим. Выполняя черновой расчёт, механизм в соответствии с заданными линейными и угловыми размерами удобно построить посредине двойного тетрадного листа, а после выполнения расчёта скопировать его на один лист «чистовика».

Определим скорость v_A. Так как точка A совершает вращательное движение вокруг центра O_1, то её окружная (касательная) скорость равна

$v_A = \omega_1 \, |O_1A| = 5 \cdot 0{,}6 = 3$ м/с.

Определим значение v_E. Для этого установим линию, вдоль которой расположен вектор скорости точки E, из следующих рассуждений: точка E принадлежит стержню O_2E, который вращается вокруг центра O_2; следовательно, $\vec{v}_E$ направлен вдоль касательной к окружности − траектории движения, т.е. будет перпендикулярен O_2E.

Теперь, зная $\vec{v}_A$ и линию, вдоль которой направлен вектор $\vec{v}_E$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела AE на прямую, соединяющую эти точки (прямую AE) и определим численное значение $\vec{v}_E$:

$$v_E \cos 60^\circ = v_A \cos 30^\circ \Rightarrow v_E = \frac{v_A \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{3 \cdot 0{,}866}{0{,}5} = 5{,}2 \text{ м/с.}$$

Изображаем вектор $\vec{v}_E$, учитывая при этом, что направление проекций векторов скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_E$ на линию AE совпадают.

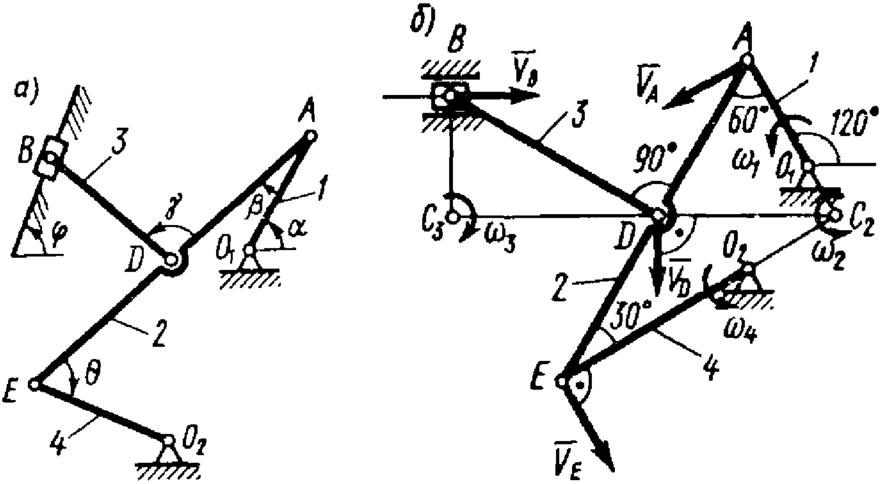


Рис. К3

Определяем значение v_B. Так как точка B принадлежит стержню BD (см. рис. К3), то для нахождения значения v_B вначале необходимо найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AE. Для этого, зная $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_E$, построим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AE (это точка C_2, лежащая на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_E$, восставленных из точек A и E). По направлению вектора $\vec{v}_A$ определяем направление поворота стержня AE вокруг МЦС C_2. Вектор $\vec{v}_D$ будет перпендикулярен отрезку C_2D, соединяющему точки D и C_2, и иметь направление в сторону поворота. Значение v_D найдем, учитывая, что

$$\left.\begin{aligned} v_D &= \omega_2\,|C_2D|; \\ \omega_2 &= \frac{v_A}{|C_2A|}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_D = v_A\frac{|C_2D|}{|C_2A|}.$$

Чтобы вычислить C_2D и C_2A, рассмотрим треугольник AC_2E (см. рис. К3, *б*): он прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°. Тогда $|C_2A| = |AE|\sin 30^\circ = |AE|\cdot 0{,}5 = |AD|$. Тогда треугольник AC_2D является равносторонним, следовательно $|C_2A| = |C_2D|$. В результате получим

$$v_D = v_A = 3 \text{ м/с}.$$

Линия, вдоль которой направлен вектор скорости точки B, совпадает с направляющими, вдоль которых ползун движется поступательно. Тогда, восстанавливая из точек B и D перпендикуляры к линиям, вдоль которых расположены векторы скоростей этих точек, получаем МЦС C_3 стержня BD. По направлению вектора $\vec{v}_D$ определяем направление поворота стержня BD вокруг центра C_3 (по ходу часовой стрелки); вектор $\vec{v}_D$ будет направлен в сторону поворота стержня BD.

Значение скорости v_B определим из соотношения (аналогично нахождению значения v_D) $v_B = v_D \dfrac{|C_3B|}{|C_3D|}$.

Из рис. К1, *б*, видно, что угол $C_3DB = 30^\circ$, а угол $DC_3B = 90^\circ$, тогда $C_3B = \ell_3 \sin 30^\circ$ и $C_3D = \ell_3 \cos 30^\circ$. Подставив полученные значения в пропорцию, получаем

$$v_B = \frac{3 \cdot l_3 \sin 30^\circ}{l_3 \cos 30^\circ} = 1{,}73 \text{ м/с.}$$

Определяем ω_3. Так как МЦС стержня 3 является точка C_3, то

$$\omega_3 = \frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_D}{l_3 \cos 30^\circ} = \frac{3}{1{,}2 \cos 30^\circ} = 2{,}89 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем значение полного ускорения a_A точки A как сумму нормального a_A^n и касательного a_A^τ ускорений:

$a_A^n = \ell_1\omega_1^2 = 0{,}6 \cdot 5^2 = 15$ м/с$^{-2}$;

$a_A^\tau = \varepsilon_1\ell_1 = 8 \cdot 0{,}6 = 4{,}8$ м/с$^{-2}$;

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{15^2 + 4{,}8^2} = 15{,}75 \text{ м/с}^{-2}.$$

Ответ: $v_E = 5{,}2$ м/с, $v_B = 1{,}73$ м/с, $\omega_3 = 2{,}89$ с$^{-1}$, $a_A = 15{,}75$ м/с$^{-2}$.

2.2.4 Задача К4

Задача К4 − на сложное движение точки. При ее решении движение точки по пластине считать относительным, а вращательное движение самой пластины − переносным. При определении абсолютных скорости и ускорения точки необходимо использовать теоремы о сложении скоростей и о сложении ускорений.

Прежде чем производить расчеты, следует изобразить точку M на пластине в том положении, в котором нужно определить ее абсолютную скорость (или ускорение), т.е. в соответствии с исходными данными к задаче (а не в произвольном положении − как показано на рисунках к задаче!).

В случаях, относящихся к рис. К4.6…К4.9, при решении задачи не следует подставлять числовое значение R, пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Алгоритм решения задачи К4.

1. Вычертить схему пластины. Установить положение точки в соответствии с исходными данными к задаче и вычертить её.

2. Установить составляющие сложного движения точки, указать траекторию и характер её относительного и переносного движения. Установить координатные оси.

3. Определить параметры относительного движения точки − её относительные скорость и ускорение. Полученные результаты изобразить на чертеже в виде соответствующих векторов.

Прим. Пункты 1 и 3 желательно решать совместно, т.к. положение точки на чертеже (см. п. 1) может быть установлено после предварительных вычислений, производимых в п. 3.

4. Определить параметры переносного движения точки − её переносные

скорость и ускорение. Полученные результаты изобразить на чертеже в виде соответствующих векторов.

5. Определить кориолисово ускорение. Полученный результат изобразить на чертеже в виде вектора.

6. Определить абсолютные значения скорости и ускорения точки, используя ранее полученные числовые данные и параметры (углы взаимного расположения), установленные с помощью чертежа.

Прим. Определение абсолютных значений скорости и ускорения точки удобно производить с применением теоремы Вариньона, разложив соответствующие векторы на составляющие (спроецировав их на координатные оси), а затем − сложив соответствующие проекции.

Пример решения задачи К4. Диск радиуса R (рис. К4, *а*) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4, *а*, дуговой стрелкой). По краю диска (по дуге ADB) движется точка M по закону $s = AM = f_2(t)$ (положительное направление отсчета расстояния s − от A к D, т.е. на рисунке − "снизу вверх").

Дано: $R = 0{,}5$ м, $\varphi = -2t$, $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$ (φ − в радианах, s − в метрах, t − в секундах).

Определить: значения абсолютных скорости $v_{АБС}$ и ускорения $a_{АБС}$ точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным (AB − относительная траектория точки), а вращение диска вокруг вертикальной оси вместе с точкой M − переносным движением. Тогда $v_{АБС}$ и $a_{АБС}$ точки определяются через относительные и переносные скорости и ускорения точки по формулам

$$\vec{v}_{АБС} = \vec{v}_{ОТН} + \vec{v}_{ПЕР};$$

$$\vec{a}_{АБС} = \vec{a}_{ОТН} + \vec{a}_{ПЕР} + \vec{a}_{КОР},$$

где

$$\vec{a}_{ОТН} = \vec{a}^{\tau}_{ОТН} + \vec{a}^{n}_{ОТН};$$

$$\vec{a}_{ПЕР} = \vec{a}^{\tau}_{ПЕР} + \vec{a}^{n}_{ПЕР}.$$

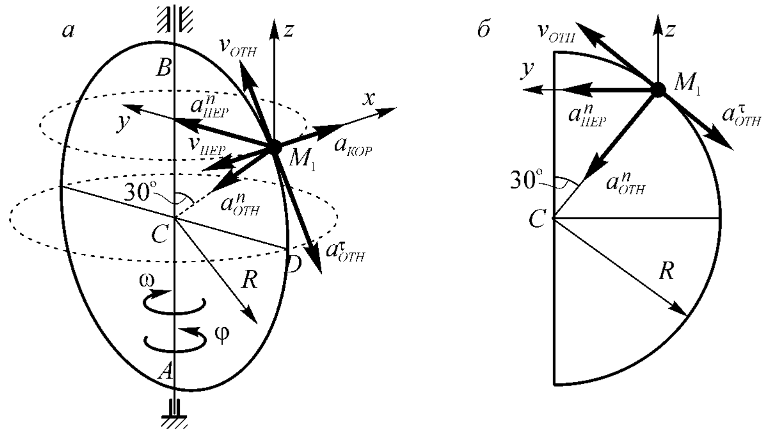


Рис. К4

Определим все характеристики движения точки, для этого рассмотрим её относительное и переносное движения раздельно.

Установим положение точки на диске в заданный момент времени t_1. Движение точки по краю диска происходит по закону $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$ по дуге ADB. Тогда, подставив в последнее уравнение значение $t = t_1 = 1$ с, получим

$$s_{t=t_1} = \frac{\pi R}{6}(7\cdot 1 - 2\cdot 1^2) = \frac{5}{6}\pi R\,.$$

Величина угла $\angle ACM_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ$, откуда $\angle BCM_1 = 30^\circ$. Изображаем точку M в положении, которое определяется этим углом (рис. К4, точка M_1).

1. Относительное движение. Найдём численные значения v_{OTH} и a_{OTH}. Так как точка M движется по окружности радиуса R, то радиус кривизны её относительной траектории $\rho = R$. Тогда для заданного момента времени $t = t_1 = 1$ с получим

$$v_{OTH} = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6}(7 - 4t) = \frac{\pi\cdot 0{,}5}{6}(7 - 4\cdot 1) = \frac{\pi}{4}\,;$$

$$a^{\tau}_{OTH} = \dot{v}_{OTH} = \frac{dv_{OTH}}{dt} = \frac{-2}{3}\pi R = \frac{-2}{3}\pi\cdot 0{,}5 = \frac{-\pi}{3}\,;$$

$$a^{n}_{OTH} = \frac{v^2_{OTH}}{\rho_{OTH}} = \frac{v^2_{OTH}}{R} = \frac{\pi^2}{4^2\cdot 0{,}5} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Знаки показывают, что вектор $\vec{v}_{OTH}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\vec{a}^{\tau}_{OTH}$ − в противоположную сторону; вектор нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{OTH}$ всегда направлен к центру вращения, т.е. к точке C дуги ADB.

