МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Стахановский инженерно-педагогический институт менеджмента
Кафедра информационных систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

по дисциплине

«Высшая математика»

для студентов направления подготовки
Профессиональное обучение (по отраслям),
профилей «Информационные технологии и системы», «Экономика и управление», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Профессиональная психология», «Управление персоналом», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело»
(в 4-х частях). Часть 1.

Луганск 2023

УДК 514.123

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом
ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ»
(протокол № от . .2023 г.)

Методические указания к практическим работам по дисциплине «**Высшая математика**» для студентов направления подготовки **Профессиональное обучение (по отраслям)**, профилей **«Информационные технологии и системы», «Экономика и управление», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Профессиональная психология», «Управление персоналом», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело»** (в 4-х частях). Часть 1. / Сост.: А.П. Волков. – **Стаханов**: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2023. – 41 с.

Методические указания к практическим работам определяют планирование, организацию и проведение работ по учебной дисциплине «Высшая математика». Практические работы составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки. Представленные практические работы направлены на формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности.

Предназначены для студентов профилей «Информационные технологии и системы», «Экономика и управление», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Профессиональная психология», «Управление персоналом», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело».

Составитель: доц. Волков А.П.

Ответственный за выпуск: доц. Карчевский В.П.

Рецензент: доц. Черникова С.А.

СОДЕРЖАНИЕ

I Основы аналитической геометрии

В методических указаниях рассматриваются следующие вопросы.

Аналитическая геометрия на плоскости. Способы задания уравнения прямой на плоскости. Общее уравнение прямой. Различные формы уравнения прямой. Построение прямой по её уравнению. Некоторые задачи на прямую. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости. Различные формы уравнения плоскости. Точка пересечения трёх плоскостей. Различные задачи на плоскость.

1. Понятие о предмете аналитической геометрии.

В школьной (элементарной) геометрии изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играют подчинённую роль.

Аналитическая геометрия возникла из потребности создать единообразие средств для решения геометрических задач с тем, чтобы применить их к изучению важных для практики линий различной формы.

Эта цель была достигнута созданием координатного метода.

В нём ведущую роль играют вычисления. Построения же играют вспомогательное значение. Вследствие этого решение задач методом аналитической геометрии требует гораздо меньшей изобретательности.

2.Аналитическая геометрия на плоскости.

2.1.Способы задания прямой на плоскости.

Задать прямую – это значит сформулировать её уравнение. Определить положение прямой на плоскости можно различными способами, но в основе каждого из них лежат два условия:
- нужно задать точку на плоскости, через которую проходит прямая;
- нужно задать направление прямой.

1) Уравнение прямой проходящей через точку $Mo(x_0 ;y_0)$ перпендикулярно вектору нормали $\bar{n} = (A, B)$ к прямой.

Рассмотрим вывод этого уравнения. Пусть в системе координат OXY (рис.1) задана точка $Mo(x_0 ,y_0)$ и вектор $\bar{n} = (A, B)$

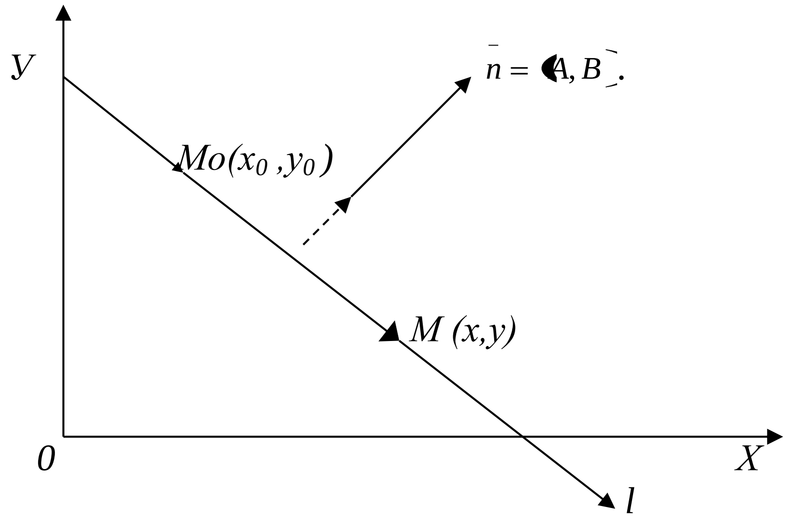


рис.1.