Изображаем все установленные векторы (см. рис. К4, *а*). Для наглядности приведен рис. К4, *б*, где дуга ADB находится в плоскости чертежа.

2. Переносное движение. Это движение − вращательное вокруг вертикальной оси AB, происходящее по закону $\varphi = -2t$. Найдем угловую скорость $\omega_{ПЕР}$ и угловое ускорение $\varepsilon_{ПЕР}$ переносного движения:

$\omega_{ПЕР} = \dot{\varphi} = -2$ с$^{-1}$;

$\varepsilon_{ПЕР} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 0$ (т.к. $\varepsilon = 0$, то диск вращается равномерно).

Знак "−" указывает, что направление $\omega_{ПЕР}$ противоположно положительному направлению отсчета угла φ (на рис. К4, *а*, направление вращения $\omega_{ПЕР}$ отмечено соответствующей дуговой стрелкой и вектором).

Для определения $\vec{v}_{ПЕР}$ и $\vec{a}_{ПЕР}$ найдем расстояние h от оси вращения AB до точки M_1: $h = R\sin 30^\circ = 0{,}25$ м. Тогда в момент времени $t = t_1 = 1$ с, получим

$v_{ПЕР} = |\omega_{ПЕР}|h = 2\cdot 0{,}25 = 0{,}5$ м/с;

$a^{\tau}_{ПЕР} = \varepsilon_{ПЕР}h = 0$;

$a^{n}_{ПЕР} = \omega^2_{ПЕР}h = -2^2\cdot 0{,}25 = 1$ м/с^2.

Изображаем на рис. К4, *а*, вектор $\vec{v}_{ПЕР}$ (с учетом направления $\omega_{ПЕР}$) и вектор $a^n_{ПЕР}$ (всегда направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\vec{v}_{ОТН}$ и вектором $\vec{\omega}_{ПЕР}$ равен 120°, то численно в момент времени $t = t_1 = 1$ с кориолисово ускорение составит

$$a_{КОР} = 2\,|\,v_{ОТН}\,|\cdot|\,\omega_{ПЕР}\,|\sin 120^\circ = 2\frac{\pi}{4}2\sin 120^\circ = 2{,}72\ \text{м/с}^2 .$$

Направление вектора $\vec{a}_{КОР}$ найдем, спроецировав вектор $\vec{v}_{ОТН}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор $\vec{a}^n_{ПЕР}$), и повернув затем эту проекцию в сторону переносного вращения диска (переносного вращения $\omega_{ПЕР}$, т.е. по ходу часовой стрелки) на 90°.

Прим. Иначе направление $\vec{a}_{КОР}$ можно найти, если учесть, что $\vec{a}_{КОР} = 2(\vec{\omega}\times\vec{v}_{ОТН})$.

Изображаем вектор $\vec{a}_{КОР}$ (см. рис. К4, *а*).

4. Определение $v_{АБС}$. Так как $\vec{v}_{АБС} = \vec{v}_{ОТН} + \vec{v}_{ПЕР}$, а векторы $\vec{v}_{ОТН}$ и $\vec{v}_{ПЕР}$ взаимно перпендикулярны (см. рис. К4, *а*), то в момент времени $t = t_1 = 1$ с

$$v_{АБС} = \sqrt{v^2_{ОТН} + v^2_{ПЕР}} = \sqrt{(\pi/4)^2 + 0{,}5^2} = 0{,}93\ \text{м/с}.$$

Прим. В общем случае значение $v_{АБС}$ определяется в соответствии с выражением $v_{АБС} = \sqrt{v^2_{ОТН} + v^2_{ПЕР} + 2\cos(\vec{v}_{ОТН}\,\hat{,}\,\vec{v}_{ПЕР})}$. В случае, когда определить угол между векторами $\vec{v}_{ОТН}$ и $\vec{v}_{ПЕР}$ затруднительно, то можно спроецировать каждый из векторов на координатные оси и сложить соответствующие проекции (как это делается ниже для определения $a_{АБС}$).

5. Определение $a_{АБС}$. В соответствии с теоремой о сложении ускорений

$$\vec{a}_{АБС} = \vec{a}^\tau_{ОТН} + \vec{a}^n_{ОТН} + \vec{a}^\tau_{ПЕР} + \vec{a}^n_{ПЕР} + \vec{a}_{КОР} . \qquad (1)$$

Выполнить аналитически сложение векторов, представленных в правой части равенства (1), непосредственно затруднительно. Для определения абсолютного (скалярного) значения $a_{АБС}$ проведем координатные оси M_1xyz (рис. К4, *а*) и вычислим проекции вектора $\vec{a}_{АБС}$ на эти оси (оси необходимо провести так, чтобы определение значений проекций векторов правой части равенства (1) на них не вызывало затруднений; в качестве примера на рис. К4 ось Oy проведена горизонтально, но её можно было провести через точки M_1C, приняв за начало отсчёта точку M_1, а ось Oz − вдоль линии действия вектора $v_{ОТН}$). Учтем при этом, что вектор $\vec{a}^\tau_{ПЕР} = 0$, вектор $\vec{a}_{КОР}$ лежит на оси x, векторы $\vec{a}^\tau_{ОТН}$, $\vec{a}^n_{ОТН}$ и $\vec{a}^n_{ПЕР}$ расположены в плоскости дуги ADB, т.е. в плоскости диска (см. рис. К4, *б*). Тогда, проецируя обе части равенства (1) на координатные оси, получим для момента времени $t = t_1 = 1$ с

$$a_{АБС(X)} = a_{КОР} = 2{,}72\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{АБС(У)} = a^n_{ПЕР} + a^n_{ОТН}\cos 60^\circ - |\,a^\tau_{ОТН}\,|\cos 30^\circ = 1 + \frac{\pi^2}{8}\cos 60^\circ - \frac{\pi}{3}\cos 30^\circ = 0{,}71\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{АБС(Z)} = -|\,a^{\tau}_{ОТН}\,|\cos 60^{\circ} - a^{n}_{ОТН}\cos 30^{\circ} = -\frac{\pi}{3}\cos 60^{\circ} - \frac{\pi^2}{8}\cos 30^{\circ} = -1{,}59 \text{ м/с}^2.$$

Тогда значение $a_{АБС}$ в момент времени $t = t_1 = 1$ с составит

$$a_{АБС} = \sqrt{a^2_{АБС(X)} + a^2_{АБС(Y)} + a^2_{АБС(Z)}} = \sqrt{2{,}72^2 + 0{,}71^2 + 1{,}59^2} = 3{,}23 \text{ м/с}^2.$$

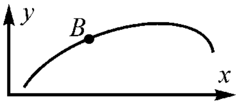
Ответ: $v_{АБС} = 0{,}93$ м/с; $a_{АБС} = 3{,}23$ м/с^2.

2.3 Задания для самостоятельной работы

2.3.1 Задача К1

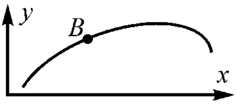
Точка B двигается в плоскости xy (рис. К1.0…К1.9, табл. К1). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$ (указан на рисунке), $y = f_2(t)$ (указан в табл. К1), здесь x и y выраженные в метрах, t – в секундах.

Найти: уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость v и ускорения точки – касательное a_τ, нормальное a_n и полное a, а также радиус кривизны ρ траектории в заданной точке траектории.



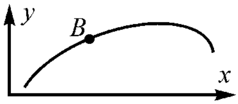
$x = 2 - 3\,t$

Рис. К1.0



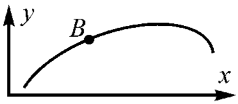
$x = 6\,t - 3$

Рис. К1.1



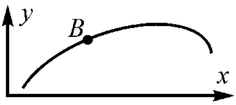
$x = 4\,t + 3$

Рис. К1.2



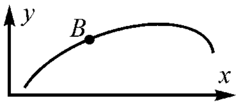
$x = 4 - 2t$

Рис. К1.3



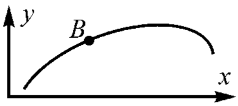
$x = 2t + 4$

Рис. К1.4



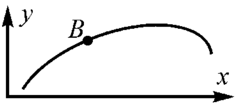
$x = -2t$

Рис. К1.5



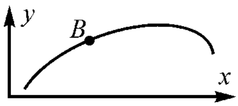
$x = 2t + 2$

Рис. К1.6



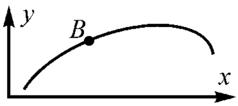
$x = 12 - 3\,t$

Рис. К1.7



$x = 4 - 6\,t$

Рис. К1.8



$x = 8t - 2$

Рис. К1.9

Прим. Под каждым рисунком для соответствующего варианта условий указан закон движения точки $x = f_1(t)$. Траектория точки B на рисунках показана условно.

Таблица К1. Численные данные к задаче К1

Номер условия	Закон движения точки $y = f_2(t)$		
	Рис. К0…К2	Рис. К3…К6	Рис. К7…К9
0	$y = 4 - 9\,t^3$	$y = t^2 - 2$	$y = -4\,t^3$
1	$y = 2 - 3\,t^3$	$y = 8\,t^4$	$y = 10\,t^2$

2	$y = 4 - 6t^2$	$y = 4 + 2t^2$	$y = 12t^4$
3	$y = 12t^2 + 2$	$y = 2(t + 1)^2$	$y = 2 - 4t^2$
4	$y = 9t^3 + 5$	$y = 2 + 2t^3$	$y = 12t^3 + 13$
5	$y = -10t^2 + 2$	$y = 3t^2 - 2$	$y = 3t^4$
6	$y = 8t^3 - 3$	$y = (t + 1)^3$	$y = 16t^3 - 14$
7	$y = -9t^4$	$y = 3 - 4t^3$	$y = 6t^4$
8	$y = 6t^2 - 4$	$y = 2t^4$	$y = 4 - 9t^2$
9	$y = 2 - 2t^2$	$y = 9t^4$	$y = 8t^2 + 6$

2.3.2 Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес *1*, *2* и *3*, которые находятся в зацеплении или связаны ременной передачей, зубчатого стержня *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, которая намотана на одно из колес (см. рис. К2.0…К2.9). Радиусы ободов колес *1*, *2* и *3* равны соответственно: колеса *1* – $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см; колеса *2* – $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см; колеса *3* – $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободах колес расположены точки A, B и C.

В табл. К2 указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, например, $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса *1*, $s_4(t)$ – закон движения стержня *4*, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса *2*, $v_5(t)$ – закон изменения скорости груза *5* и т.д., причем φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах. Положительное направление для φ и ω считать против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и v_4, v_5 – вниз.

Определить в момент времени $t = 2$ с указанные в табл. К2 в столбце «Определить» параметры – скорость (v – линейная, ω – угловая) и ускорение (a – линейное, ε – угловое) соответствующих точек или тел.