Проведём через точку M_0 прямую l перпендикулярную к вектору $\bar{n} = (A, B)$.

Берём на прямой l произвольную точку $M(x,y)$. Обозначим отрезок заключённый между точками M_0 и M вектором $\overline{M_0M}$. Этот вектор имеет координаты , равные $x - x_0$; $y - y_0$; т.е. $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Так как по условию векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_oM}$ взаимно перпендикулярны, то на основании свойства имеем

$$\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0 \qquad (1)$$

Это уравнение прямой в векторной форме.

Аналитическая геометрия оперирует с уравнениями, записанными в координатной форме. Для этого следует уравнение (1.) записать в координатной форме на основании выражения для скалярного произведения двух векторов заданных в координатной форме имеем:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (2.)$$

Это и есть уравнение искомой прямой. Ещё раз подчеркнём смысл входящих в уравнение обозначений.

A и B – это координаты вектора нормали к прямой $\bar{n} = (A; B)$.

x_0, y_0 - координаты точки M_0, через которую проходит прямая l

x, y –координаты произвольной точки, лежащей на прямой .

Пример 1.

Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (2;3.) перпендикулярно отрезку M_oN , если N (4;7.)

Представим геометрическую интерпретацию задачи (рис.2)

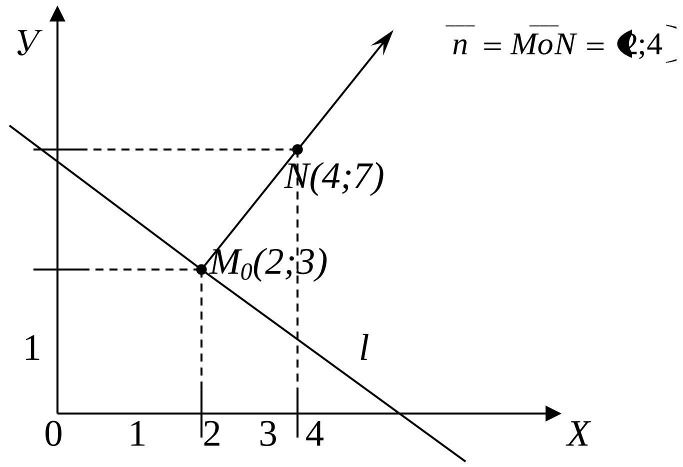


рис. 2

Выберем в системе координат единицу масштаба и нанесём в ней положения точек M_0 и N. Соединяя точки M_0 и N, получаем вектор нормали

$$\bar{n} = \overline{M_0N} = (4-2;7-3) = (2;4)$$

Проводим через точку $M_0(2.3)$ прямую перпендикулярную вектору $\bar{n}$. Это и будет искомая прямая.
Напишем её уравнение. Подставляя в формулу (2) координаты вектора нормали и координаты точки M_0, получим :
$2(x-2)+4(y-3)=0$
Преобразуем это уравнение
$2x-4+4y-12=0$ или
$2x+4y-16=0$ или $x+2y-8=0$ - уравнение искомой прямой.

2. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно вектору $\bar{S}=(m,n)$.
Геометрическая интерпретация этой задачи представлена на рис. 3.

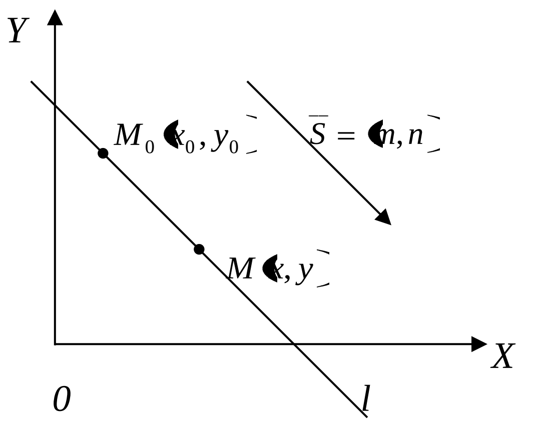


рис.3.