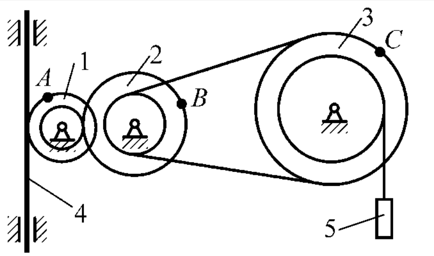


Рис. К2.0

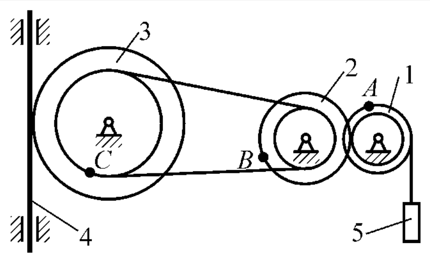


Рис. К2.1

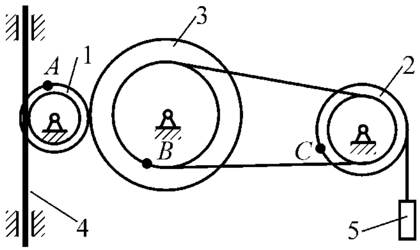


Рис. К2.2

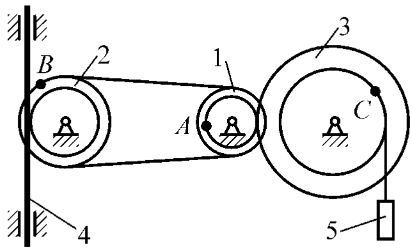


Рис. К2.3

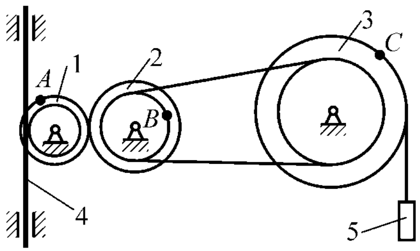


Рис. К2.4

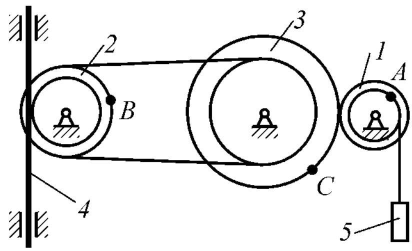


Рис. К2.5

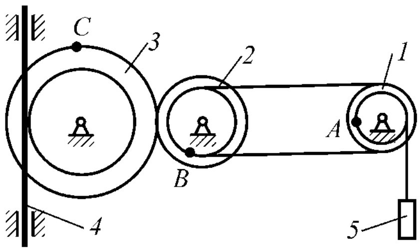


Рис. К2.6

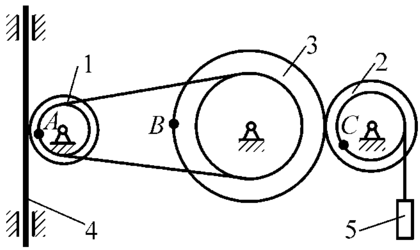


Рис. К2.7

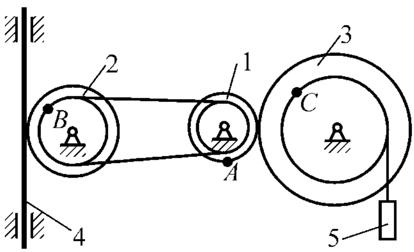


Рис. К2.8

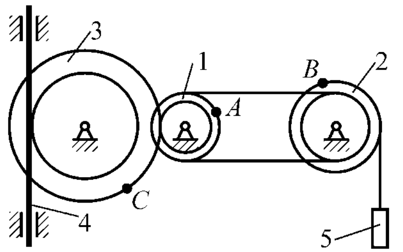


Рис. К2.9

Таблица К2. Численные данные к задаче К2

Номер условия	Дано	Определить
0	$s_4 = 4\ (7t - t^2)$	v_4, v_5, ε_2, a_A, a_5
1	$v_5 = 2\ (t^2 - 3)$	v_4, v_5, ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	v_4, ω_2, ε_2, a_C, a_5

3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5, ω_3, ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	v_4, ω_1, ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	v_4, v_5, ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2\,(t^2 - 3t)$	v_4, ω_1, ε_1, a_C, a_5
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	v_4, ω_3, ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	v_4, ω_2, ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	v_4, v_5, ε_2, a_A, a_4

2.3.3 Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней *1…4* и ползуна B, соединенных друг с другом и с недвижимыми шарнирными опорами O_1 и O_2 (см. рис. К3.0…К3.9). Длины стержней: $\ell_1 = 0{,}4$ м, $\ell_2 = 1{,}2$ м, $\ell_3 = 1{,}4$ м, $\ell_4 = 0{,}8$ м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ и θ, которые вместе с другими величинами заданы в табл. К3. Точка D на всех рисунках и точка K на рис. К3.7…К3.9 находится в середине соответствующего стержня. Движение механизма – равномерное, определяется одним из параметров: ω_1, ω_2 или v_B (см. табл. К3).

Определить величины, указанные в табл. 2 в столбце «Определить». Определить также полное ускорение a_A точки A стержня *1*, если он имеет в этот момент времени угловое ускорение $\varepsilon_1 = 10$ с$^{-2.}$

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы, то есть по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 1 следует отложить от стержня AB против хода часовой стрелки, а на рис. 2 – от стержня AE – по ходу часовой стрелки).

Построение схемы начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун B и его направляющую для большей наглядности можно изобразить, как в примере К3 (см. Прил. Б, рис. К3). Заданную угловую скорость ω_1 считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость v – от точки B к точке b.

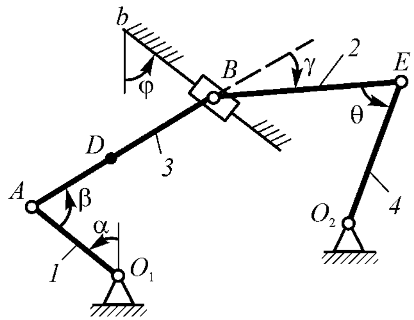


Рис. К3.0

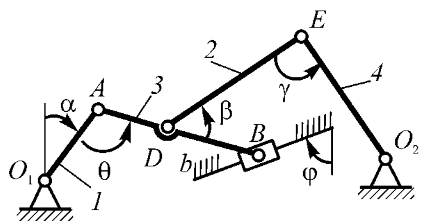


Рис. К3.1

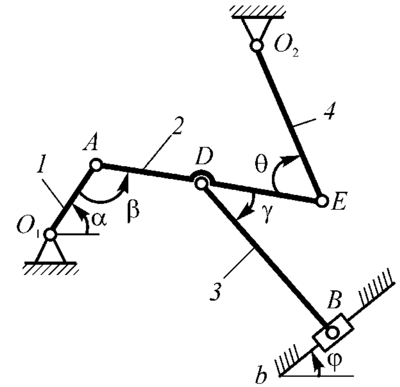


Рис. К3.2

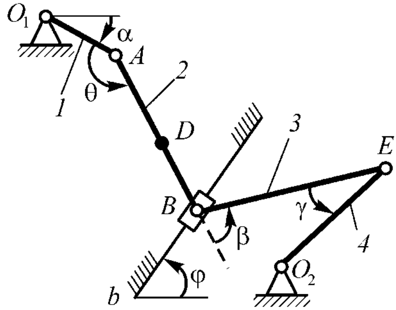


Рис. К3.3

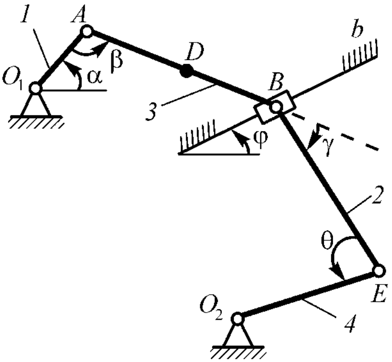


Рис. К3.4

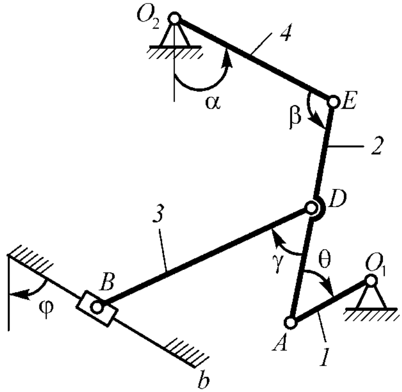


Рис. К3.5

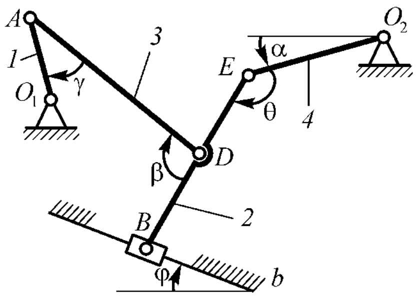


Рис. К3.6

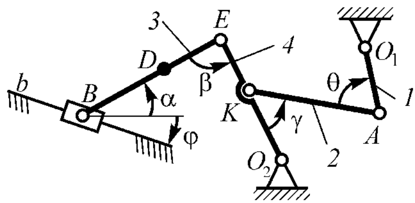


Рис. К3.7

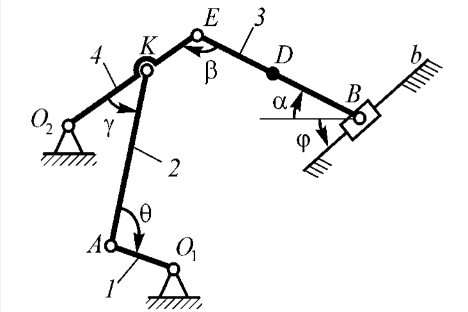


Рис. К3.8

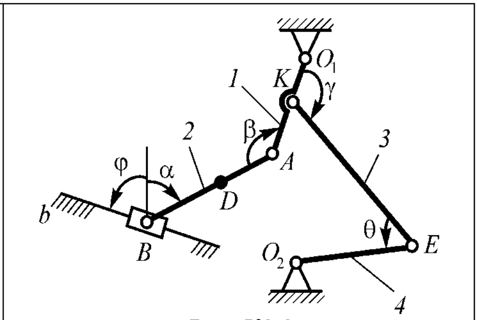


Рис. К3.9

Таблица К3. Численные данные к задача К3

Номер условия	Углы и их величины					Дано			Определить
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, с$^{-1}$	ω_2, с$^{-1}$	v, м/с	
0	30°	150°	120°	0°	60°	2	–	–	v_B, v_E, ω_2
1	60°	60°	60°	90°	120°	–	3	–	v_A, v_D, ω_3
2	0°	120°	120°	0°	60°	–	–	10	v_A, v_E, ω_2
3	90°	120°	90°	90°	60°	3	–	–	v_B, v_E, ω_2
4	0°	150°	30°	0°	60°	–	4	–	v_B, v_A, ω_2
5	60°	150°	120°	90°	30°	–	–	8	v_A, v_E, ω_3
6	30°	120°	30°	0°	60°	5	–	–	v_B, v_E, ω_3
7	90°	150°	120°	90°	30°	–	5	–	v_A, v_D, ω_3
8	0°	60°	30°	0°	120°	–	–	6	v_A, v_E, ω_2
9	30°	120°	120°	0°	60°	4	–	–	v_B, v_E, ω_3

2.3.4 Задача К4

Прямоугольная пластина (см. рис. К4.0…К4.5) или круглая пластина радиусом R = 60 см (см. рис. К4.6…К4.9) вращается вокруг неповижной оси с постоянной угловой скоростью ω, которая задана в табл. К4 (при знаке «минус» направление ω противоположно показанному на рисунке). На рис. К4.0…К4.3, К4.8 и К4.9 вращение пластины перпендикулярно плоскости пластины вокруг точки O (пластина врращается в своей плоскости); на рис. К4.4…К4.7 пластина вращаается в плоскости пластины вокруг оси OO_1 (пластина вращается в пространстве).

По прямоугольной пластине вдоль прямой BD (рис. К4.0…К4.5) или по ободу круглой пластины (рис. К4.6…К4.9) двигается точка M. Закон ее относительного движения выражается уравнением $s = AM = f(t)$ (здесь s – в сантиметрах, t – в секундах), который задан в табл. К4 (на рис. К4.6…К4.9 длина s отсчитывается по дуге окружности AM. Размеры b и ℓ заданы в табл. К4. На всех рисунках точка M показана в положении, при котором длина s положительна, то есть $s>0$ (при $s<0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = t_1 = 1$ с.

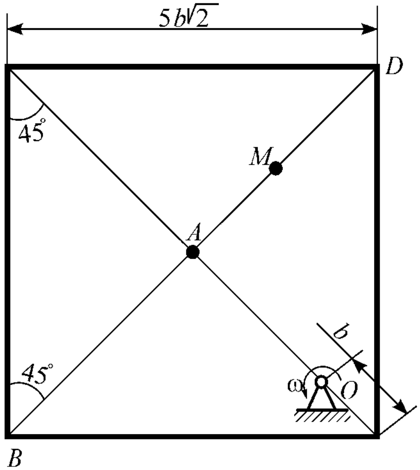


Рис. К4.0

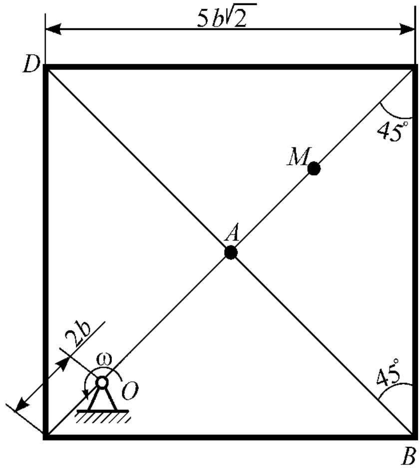


Рис. К4.1

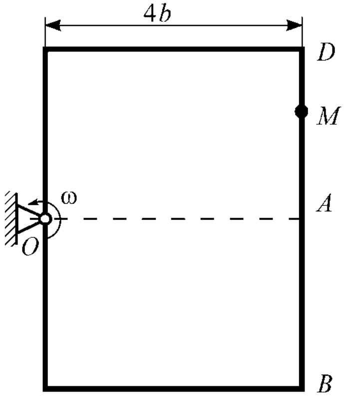


Рис. К4.2

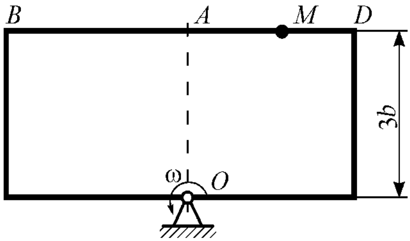


Рис. К4.3

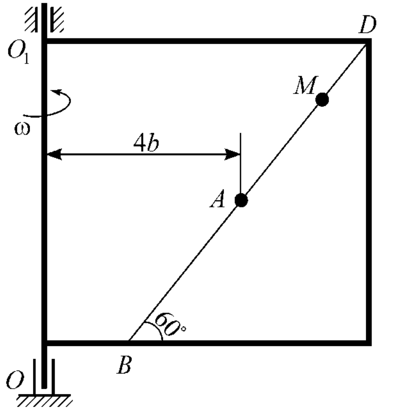


Рис. К4.4

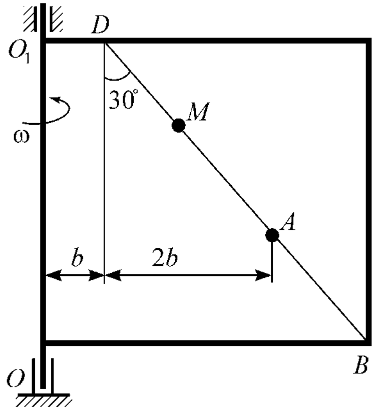


Рис. К4.5

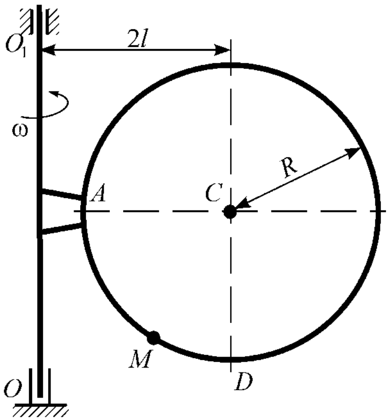


Рис. К4.6

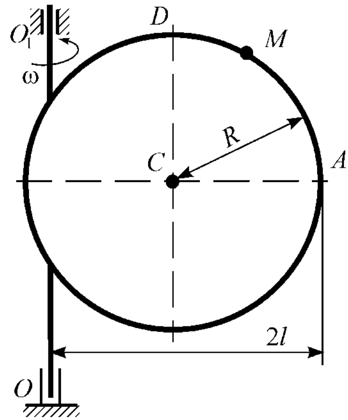


Рис. К4.7

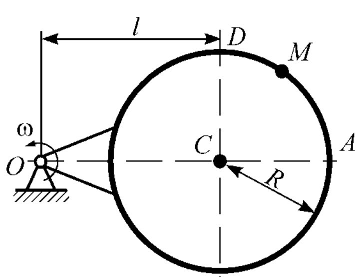


Рис. К4.8

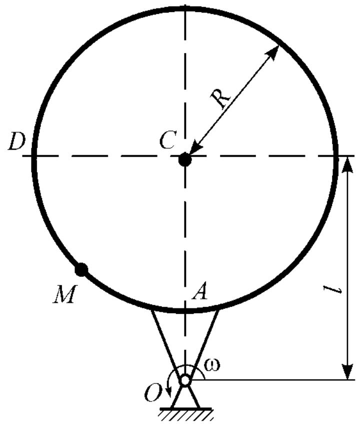


Рис. К4.9

Таблица К4. Численные данные к задача К4

Номер условия	ω, c^{-1}	Рис. К4.0…К4.5		Рис. К4.6…К4.9	
		b, см	$s = AM = f(t)$	ℓ	$s = AM = f(t)$
0	–2	16	$60\,(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\pi R\,(t^4 - 3t^2) / 3$
1	4	20	$60\,(t^3 - 2t^2)$	R	$\pi R\,(t^3 - 2t) / 3$
2	3	8	$80\,(t^2 - t^3) - 48$	R	$\pi R\,(3t - t^2) / 6$
3	–4	12	$40\,(t^2 - 3t) + 32$	$0{,}75R$	$\pi R\,(t^3 - 2t^2) / 2$
4	–3	10	$50\,(t^3 - t) - 30$	R	$\pi R\,(3t^2 - t) / 3$
5	2	12	$50\,(3t - t^2) - 64$	R	$\pi R\,(4t^2 - 2t^3) / 3$
6	4	20	$40\,(t - 2t^3) - 40$	$1{,}25R$	$\pi R\,(t - 2t^2) / 2$
7	–5	10	$80\,(t^2 - t) + 40$	R	$\pi R\,(2t^2 - 1) / 3$
8	2	8	$60\,(t - t^3) + 24$	R	$\pi R\,(t - 5t^2) / 6$
9	–5	16	$40\,(3t^2 - t^4) - 32$	$1{,}25R$	$\pi R\,(2t^2 - t^3) / 2$

2.4 Критерии оценки работы студента на практическом занятии

Критерии работы студента на практическом занятии приведены в прил. А.

2.5 Рекомендованная литература

Для успешного освоения темы практического занятия необходимо проработать соответствующие разделы литературы [1]…[6].

Практическое занятие 3
Решение задач динамики

Цель и задачи занятия: освоить решение задач динамики при поступательном и вращательном движении.

Постановка задачи: освоить решение задач динамики при поступательном и вращательном, для чего необходимо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами, а также изучить материал, изложенный в [1], с. 94…138.

3.1 Основные понятия и зависимости динамики

Основной закон динамики (второй закон Ньютона): $m\vec{a} = \sum \vec{F}$.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки:

– при координатном способе задания движения

$m\ddot{x}=\sum F_{Xi}$; $m\ddot{y}=\sum F_{Yi}$; $m\ddot{z}=\sum F_{Zi}$;

– при естественном способе задания движения

$$m\frac{d^2S}{dt^2}=\sum F_{\tau i}\ ;\ m\frac{V^2}{\rho}=\sum F_{ni}\ ;\ 0=\sum F_b\ ;$$

– при векторном способе задания движения

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F_r\ ;\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{r}}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=F_\varphi\ ;$$

– для случая прямолинейного движения точки $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{ix}$.

Решение второй (основной) задачи динамики (общий алгоритм решения): дважды проинтегрировать дифференциальные уравнения движения, в результате получаем уравнение движения вида $x=f(t,C_1,C_2)$, где C_1 и C_2 − постоянные интегрирования, для нахождения которых используются начальные условия, например, для случая движения точки (тела) относительно оси x: $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=v_X=v_0$.

Колебания:

– свободные: $m\cdot\ddot{x}=-cx$; $c/m=k^2$; $\ddot{x}+k^2x=0$; $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$; $\dot{x}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt$; $C_1=x_0$, $C_2=\dot{x}_0/k$ (иначе $x=x_0\cos kt+(\dot{x}_0/k)\sin kt$);

– гармонические: $C_1=A\sin\beta$, $C_2=A\cos\beta$, $x=A\sin(kt+\beta)$, $A=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/k^2)}$ (амплитуда), $\mathrm{tg}\beta=kx/\dot{x}_0$ (β – начальная фаза свободных колебаний); собственная частота колебаний $k=\sqrt{c/m}$; статическое отклонение $\delta_{CT}=P/c$. $T=2\pi\sqrt{\delta_{\text{ст}}/g}$; период $T=2\pi/k=2\pi\sqrt{\delta_{CT}/g}$;

– затухающие: сила сопротивления $R_X=-b\dot{x}$, $m\cdot\ddot{x}=-cx-b\dot{x}$, $b/m=2n$, $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$, характеристическое уравнение $z^2+2nz+k^2=0$ (его корни $z_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$); частота затухающих колебаний $k^*=\sqrt{k^2-n^2}$ и период $T^*=\dfrac{2\pi}{k^*}=\dfrac{T}{\sqrt{1-(n/k)^2}}$. декремент колебаний $\dfrac{A_{i+1}}{A_i}=e^{-nT^*/2}$; логарифмический декремент $-nT^*/2$ (n – коэффициент затухания);

– вынужденные: возмущающая сила $Q=H\sin(pt+\delta)$ (p – частота возмущающей силы, δ – начальная фаза); $m\cdot\ddot{x}=-cx+H\sin(pt+\delta)$, $h=H/m$, $\ddot{x}+k^2x=h\sin(pt+\delta)$, $x=x^*+x^{**}$, $x^*=C_1\cos kt+C_2\sin kt$, $x^{**}=A\sin(pt+\delta)$.

Количество движения материальной точки $\vec{Q}=m\vec{v}$.

Элементарный импульс силы $\vec{F}dt$.

Импульс силы за отрезок времени Δt $\vec{S}=\int_0^t\vec{F}dt$.

Теорема об изменении количества движения материальной точки:

– в окончательной форме $d(m\vec{v}) = \vec{F}dt$ или $m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F}dt$ (в проекциях на оси координат $m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_0^t F_x dt$ и т.д.);

– в дифференциальной форме $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$.

Момент количества движения материальной точки относительно центра O $\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O$, $\frac{dK_X}{dt} = M_X$ (если M_O=0, тогда $\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$ =const или $\vec{K}_O = 2m\vec{q} = const$, где $\vec{q} = 0{,}5(\vec{r} \times \vec{v})$ – секторная скорость).

Работа силы:

– на перемещении Δs: $A_{(F=const)}=F_\tau \Delta s=(F\cos\alpha)\Delta s$;

– переменной силы F на конечном перемещении от s_0 до s_1: $A_F = \int_{s_0}^{s_1} F_\tau ds$;

– силы трения: $A_{TP}=-F_{TP}\Delta s$, $F_{TP}=f_{TP}N$;

– силы тяжести: $A_P = \pm P\Delta h$ (A>0, если точка (тело) переместилась вверх и A<0 – вниз);

– силы притяжения (тяготения): $F = k\frac{m}{r^2}$, $k=gR^2$;

– силы упругости:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-cx)dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2) = \frac{c}{2}[(\Delta\ell_{нач})^2 - (\Delta\ell_{кон})^2].$$

Мощность $N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v} = F_X\dot{x} + F_Y\dot{y} + F_Z\dot{z}$. Если N=const, то $N=A/t$.

Кинетическая энергия материальной точки (или тела при его поступательном движении) $T = \frac{mv^2}{2}$.

Теорема об изменении кинетической энергии точки: в дифференциальной форме $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_i$; в конечном виде $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \sum A$.

Потенциальная энергия – $П$ равна сумме работ сил потенциального поля на перемещении системы из данного положения в нулевое: $A=П_1–П_2$. Потенциальная энергия поля силы тяжести $П_{ТЯЖ}=mgz$ (или $П_{ТЯЖ}=mgh$).

Гравитационная сила $F = f\frac{m_1m_2}{r^2}$, $П = -f\frac{m_1m_2}{r}$ (f=6,67·10^{-11}м^3/кгс^2 – постоянная тяготения).