В системе координат задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\bar{S} = (m, n)$.

Проводим через точку M_0 прямую l параллельную вектору $\bar{S}$. Это и будет искомая прямая.

Возьмём на прямой l произвольную точку $M(x, y)$. Обозначим отрезок $M_o M$ вектором $\overline{MoM}$. Его координатами будут $x - x_0; y - y_0$, т.е. $\overline{MoM} = (x - x_0; y - y_0)$. Так как векторы $\overline{MoM}$ и $\bar{S}$ параллельны, то имеем :

$$\overline{MoM} * \bar{S} = 0 \qquad (3)$$

Это есть уравнение искомой прямой, записанное в векторной форме.

Представим уравнение в координатной форме для чего запишем условие пропорциональности координат векторов $\overline{MoM}$ и $\bar{S}$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \qquad (4)$$

Пример 2

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,4)$ параллельную прямой проходящей через точку $M_1(5;9)$ и $M_2(3;8)$

Геометрическая интерпретация задачи показана на рис.4

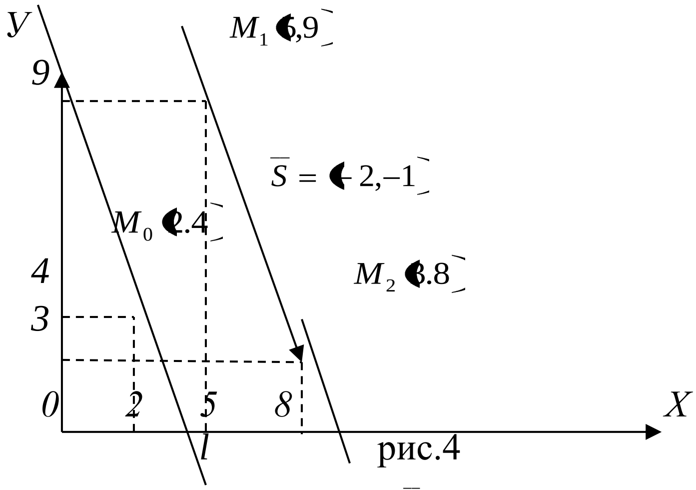


рис.4

Координаты направляющего вектора $\bar{S}$ найдём по координатам конца и начала вектора $\overline{M_1M_2}$ $m = 3 - 5 = -2$; $n = 8 - 9 = -1$.

Подставляя в формулу 4 координаты точки $M_0(2.4)$ и координаты вектора $\bar{S} = (-2,-1)$ получим искомое уравнение прямой

$$\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 4}{-1}; \text{или } x - 2 = 2(y - 4)$$

Окончательно $x - 2y + 6 = 0$

3. Уравнение прямой проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 5)

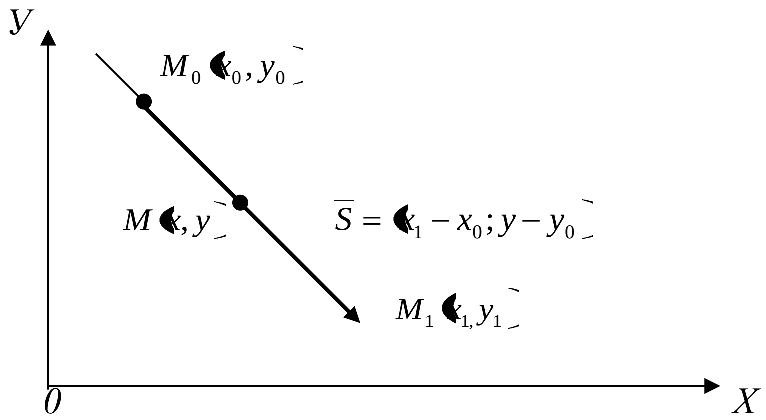


рис. 5

Для формулировки уравнения прямой соответствующей заданным условиям применим формулу (4)

В этом случае направляющий вектор $\overline{s}$ совпадает с вектором $\overline{M_0M_1}$.

Уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}; \qquad (5)$$

Уравнение (5) можно представить в виде определителя 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} x - x_0; y - y_0 \\ x_1 - x_0; y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Пример 3.

Составить уравнение прямой, проходящей через точки (1;5) и (3;9)

Подставив в формулу (5) координаты заданных точек, получим :

$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-5}{9-5}$;или $4(x-1) = 2(y-5)$ или $2(x-1) = y-5$

окончательно имеем $2x - y + 3 = 0$

Формула (6) даёт:

$\begin{vmatrix} x-1; y-5 \\ 3-1; 9-5 \end{vmatrix} = 0$ или $(9-5)(x-1) - (3-1)(y-5) = 0$ или $4(x-1) - 2(y-5) = 0$

отсюда снова находим $2x - y + 3 = 0$

Замечание: В случае, когда $x_1 = x_0$ ($или. y_1 = y_0$) один из знаменателей равенства (5) равен нулю. Тогда уравнение (5) надо понимать в том смысле, что соответствующий числитель равен нулю.

Пример 4.

Составить уравнение прямой проходящей через точки (4;-2) и (4;5).

Уравнение (5)запишется в виде: $\frac{x-4}{0} = \frac{y+2}{7}$;

Здесь знаменатель равен нулю.

Понимая это уравнение в выше указанном смысле полагаем числитель левой части равным нулю.

Получаем $x - 4 = 0$

Тот же результат получим применяя формулу(.6)

Эта формула даёт $\begin{vmatrix} 0; \ldots\ldots\ldots .7 \\ x-4; y-2 \end{vmatrix} = 0$

Т.е. $0(y-2)-7(X-4)=0$, т.е. $X-4=0$

3. <u>Общее уравнение прямой</u>

Уравнение $Ax+By+C=0$ (7)

где А, В, С могут иметь любые значения, лишь бы коэффициент А и В не были нулями оба сразу представляет прямую линию. Всякую прямую можно представить уравнением этого вида. Поэтому его называют общим уравнением прямой. Выясним смысл постоянных, входящих в уравнение для чего уравнение (.2) приведём к виду(7)

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

$Ax-Ax_0+By-By_0=0$ или

$Ax+By-Ax_0-By_0=0$

Полагая $-Ax_0-By_0=C,$ получаем

$$Ax+By+C=0.$$

Из этого преобразования ясен смысл постоянных *А и В* в общем уравнении прямой, а именно *А и В* являются координатами вектора нормали к прямой.

Исследуем общее уравнение прямой.

$A\neq 0; B\neq 0, C=0.$

$Ax+By=0,$ т.е. при $x=0\rightarrow y=0$. Это прямая, проходящая через начало координат (рис. 6)

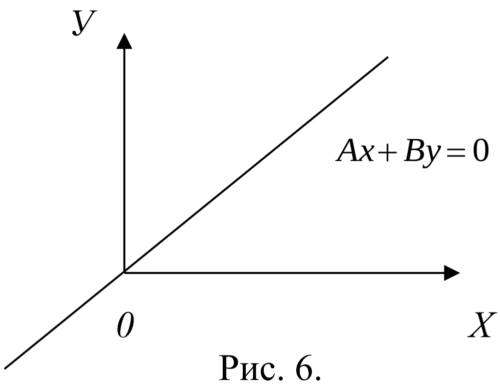


Рис. 6.