Центр масс (центр инерции) – геометрическая точка, радиус-вектор которой определяется равенством: $\vec{r}_C = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ ($\vec{r}_i$ – радиусы-векторы точек, образующих систему).

Координаты центра масс системы тел (точек):

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M};\ y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M};\ z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M}.$$

Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек: $m_k \dfrac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$ или в проекциях на оси координат: $m_k \ddot{x}_k = X_k^e + X_k^i$, $m_k \ddot{y}_k = Y_k^e + Y_k^i$, $m_k \ddot{z}_k = Z_k^e + Z_k^i$ (для каждой точки (тела) системы!).

Момент инерции материальной точки относительно оси: mh^2 (h − расстояние до рассматриваемой оси).

Момент инерции тела:

– осевой: $J_Z = \sum m_i h_i^2$. Для случая сплошного тела: $J_X = \int (y^2+z^2)dm$; $J_Y = \int (z^2+x^2)dm$; $J_Z = \int (x^2+y^2)dm$. $J_Z = M\rho^2$ (ρ – радиус инерции тела);

– полярный: $J_O = \int (x^2+y^2+z^2)dm$; $J_X+J_Y+J_Z = 2J_O$;

– центробежный: $J_{XY} = \int xy\,dm$; $J_{YZ} = \int yz\,dm$; $J_{ZX} = \int zx\,dm$; $J_{XY} = J_{YX}$;

– относительно параллельной оси (теорема Гюйгенса-Штейнера): $J_{Oz'} = J_{Cz} + md^2$.

Моменты инерции:

– стержня $J_y = \dfrac{mL^2}{12}$; $J_{y1} = \dfrac{mL^2}{3}$;

– сплошного диска относительно его центра $J_{Cz} = \dfrac{mR^2}{2}$ и относительно его образующей $J_{Cz} = mR^2$;

– полого цилиндра $J_{Cz} = \dfrac{m(R^2 - r^2)}{2}$;

– цилиндра с тонкой стенкой $J_{Cz} = mR^2$.

Теорема о движении центра масс системы: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^e$. Дифференциальное уравнение движения центра масс системы: $m\ddot{x}_C = \sum F_{Xi}^e$.

Закон сохранения движения центра масс: если $\sum F_{Xi}^e = 0$, то $\ddot{x}_C = \dot{v}_{Cx} = const$, если при этом в начальный момент $v_{Cx0}=0$, то $\dot{x}_C = 0$, откуда $x_C = const$.

Количество движения системы $\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_C$.

Теорема об изменении количества движения системы:

– в дифференциальной форме $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e$ (в проекциях на координатные оси

$\frac{dQ_X}{dt} = F_{Xi}^e$ и т.д. для всех точек (тел) системы);

– в интегральной форме: $\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_i^e dt$ (здесь $\sum \int_0^{t_1} \vec{F}_i^e dt = \sum \vec{S}_i^e$ – импульсы внешних сил).

Закон сохранения количества движения: $\sum \vec{F}_i^e = 0 \Rightarrow \vec{Q} = const$.

Главный момент количеств движения материальной системы (кинетический момент) $\vec{K}_o = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$.

Теорема об изменении кинетического момента: $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_{Oi}^e = \vec{M}_{Oi}^e$; $\frac{dK_X}{dt} = M_X^e$.

Закон сохранения кинетического момента: если $\vec{M}_O^E = 0$, то $\vec{K}_O = const$.

Кинетический момент вращающегося тела $K_Z = J_Z\omega$. Если $M_Z = 0$, то $J_Z\omega = const$.

Кинетическая энергия системы $T = \sum T_i$.

Кинетическая энергия при движении тела:

– поступательном $T_{ПОСТ} = \frac{mv^2}{2}$;

– вращательном $T_{ВР} = \frac{J_Z\omega^2}{2}$;

– плоскопараллельном (плоском) $T_{ПЛ} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_Z\omega^2}{2}$ (v_C – скорость центра масс).

Теорема об изменении кинетической энергии системы:

– в дифференциальной форме $dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$;

– в конечной (интегральной) форме $T_2 - T_1 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$ (для неизменяемой системы $\sum A_k^i = 0$, тогда $T_2 - T_1 = \sum A_k^e$.

Закон сохранения полной механической энергии: $T+П=const$.

Дифференциальные уравнения поступательного движения тела:

$m\ddot{x}_C = \sum X_i^e$, $m\ddot{y}_C = \sum Y_i^e$, $m\ddot{z}_C = \sum Z_i^e$.

Дифференциальные уравнения движения тела:

– плоского (плоскопараллельного):

$m\ddot{x}_C = \sum X_i^e$; $m\ddot{y}_C = \sum Y_i^e$; $J_C\ddot{\varphi} = \sum m_C(F_i^e)$;

– вращающегося вокруг неподвижной оси z:

$J_Z\ddot{\varphi} = M_Z^e$. Если $M_Z^e = 0$, то $\ddot{\varphi} = 0$, $\omega=const$; если $M_Z^e = const$, то $\varepsilon=const$.

Принцип Даламбера для материальной точки: $\sum(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{\Phi}_k^И) = 0$ ($\vec{\Phi}_k^И = -m_k\vec{a}_k$ − сила инерции, знак (−) означает, что сила инерции направлна в сторону, противоположную направлению ускорения точки (тела)).

Принцип Даламбера для системы: $\sum[\vec{m}_O(\vec{F}_k^e)+\vec{m}_O(\vec{F}_k^i)+\vec{m}_O(\vec{\Phi}_k^И)]=0$ (где $\vec{\Phi}^И=\sum\vec{\Phi}_k^И=-\sum m_k\vec{a}_k=-M\vec{a}_C$ – главный вектор сил инерции, $\sum\vec{m}_O(\vec{\Phi}_k^И)=\vec{M}_O^И$ – главный момент сил инерции).

Главный момент сил инерции:

– при плоском движении: $\vec{M}_C^И=-J_C\vec{\varepsilon}$;

– при вращении вокруг оси z: $\vec{M}_C^И=-J_Z\vec{\varepsilon}$.

Определение реакций при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси:

– центробежная сила инерции $\Phi_i^Ц=m_ir_i\omega^2$;

– вращательная сила инерции $\Phi_i^{ВР}=m_ir_i\varepsilon$.

Далее составляются и решаются уравнения:

$\sum m_ix_i=mx_C$; $\sum m_iy_i=my_C$, $\Phi_X^и=mx_C\omega^2+my_C\varepsilon$, $\Phi_У^и=my_C\omega^2-mx_C\varepsilon$;

$M_X^и=-\omega^2\sum m_iy_iz_i+\varepsilon\sum m_iz_ix_i=-J_{УX}\omega^2+J_{ZX}\varepsilon$,

$M_У^и=\omega^2\sum m_iz_ix_i+\varepsilon\sum m_iy_iz_i=J_{ZX}\omega^2+J_{УZ}\varepsilon$,

$M_Z^и=-\sum m_ir_i\varepsilon r_i=-\varepsilon\sum m_ir_i^2=-J_Z\varepsilon$ (где $J_{УZ}=\sum m_iy_iz_i$, $J_{ZX}=\sum m_iz_ix_i$ – центробежные моменты инерции, $J_Z=\sum m_ir_i^2$).

Уравнения равновесия кинетостатики:

$\sum X_i^e+X_A+X_B+mx_C\omega^2+my_C\varepsilon=0$; $\sum M_{Xi}^e-Y_Bh-J_{УZ}\omega^2+J_{ZX}\varepsilon=0$;

$\sum Y_i^e+Y_A+Y_B+my_C\omega^2-mx_C\varepsilon=0$; $\sum M_{Уi}^e+X_Bh+J_{ZX}\omega^2+J_{УZ}\varepsilon=0$;

$\sum Z_i^e+Z_A=0$; $\sum M_{Zi}^e-J_Z\varepsilon=0$.

Условия отсутствия динамических составляющих: $mx_C\omega^2+my_C\varepsilon=0$, $my_C\omega^2-mx_C\varepsilon=0$, $-J_{УZ}\omega^2+J_{ZX}\varepsilon=0$, $J_{ZX}\omega^2+J_{УZ}\varepsilon=0$, откуда x_C=0, y_C=0, J_{YZ}=0, J_{ZX}=0.

Принцип возможных перемещений: $\sum\vec{F}_i\delta\vec{r}_i=0$ или в проекциях на координатные оси – $\sum(F_{Xi}\delta x_i+F_{Уi}\delta y_i+F_{Zi}\delta z_i)=0$.

Общее уравнение динамики: $\sum\delta A_i^a+\sum\delta A_i^и=0$.

3.2 Примеры решения типичных задач кинематики

3.2.1 Задача Д1

Указания. Задача Д1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи Д1 разбивается на две части: 1 – движение груза на участке AB; 2 – движение груза на участке BC.

Решая первую часть задачи необходимо составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения на участке AB или его длину, определить, какую скорость будет иметь груз в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC.

При решении второй части задачи необходимо составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий. При этом отсчет времени производится от момента, когда груз находится в точке B (полагается, что в этот момент времени $t = 0$).

Алгоритм решения задачи Д1.

1. Выделить материальное тело, движение которого изучается.

2. Установить все активные и пассивные силы, действующие на тело.

3. Рассмотреть движение тела на участке AB; установить координатную ось (т.к. тело совершает прямолинейное движение, то достаточно установить одну координатную ось, направленную от точки A к точке B и начинающуюся в точке A).

4. Составить дифференциальное уравнение движения тела в проекции на координатную ось; подставить в дифференциальное уравнение необходимые выражения и величины, выполнить соответствующие преобразования.

5. Проинтегрировать дифференциальное уравнение движения; для определения постоянных интегрирования использовать начальные условия.

6. Определить скорость v_B тела в точке B.

7. Рассмотреть движение тела на участке BC; установить систему координат так (т.к. тело совершает прямолинейное движение, то достаточно установить одну координатную ось, направленную от точки B к точке C и начинающуюся в точке B).

8. Составить дифференциальное уравнение движения тела в проекции на координатную ось.

9. Определить закон движения тела на участке BC, для чего подставить в дифференциальное уравнение необходимые выражения и величины, выполнить соответствующие преобразования (при этом все переменные силы необходимо выразить через величины, от которых они зависят), а затем дважды проинтегрировать его; для определения постоянных интегрирования использовать начальные условия.

Прим. При движении груза на участке BC найденная скорость v_B (см. п. 6) будет являться начальной скоростью.

Пример решения задачи Д1. На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массой m действуют сила тяжести $\vec{G}$ и сила сопротивления движению $\vec{Q}$; расстояние от точки A до точки B равно ℓ; начальная скорость в точке A v_A равна v_0. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести $\vec{G}$ и переменная сила $\vec{F} = f(t)$.

Дано: $m = 2$ кг, $Q = 0{,}15G$, $v_0 = 5$ м/с, $\ell = 2{,}5$ м, $F = 16 \sin(4t)$.

Определить: $x_{BC} = f(t)$ − закон движения груза на участке BC.

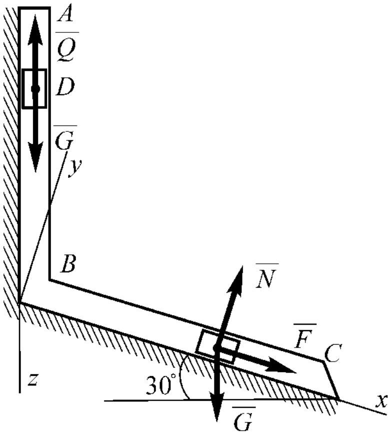


Рис. Д1

Решение. Движение груза на участках AB и BC рассмотрим как две самостоятельные задачи.

1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении, желательно − между точками A и B) и действующие на него силы $\vec{G} = m\vec{g}$ и $\vec{Q}$.