3.3.2. $A\neq 0; C\neq 0, B=0.$

$Ax+C=0\rightarrow X=-\dfrac{C}{A}$ полагая $-\dfrac{C}{A}=C_1$ получаем $X=C_1$ - это уравнение прямой параллельной оси ординат (оси *ОУ*) (рис 7)

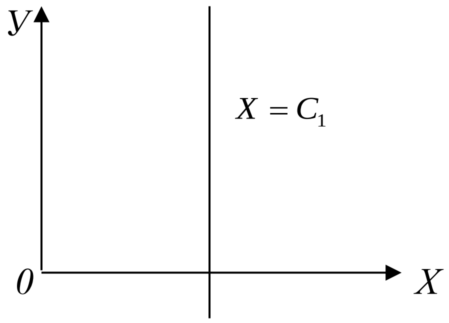


Рис. 7

3.3.3. $B \neq 0; C \neq 0, A = 0.$

$By + C = 0 \rightarrow y = -\dfrac{C}{B};$ полагая $-\dfrac{C}{B} = C_2$, получим $y = C_2$ - это уравнение прямой параллельной оси абсцисса (оси *OX*), (рис.8.)

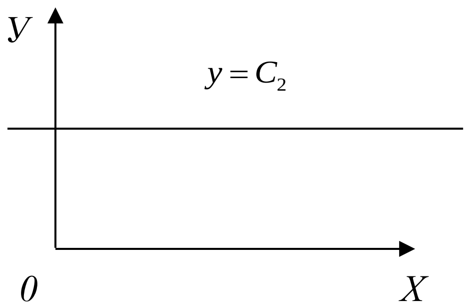


рис. 8.

3.3.4. $A = 0; C = 0, B \neq 0.$ $By = 0 \rightarrow y = 0$ - уравнение оси абсцисс (оси *OX*)

$B = 0; C = 0, A \neq 0.$ $A \neq 0. Ax = 0 \rightarrow X = 0$ - уравнение оси ординат (оси *OУ*)

Пример 4.

1. Написать уравнение прямой, отсекающей начальную ординату $в = 3$ параллельной оси *OX*. Уравнение искомой прямой $y = 3$
2. Какую линию представляет уравнение $3x + 5 = 0$?

Разрешая данное уравнение относительно x, получим $x = -\dfrac{5}{3}$. Уравнение представляет прямую, параллельную оси *OУ* и лежащую слева от неё на расстоянии $\dfrac{5}{3}$ (рис.8)

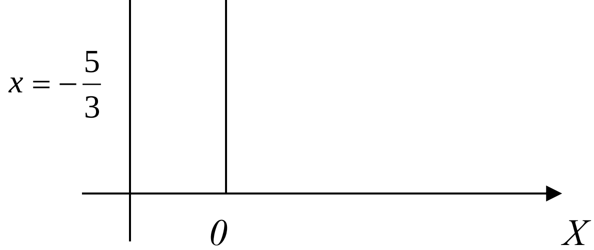


рис.8.

различные формы уравнения прямой

При решении задач аналитической геометрии иногда удобно представлять уравнение прямой или в форме уравнения с угловым коэффициентом или в форме уравнения прямой в отрезках.

<u>Уравнение прямой, разрешённое относительно ординаты (уравнение прямой с угловым коэффициентом).</u>

Выразим из общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ её ординату

$y=-\frac{A}{B}\cdot x-\frac{C}{B}$;

Обозначим $-\frac{A}{B}=\kappa$; $-\frac{C}{B}=в$ тогда $y=\kappa x+в$ (8)

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Здесь $\kappa=tg\alpha$ -угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс. *в*- отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат (рис.9.)

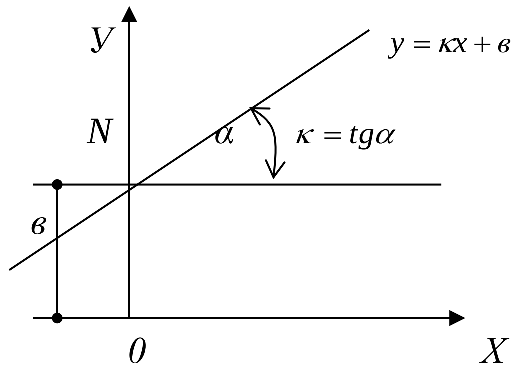


рис. 9

Число в положительно или отрицательно в зависимости от направления отрезка *ON*. Если прямая проходит через начало координат, то *в=0.*

Если точка $M_0(x_0,y_0)$ лежит на прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению (8), т.е. $y_0=\kappa x_0+в$

Отсюда $в=y_0-\kappa x_0$

Подставляя это значение в уравнение (8.), получаем ещё одну форму уравнения прямой с угловым коэффициентом которая проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$

Это уравнение имеет вид:

$$y-y_0=\kappa(x-x_0) \qquad (9)$$

Пример 5.

Написать уравнение прямой, образующей с осью *OX* угол α=-45*и отсекающей ординату *в=-3.*

Угловой коэффициент прямой $\kappa=tg(-45^\circ)=-tg45^\circ=-1.$

Искомое уравнение есть $y=-x-3.$ (рис.10)

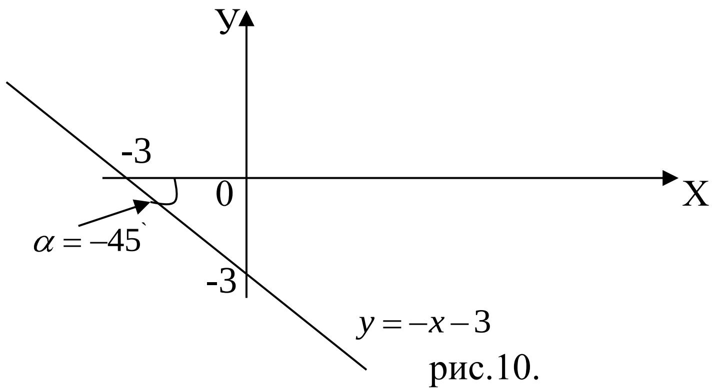


рис.10.

Уравнение прямой в отрезках

Запишем общее уравнение прямой в виде $Ax+By=-C$

При $C\neq 0$, разделив уравнение на –С, получим $-\frac{A}{C}\cdot X-\frac{B}{C}y=1$

Положим $-\frac{A}{C}=\frac{1}{P}$; $-\frac{B}{C}=\frac{1}{q}$ получим

$$\frac{X}{P}+\frac{y}{q}=1 \qquad (10.)$$

Это уравнение прямой в отрезках здесь p и q – отрезки отсекаемые прямой на оси X и $У$ соответственно.

Действительно, полагая $x=0$, получаем $\frac{7}{q}=1$ или $y=q$ Полагая $y=0\rightarrow x=P$

Пример 6.

Найти уравнение прямой $3x-2y+12=0$ в отрезках.

Выражаем заданное уравнение в форме (10), выполнив следующие преобразования:

$3x-2y=-12 \qquad \frac{3}{-12}x-\frac{2}{-12}y=1$

или $\frac{x}{\frac{-12}{3}}+\frac{y}{\frac{12}{2}}=1$ или $\frac{x_1}{-4}+\frac{y}{6}=1$

Искомая прямая отсекает на оси абсциссе отрезок, равный -4 и на оси ординат – отрезок равный 6.

Построение прямой по её уравнению

Для построения прямой достаточно отметить две её точки. Если прямая задана в форме общего уравнения, наиболее удобно строить прямую по отрезкам, отсекаемым прямой на осях. Чтобы не преобразовывать заданное уравнение к форме уравнения прямой в отрезках (10) проще делать так:

Для разыскания отрезка $OL=p$ (рис.11)отсекаемого прямой l на оси абсцисс. достаточно в уравнении прямой положить $y=0$ и решить уравнение относительно x. Аналогично ищется отрезок $ON = q$ на оси ординат. Значения P, qмогут быть как положительными, так и отрицательными. Если прямая параллельна одной из оси, то соответствующий отрезок не существует (обращается в бесконечность). Если прямая проходит через начало координат, то каждый отрезок вырождается в точку $\left(p = q = 0\right)$