Проводим координатную ось Az (её положительное направление − в сторону движения тела) и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\ddot{z} = G_Z - Q_Z .$$

Определяем силы, входящие в правую часть уравнения (при этом все переменные силы необходимо выразить через величины, от которых они зависят): $G_Z = G = mg$, $Q_Z = Q = 0{,}15G = 0{,}15mg$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{z} = G - 0{,}15G = mg - 0{,}15mg . \qquad (1)$$

Разделив обе части уравнения (1) на m, а затем, дважды проинтегрировав полученное выражение, получим:

$$\ddot{z} = g - 0{,}15g = 0{,}85g ;$$

$$\dot{z} = 0{,}85gt + C_1 \qquad (2)$$

$$z = 0{,}85g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 . \qquad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 подставим в уравнения (2) и (3) начальные условия при движении груза на участке AB: в начале движения время $t = 0$, координата $z = 0$, скорость $v_A = \dot{z} = v_0 = 5$. Тогда

$$5 = 0{,}85g \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 5 ;$$

$$0 = 0{,}85g\frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 .$$

Подставив полученные значения C_1 и C_2 в уравнения (2) и (3), получим

$$\dot{z} = 0{,}85gt + 5 ; \qquad (4)$$

$$z = 0{,}85g\frac{t^2}{2} + 5t . \qquad (5)$$

Подставив в уравнения (4) и (5) параметры, характеризующие движение тела при его нахождении в точке B (длина пройденного пути $|AB| = \ell = 2{,}5$ м; скорость $\dot{z}_B = v_B$; время t, за которое пройден участок AB, равно τ), получим

$$v_B = 0{,}85g\tau + 5 ; \qquad (6)$$

$$l = 0{,}85g\frac{\tau^2}{2} + 5\tau . \qquad (7)$$

Для определения значений неизвестных величин v_B и τ подставим в уравнения (6) и (7) численные значения известных величин, из уравнения (7) найдём значение τ, а затем из уравнения (6) − значение v_B:

$$2{,}5 = 0{,}85 \cdot 9{,}81\frac{\tau^2}{2} + 5\tau = 4{,}17\tau^2 + 5\tau \Leftrightarrow 4{,}17\tau^2 + 5\tau - 2{,}5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4{,}17 \cdot (-2{,}5)}}{2 \cdot 4{,}17} = \frac{-5 \pm 8{,}17}{8{,}34} \Rightarrow$$

$$\tau_1 = \frac{-5 + 8{,}17}{8{,}34} = 0{,}38; \qquad \tau_2 = \frac{-5 - 8{,}17}{8{,}34} = -1{,}59;$$

Одно из значений τ отрицательно (т.е. численное значение текущего времени меньше нуля) и не имеет смысла, поэтому принимаем $\tau = 0{,}38$ с. Подставив это значение в уравнение (6), получим

$$v_B = 0{,}85g \cdot 0{,}38 + 5 = 0{,}85 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}38 + 5 = 8{,}17 \text{ м/с}.$$

2. Рассмотрим движение груза на участке BC. Найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью (т.е. $v_0 = v_B = 8{,}17$ м/с). Изображаем груз на втором участке его движения (между точками B и C) и действующие на него силы веса $\vec{G} = m\vec{g}$, реакции поверхности $\vec{N}$ и переменной $\vec{F}$.

Проведем из точки B координатную ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\ddot{x} = G_X + N_X + F_X. \qquad (8)$$

Так как $G_X = G \sin 30^\circ = mg \sin 30^\circ$, $N_X = 0$, $F_X = 16 \sin(4t)$, то уравнение (8) примет вид

$$m\ddot{x} = mg\sin 30^\circ + 16\sin(4t).$$

Разделив обе части равенства на $m = 2$ кг и полагая $g = 9{,}81$ м/с^2, получим

$$\ddot{x} = 9{,}81\sin 30^\circ + \frac{16\sin(4t)}{2} \Leftrightarrow \ddot{x} = 4{,}91 + 8\sin(4t).$$

Проинтегрируем дважды полученное уравнение:

$$\dot{x} = 4{,}91t - 2\cos(4t) + C_3; \qquad (9)$$

$$x = 2{,}45t^2 - 0{,}5\sin(4t) + C_3 t + C_4. \qquad (10)$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 воспользуемся начальными условиями при движении груза на участке BC: в начале движения $t = 0$, $\dot{x} = v_0 = v_B$, $x = 0$. Тогда

$$v_B = 4{,}91 \cdot 0 - 2\cos(4 \cdot 0) + C_3 \Rightarrow C_3 = v_B + 2\cos 0^\circ = 8{,}17 + 2 = 10{,}17;$$

$$0 = 2{,}45 \cdot 0 - 0{,}5\sin(4 \cdot 0) + 10{,}17 \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0.$$

Подставим найденные значения C_3 и C_4 в уравнения (9) и (10):

$$\dot{x} = 4{,}91t - 2\cos(4t) + 10{,}17.$$

$$x = 2{,}45t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 10{,}17t. \qquad (11)$$

Уравнение (11) является искомым законом движения груза D на участке BC.

Ответ: $x = 2{,}45t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 10{,}17t$.

3.2.2 Задача Д2

Задача Д2 решается с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи следует учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел, и эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче необходимо определить.

При вычислении кинетической энергии катка, движущегося плоскопараллельно, для установления зависимости между его угловой скоростью и скоростью его центра масс необходимо воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей, которое рассматривалось при изучении раздела «Кинематика».

При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Если по данным таблицы масса какого-либо тела равна нулю, то это тело на чертеже не изображать; шкивы *4* и *5* всегда входят в систему (даже если их масса равна нулю; они определяют кинематические параметры движения системы).

Алгоритм решения задачи Д2.

1. Начертить схему механической системы с соблюдением пропорций между размерами её элементов. При этом тело *1* или *2*, если его масса равна нулю, на схеме не изображается. Указать все действующие силовые факторы (силы, моменты), в том числе − реакции опор (груза и катка) и силы трения, а также направление перемещения системы s_1 в виде односторонней стрелки.

2. Для определения искомой скорости применить теорему об изменении кинетической энергии системы.

3. Определить кинетическую энергию каждого тела системы, выразив их скорости через искомую скорость (линейную v или вращательную ω).

4. Определить работы всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда заданная точка пройдет путь s_1. При этом перемещения всех тел необходимо выразить через заданную величину s_1.

5. Приравнять сумму кинетических энергий системы и сумму работ сил на заданном перемещении, преобразовать полученное равенство, подставить в него значения всех известных величин. Из получившегося выражения определить значение искомой скорости.

Прим. Для упрощения решения задачи в пунктах 3 и 4 можно выполнять вычисления для каждого тела и силы отдельно, сразу подставляя в полученные выражения известные числовые значения исходных величин. Тогда в пункте 5 вычисления будут сведены к простым алгебраическим.

Пример решения задачи Д2. Механическая система (рис. Д2) состоит из сплошного цилиндрического катка *1* (каток катится по поверхности без сопротивления и скольжения), ступенчатого шкива *2* с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза *3* (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив *2*.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки её приложения, система приходит в движения из состояния покоя (направление движения указано стрелкой с обозначением s_1). При движении на шкив *2* действует постоянный момент M_2 сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 8$ кг, $R_2 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, $f = 0{,}2$, $M_2 = 0{,}6$ Н·м, $F = 2(1+2s)$ Н, $s_1 = 2$ м.

Определить: скорость v_{C1} центра масс катка, когда пройденный им путь $s = s_1$.

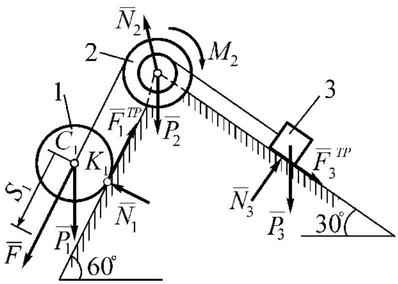


Рис. Д2

Решение. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел *1*, *2* и *3*, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные $\vec{F}$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, момент сопротивления M_2, реакции опор $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$ и силы трения $\vec{F}_1^{TP}$ и $\vec{F}_2^{TP}$.

Для определения v_{C1} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E . \qquad (1)$$

Определим T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело *2* вращается вокруг неподвижной оси, а тело 3 − поступательно, получим

$$T_1 = \frac{m_1 v_{C1}^2}{2} + \frac{I_{C1}\omega_1^2}{2}; \; T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}; \; T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2}. \qquad (3)$$

Все входящие в уравнения (3) скорости следует выразить через искомую скорость v_{C1}. Приняв во внимание, что точка K_1 − мгновенный центр скоростей катка *1*, получим

$$\omega_1 = \frac{v_{C1}}{|K_1C_1|} = \frac{v_{C1}}{r_1}; \qquad \omega_2 = \frac{v_{C1}}{R_2}; \qquad v_3 = \omega_2 r_2 = \frac{v_{C1}}{R_2} r_2 . \qquad (4)$$

Входящие в уравнение (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2; \qquad I_2 = m_2 R_2^2 . \qquad (5)$$

Подставив все величины из зависимостей (4) и (5) в равенство (3), получим:

$$T_1 = \frac{m_1 v_{C1}^2}{2} + \frac{(0{,}5 m_1 r_1^2)\left(\frac{v_{C1}}{r_1}\right)^2}{2}; \; T_2 = \frac{(m_2 R_2^2)\left(\frac{v_{C1}}{R_2}\right)^2}{2}; \; T_3 = \frac{m_3 \left(\frac{v_{C1} r_2}{R_2}\right)^2}{2}. \qquad (6)$$

Подставив последние зависимости в равенство (2) (общий множитель v_{C1}^2 вынесем за скобки), а затем − численные значения известных величин, окончательно получим:

$$T = \frac{m_1 v_{C1}^2}{2} + \frac{(0{,}5 m_1 r_1^2)\left(\frac{v_{C1}}{r_1}\right)^2}{2} + \frac{(m_2 R_2^2)\left(\frac{v_{C1}}{R_2}\right)^2}{2} + \frac{m_3 \left(\frac{v_{C1} r_2}{R_2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 v_{C1}^2}{2} + \frac{0{,}5 m_1 r_1^2 v_{C1}^2}{2 r_1^2} + \frac{m_2 R_2^2 v_{C1}^2}{2 R_2^2} + \frac{m_3 v_{C1}^2 r_2^2}{2 R_2^2} = v_{C1}^2 \left(\frac{1{,}5 m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3 r_2^2}{R_2^2} \right) =$$

$$= v_{C1}^2 \left(\frac{1{,}5 \cdot 4}{2} + \frac{10}{2} + \frac{8 \cdot 0{,}1^2}{2 \cdot 0{,}2^2} \right) = 9 v_{C1}^2 . \qquad (7)$$

Прим. Если заранее вычислить значения T_1, T_2 и T_3 в соответствии с выражениями (6), подставив в них численные значения известных величин, то определение выражения (7) будет упрощено.

Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь s_1. Необходимо все перемещения выразить через заданную величину s_1 (зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в равенствах (4), т.е. $\varphi_2 = s_1/R_2$, $s_3 = s_1(r_2/R_2)$. В результате получим:

$$A_F = \int_0^{s_1} 2(1+2s)ds = 2\int_0^{s_1} (1+2s)ds = 2(s_1 + s_1^2) ;$$

$$A_{M2} = -M_2 \varphi_2 = -M_2 \frac{s_1}{R_2} ;$$

$$A_{P1} = P_1 s_1 \sin 60^\circ ;$$

$$A_{P3} = -P_3 s_3 \sin 30^\circ = -P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ ;$$

$$A_{F_3^{TP}} = -F_3^{TP} s_3 = -f N_3 s_3 = -f P_3 \cos 30^\circ s_1 \frac{r_2}{R_2} .$$

Прим. Работа A_F определяется как работа активной силы F, A_{M2} − как работа активного момента M_2; A_{P1} и A_{P3} − как работа силы тяжести над телами *1* и *3* весом P_1 и P_3 соответственно, $A_{F_3^{TP}}$ − работа силы трения F_3^{TP}, которая действует на тело *3*. При вычислении A_F значение верхнего предела интегрирования равно конечной координате тела, к которому приложена сила F, при его движении за рассматриваемый промежуток времени.

Работа остальных сил равна нулю, так как: точка K_1, к которой приложены силы $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_1^{TP}$ − мгновенный центр скоростей; точка O, к которой приложены силы $\vec{P}_2$ и $\vec{N}_2$, неподвижна; реакция $\vec{N}_3$ перпендикулярна перемещению груза *3*. Тогда окончательно получаем

$$\sum A_i^E = 2(s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - M_2 \frac{s_1}{R_2} - P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2} (\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ) =$$

$$= 2(2+2^2) + 4 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 60^\circ - 0{,}6 \frac{2}{0{,}2} - 8 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \frac{0{,}1}{0{,}2} (\sin 30^\circ + 0{,}2 \cos 30^\circ) = 21{,}1 \text{ Дж}. \qquad (8)$$

Подставив выражение (7) и значение (8) в уравнение (1) (учтём, что $T_0 = 0$), получим

$$10v_{C1}^2 = 21{,}1 \quad \Rightarrow \quad v_{C1} = \sqrt{\frac{21{,}1}{10}} = 1{,}45 \text{ м/с}.$$

Ответ: v_{C1} = 1,45 м/с.

3.2.3 Задача Д3

Задача Д3 − на применение к изучению движения системы принципа Даламбера (в задаче необходимо определить давление на подшипники вращающегося несбалансированного вала). При решении задачи необходимо учесть, что если силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня *2*) имеют равнодействующую $\Phi^И$, то линия её действия в общем случае не проходит через точку *C* центра масс тела.

Алгоритм решения задачи Д3.

1. Начертить схему механической системы, в соответствии с заданными условиями (желательно − в масштабе).

2. Установить координатные оси с началом в точке *A*. Указать на схеме в виде векторов вес груза (из его центра) и стержня (из середины его длины). Указать на схеме три реакции опор X_A, Y_A и X_B.

3. Установить места приложения сил инерции (даламберовых сил), возникающих при вращении вала, и изобразить их. Определить абсолютные координаты (расстояния от осей *x* и *y*) до точек приложения всех сил.

4. Определить численные значения сил инерции.

5. В соответствии с принципом Даламбера приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил (в данной задаче − плоскую). Составить для этой системы сил уравнения равновесия и решить их методами статики, определив искомые неизвестные реакции опор.

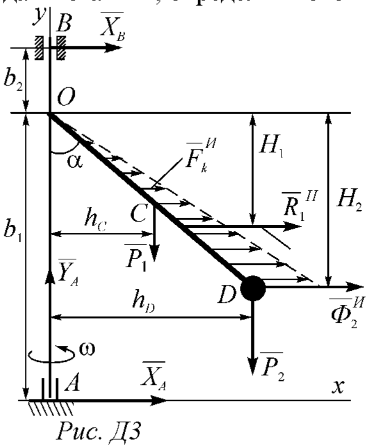


Рис. Д3

Пример решения задачи Д3. С невесомым валом *AB*, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен стержень *OD* длиной ℓ и массой *m*, имеющий на конце груз массой P_2 (см. рис. Д3).

Дано: b_1 = 0,6 м, b_2 = 0,2 м, $\alpha = 30^\circ$, ℓ = 0,5 м, m_1 = 3 кг, m_2 = 2 кг, $\omega = 6\ с^{-1}$.

Определить: реакции подпятника *A* и подшипника *B*.

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала *AB*, стержня *OD* и груза, а затем применим принцип Даламбера.

Проведем вращающиеся вместе с валом оси *Axy* так, чтобы стержень лежал в плоскости *xy*, и изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ реакций подпятника и реакцию $\vec{X}_B$ подшипника.

Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно (ω = const), то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\vec{a}_{ni}$, направленные к оси вращения. Тогда силы инерции $\vec{\Phi}_i^И$ будут направлены от оси вращения. Поскольку все силы инерции пропорциональны расстоянию h_i рассматриваемой массы (центра масс элемента) до оси вращения, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $|\vec{R}_1^И|=|\vec{\Phi}_1^И|$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии $H_1 = 2H_2/3 = 2\cdot(\ell\cdot\sin(\alpha))/3 = 2\cdot(0{,}5\cdot\sin 30^\circ)/3 = 1/6$ м от вершины O.

Определим значения сил инерции $\Phi_i^И$ по формуле

$$\Phi_i^И = m_i a_{ni} = m_i \omega_i^2 h_i ,$$

где m_i, a_{ni} и ω_i – соответственно масса, нормальное ускорение и угловая скорость i-го элемента.

Тогда для стержня *1* и груза *2* (см. рис. Д3):

$$\Phi_1^И = m_1\omega^2 h_C; \qquad h_C = 0{,}5l\sin\alpha = 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}125 \text{ м};$$

$$\Phi_2^И = m_2\omega^2 h_D; \qquad h_D = l\sin\alpha = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25 \text{ м};$$

$$\Phi_1^И = 3\cdot 6^2\cdot 0{,}125 = 13{,}5 \text{ Н}; \qquad \Phi_2^И = 2\cdot 6^2\cdot 0{,}25 = 18 \text{ Н}.$$

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости xy, то реакции подпятника A и подшипника B также лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

Дальнейшее решение в соответствии с принципом Даламбера выполняется методами статики, при этом принимаем, что рассматриваемая конструкция является неподвижной, а приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, а затем решим их, определив искомые значения X_A, Y_A, X_B:

$\sum F_{ix} = 0$: $\quad X_A + X_B + R_1^И + \Phi_2^И = 0$;

$\sum F_{iy} = 0$: $\quad Y_A - P_1 - P_2 = 0$;

$\sum M_B(F_i) = 0$: $\quad X_A(b_1+b_2) - P_1(l/2)\sin\alpha - P_2 l\sin\alpha + R_1^И(H_1+b_2) + \Phi_2^И(H_2+b_2) = 0$;

Откуда:

$$Y_A = P_1 + P_2 = 3\cdot 9{,}81 + 2\cdot 9{,}81 = 49{,}05 \text{ Н};$$

$$X_A = \frac{P_1\dfrac{l}{2}\sin\alpha + P_2 l\sin\alpha - R_1^И(H_1+b_2) - \Phi_2^И(H_2+b_2)}{(b_1+b_2)} =$$

$$= \frac{3\cdot 9{,}81\dfrac{0{,}5}{2}\sin 30^\circ + 2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5\sin 30^\circ - 13{,}5(1/6+0{,}2) - 18(0{,}25+0{,}2)}{0{,}6+0{,}2} = -11{,}8 \text{ Н};$$

$$X_B = -X_A - R_1^И - \Phi_2^И = 11{,}8 - 13{,}5 - 18 = -19{,}7 .$$

Значение полной реакции подпятника A определим как сумму её составляющих по формуле

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-11{,}8)^2 + 49{,}05^2} = \sqrt{2545} = 50{,}45\ \text{Н}.$$

Ответ: $X_A = -11{,}8$ Н; $Y_A = 49{,}05$ Н; $R_A = 50{,}45$ Н; $X_B = -19{,}7$ Н.

Знаки "−" указывают, что силы X_A и X_B направлены в сторону, противоположную показанным на рис. Д3.

3.3 Задания для самостоятельной работы

3.3.1 Задача Д1

Задача Д1 – задача, в которой рассматривается решение основной задачи динамики.

Груз D массой m, который получил в точке A начальную скорость v_0, движется в изогнутой трубе ABC, которая расположена в вертикальной плоскости; отрезки трубы или обе наклонные, или один участок горизонтальный, а другой наклонный (см. рис. Д1.0…Д1.9). На отрезке AB на груз кроме силы веса действуют постоянная сила $\vec{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила трения $\vec{F}_{TP}$, которая направлена против движения груза, и характеризуется коэффициентом трения f_{TP}.

В точке B груз, не меняя значения своей скорости, переходит на отрезок BC трубы, где на него кроме силы веса действует сила $\vec{R} = f(t)$, проекция которой R_X на ось x задана в табл. Д1. Трением груза о трубу на участке BC пренебречь.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = \ell$ или время τ движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на отрезке трубы BC, то есть функцию вида $x_{BC} = f(t)$.

Численные значения исходных данных к задаче приведенные в табл. Д1.

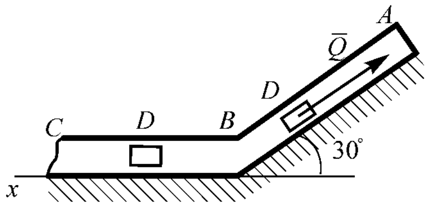


Рис. Д1.0

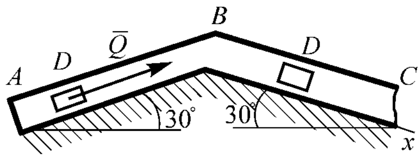


Рис. Д1.1

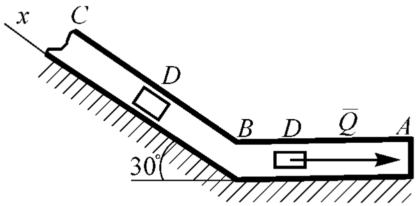


Рис. Д1.2

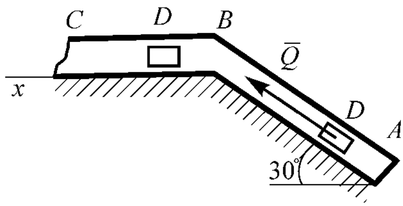


Рис. Д1.3

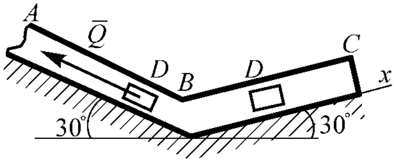


Рис. Д1.4

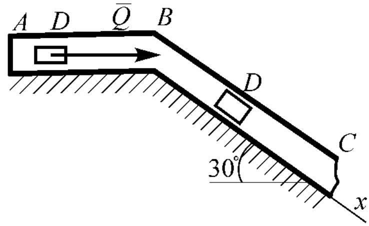


Рис. Д1.5

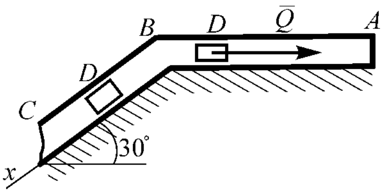


Рис. Д1.6

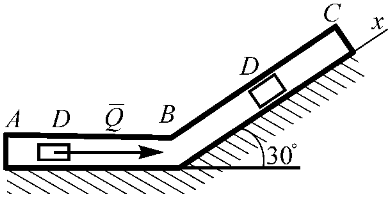


Рис. Д1.7

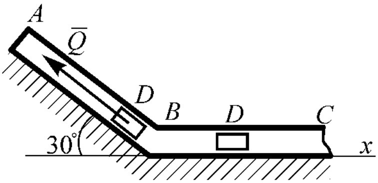


Рис. Д1.8

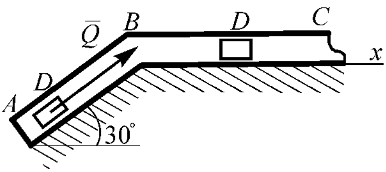


Рис. Д1.9

Таблица Д1. Численные данные к задача Д1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	f_{TP}	ℓ=|AB|, м	τ, с	R, Н
0	2,4	12	5	0,35	1,5	–	$4\sin(4t)$
1	2	20	6	0,42	–	2,5	$-5\cos(4t)$
2	8	10	16	0,11	4	–	$2\sin(2t)$
3	1,8	24	5	0,15	–	2	$-2\cos(2t)$
4	6	15	12	0,10	5	–	$-5\sin(2t)$
5	4,5	22	9	0,12	–	3	$3\cos(2t)$
6	4	12	10	0,20	2,5	–	$6\cos(4t)$
7	1,6	18	4	0,25	–	2	$-3\sin(4t)$
8	4,8	10	10	0,05	4	–	$4\cos(2t)$
9	3	22	9	0,17	–	3	$4\sin(2t)$

3.3.2 Задача Д2

Задача Д2 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Механическая система состоит из грузов *1* и *2* (коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$), цилиндрического сплошного однородного катка *3* и двухступенчатых шкивов *4* и *5* с радиусами ступеней $R_4 = 0{,}3$ м, $r_4 = 0{,}1$ м, $R_5 = 0{,}2$ м, $r_5 = 0{,}1$ м (массу каждого катка и шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу, см. рис. Д2.0…Д2.9, табл. Д2). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; отрезки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Под действием силы $F = f(s)$, которая зависит от перемещения точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы *4* и *5* действуют постоянные моменты сил сопротивлений, которые равны соответственно M_4 и M_5.

Используя теорему об изменении кинетической энергии системы, определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки, к которой приложена сила F, равна s_1. Искомая величина указана в столбце «Определить» табл. Д2, где обозначено: v_1 – скорость груза *1*, v_2 – скорость груза *2*, v_3 – скорость центра масс катка *3*, ω_4 – угловая скорость тела *4*, ω_5 – угловая скорость тела *5*.

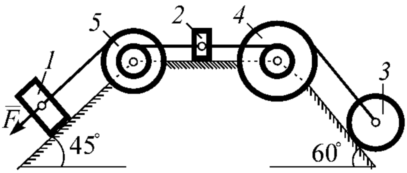


Рис. Д2.0

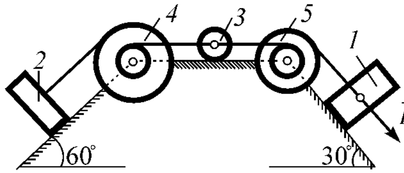


Рис. Д2.1

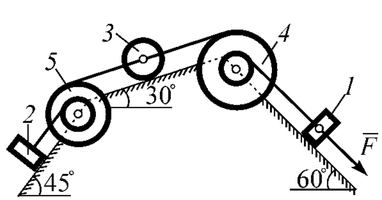


Рис. Д2.2

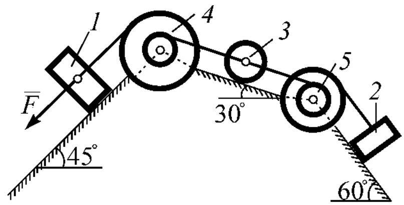


Рис. Д2.3

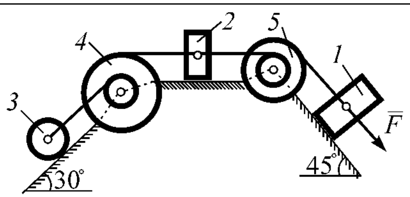


Рис. Д2.4

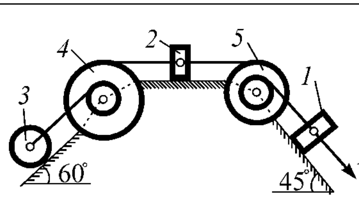


Рис. Д2.5

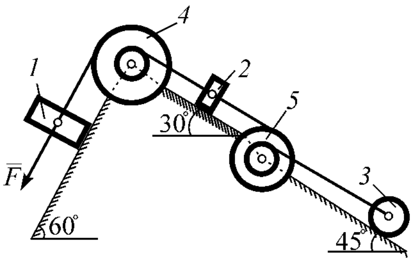


Рис. Д2.6

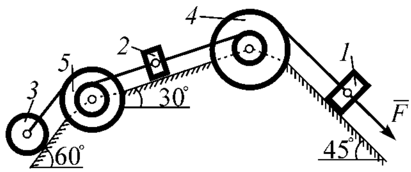


Рис. Д2.7

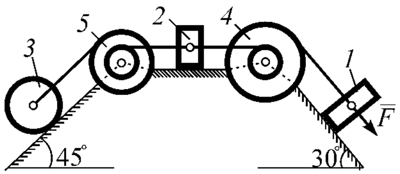


Рис. Д2.8

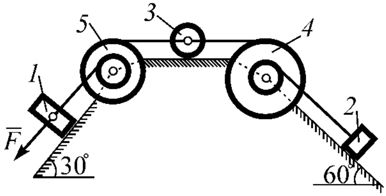


Рис. Д2.9

Таблица Д2. Численные данные к задаче Д2

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_4, Н·м	M_5, Н·м	$F = f(s)$, Н	s_1, м	Определить
0	2	0	4	6	0	0	0,8	50 (2 + 3s)	1,0	v_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	20 (5 + 2s)	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	80 (3 + 4s)	0,8	v_{C3}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	40 (4 + 5s)	0,6	v_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	30 (3 + 2s)	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	40 (3 + 5s)	1,6	v_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	60 (2 + 5s)	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	30 (8 + 3s)	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	40 (2 + 5s)	1,6	v_{C3}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	50 (3 + 2s)	1,4	v_2

3.3.3 Задача Д3

Вертикальный вал *AK* (см. рис. Д3.0…Д3.9), который вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке *A* и цилиндрическим подшипником в точке, которая указана в табл. Д3. К валу жестко прикреплен невесомый стержень *1* длиной $\ell_1 = 0{,}4$ м с точечной массой $m_1 = 6$ кг на конце и однородный стержень *2* длиной $\ell_2 = 0{,}6$ м, который имеет массу $m_2 = 4$ кг; оба стержня лежат в одной плоскости (в плоскости чертежа).

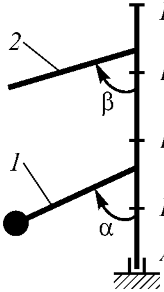


Рис. Д3.0

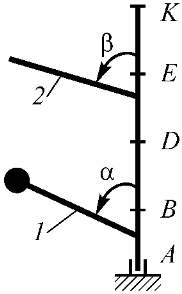


Рис. Д3.1

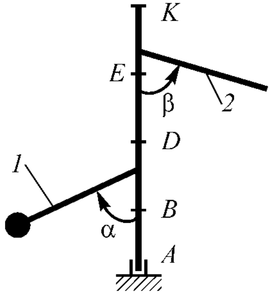


Рис. Д3.2

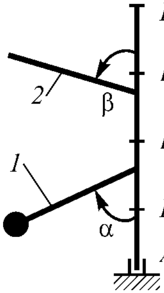


Рис. Д3.3

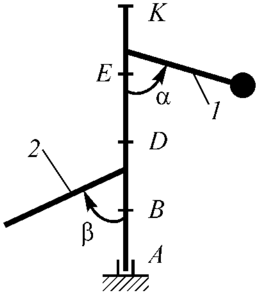


Рис. Д3.4

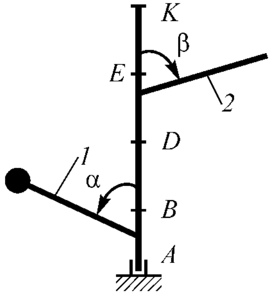


Рис. Д3.5

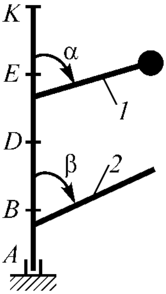


Рис. Д3.6

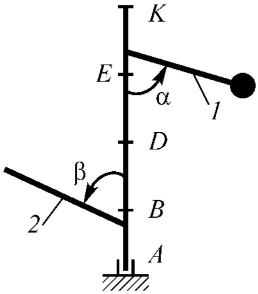


Рис. Д3.7

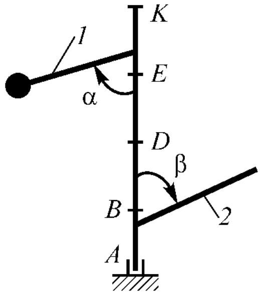


Рис. Д3.8

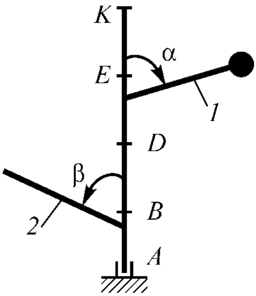


Рис. Д3.9

Точки крепления стержней к валу, а также углы α и β указаны в табл. Д3. Размеры отрезков вала $AB = BD = DE = EK = 0{,}4$ м.

Пренебрегая весом вала, применить принцип Даламбера и определить реакции подпятника и подшипника.

Таблица Д3. Численные данные к задаче Д3

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня *1* в точке	Крепление стержня *2* в точке	Углы		Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня *1* в точке	Крепление стержня *2* в точке	Углы	
				α	β					α	β
0	*B*	*D*	*K*	30°	45°	5	*D*	*K*	*B*	30°	45°
1	*D*	*B*	*E*	45°	60°	6	*E*	*B*	*K*	45°	30°
2	*E*	*D*	*B*	60°	75°	7	*K*	*E*	*B*	60°	75°
3	*K*	*D*	*E*	75°	30°	8	*D*	*E*	*K*	75°	60°
4	*B*	*E*	*D*	90°	60°	9	*E*	*K*	*D*	90°	45°

3.4 Критерии оценки работы студента на практическом занятии

Критерии работы студента на практическом занятии приведены в прил. А.

3.5 Рекомендованная литература

Для успешного освоения темы практического занятия необходимо проработать соответствующие разделы литературы [1]…[6].

Список использованной литературы

1. Учебное пособие по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки 44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям). В 3-х частях. Часть 1-я «Теоретическая механика». / Сост.: В.И.Сафонов. – Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ», 2021. – 139 с.
2. Кальмова М.А., Муморцев А.Н., Ахмедов А.Д. Техническая механика. Учебно-методическое пособие. – Самара: СГАСУ, 2016. – 144 с. − ISBN 978-5-9585-0664-4. Режим доступа: https://www.twirpx.com/file/2481640/
3. Атапин В.Г., Механика. Теоретическая механика : учебное пособие / Атапин В.Г. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. - 108 с. - ISBN 978-5-7782-3229-7 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778232297.html
4. Бандурин М.А., Скринников Е.В., Нефедов В.В., Михайлин А.А. Теоретическая механика. Учебно-методическое пособие. − Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова ЮРГПУ (НПИ), 2017. − 104 с. Режим доступа: https://www.twirpx.com/file/2515627/
5. Кухарь В.Д., Теоретическая механика : учебный справочник / Кухарь В.Д., Нечаев Л.М., Киреева А.Е. - изд. 2-ое, испр, доп. - М. : Издательство АСВ, 2016. - 148 с. - ISBN 978-5-4323-0161-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785432301615.html
6. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. − М.: Высшая школа, 1995. − 416 с.

Приложение А

Критерии оценки работы студента на практическом занятии

<table>
<tr><th colspan="2">Шкала оценивания</th><th>Критерий оценивания</th></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="3">Зачтено</td><td>Задание выполнено на высоком уровне (студент в полном объеме осветил рассматриваемую проблематику, привел аргументы в пользу своих суждений, владеет профильным понятийным (категориальным) аппаратом, понимает поставленную задачу и владеет теоретическим материалом для её решения, способен интерпретировать результаты полученных результатов и т.п.).</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Задание выполнено на среднем уровне (студент в целом осветил рассматриваемую проблематику, привел аргументы в пользу своих суждений, допустив некоторые неточности, понимает поставленную задачу, но в неполном объёме владеет теоретическим материалом для её решения и т.п.).</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Задание выполнено на низком уровне (студент допустил существенные неточности, изложил материал с ошибками, не владеет в достаточной степени профильным категориальным аппаратом, понимает поставленную задачу, но не владеет теоретическим материалом для её решения и т.п.).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Не зачтено</td><td>Задание выполнено на неудовлетворительном уровне или не представлен (студент не готов, не выполнил задание, не понимает поставленных задач и т.п.).</td></tr>
</table>

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям
по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»
для студентов направления подготовки
Профессиональное обучение (по отраслям),
профили: «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело»
(в 2-х частях). Часть 1. «Теоретическая механика»

С о с т а в и т е л ь:
Валентин Иванович Сафонов

Печатается в авторской редакции.
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать _______________
Формат 60х84$^{1}/_{16}$. Бумага типограф. Гарнитура Times
Печать офсетная. Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _______
Тираж 100 экз. Изд. №______. Заказ №______. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного
университета имени Владимира Даля

Свидетельство о государственной регистрации издательства
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015г.

Адрес издательства: 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60
E-mail: izdat.lguv.dal@gmail.com **http:** //izdat.dahluniver.ru/