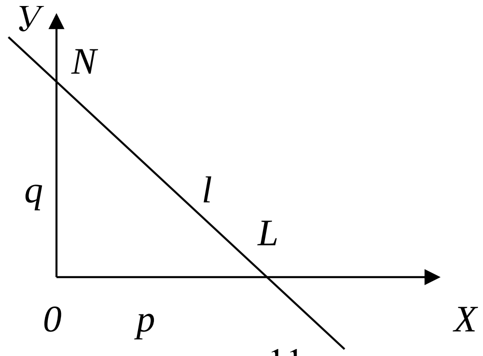


рис.11

Пример 7.
Построить прямую заданную уравнением $3x - 2y + 12 = 0$
Найдём отрезки, отсекаемые на осях .
Полагаем $x = 0$и из уравнения $-2y + 12 = 0$находим $y = 6$.
Полагая $y = 0$, из уравнения $3x + 12 = 0$ находим $X = -4$. Итак $p = -4$; $q = 6$
.Строим прямую выбрав единицу масштаба (рис.12)

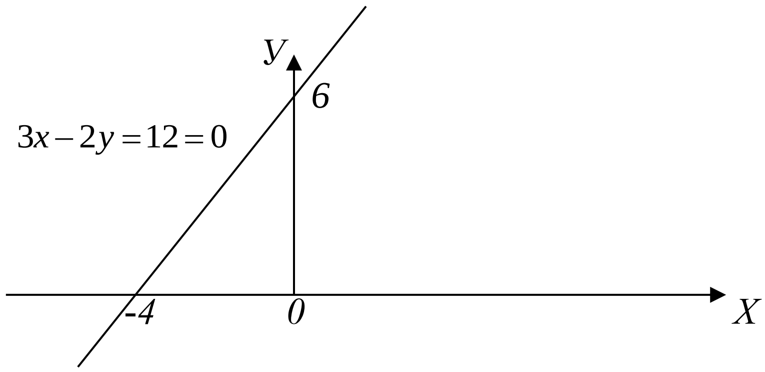


рис. 12

Некоторые задачи на прямую.
Угол между двумя прямыми
пусть две прямые l_1 и l_2,(взятые в данном порядке) заданы в форме общего уравнения.
$1^я$-прямая-l_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$
$2^я$-прямая-l_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$
Под углом θ между прямыми понимается наименьший угол, на который нужно повернуть прямую l_1 против хода стрелки часов до совмещения с прямой l_2 (рис.13)

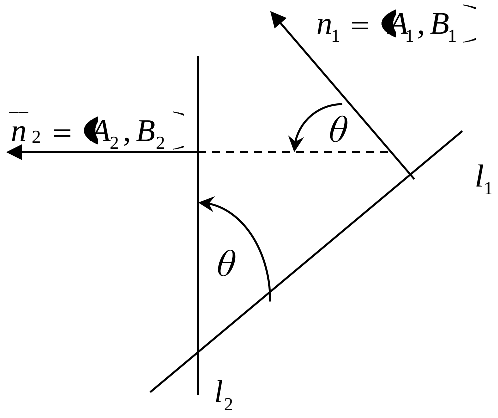


рис.13.

Угол θ между прямыми l_1 и l_2 - это угол между нормалями $\overline{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\overline{n}_2 = (A_2, B_2)$ к этим прямым.

Этот угол определяется из скалярного произведения векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$.

$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = n_1 \cdot n_2 \cdot Cos\theta$

Отсюда $Cos\theta = \dfrac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{n_1 \cdot n_2}$; (11)

Поскольку векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ заданы в координатной форме, то формула (11) будет иметь вид:

$$Cos\theta = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (12)$$

Пример 8

Найти угол между прямыми $y = 2x - 3$ и $y = -3x + 2$

Запишем уравнение прямых в форме общего уравнения

$2x - y - 3 = 0$

$3x + y - 2 = 0$

Векторы нормали к заданным прямым соответственно равен $\overline{n}_1 = (2, -1)$;

$\overline{n}_2 (3, 1)$

По формуле (12) имеем:

$Cos\theta = \dfrac{2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

отсюда $\theta = 45^\circ$. Это значит, что прямая $y = 2x - 3$ (*АВ* на рис.14) повернётся на угол + 45° около точки *М* пересечения прямых и совместится с прямой $y = -3x + 2$ (*СД* на рис. 14)

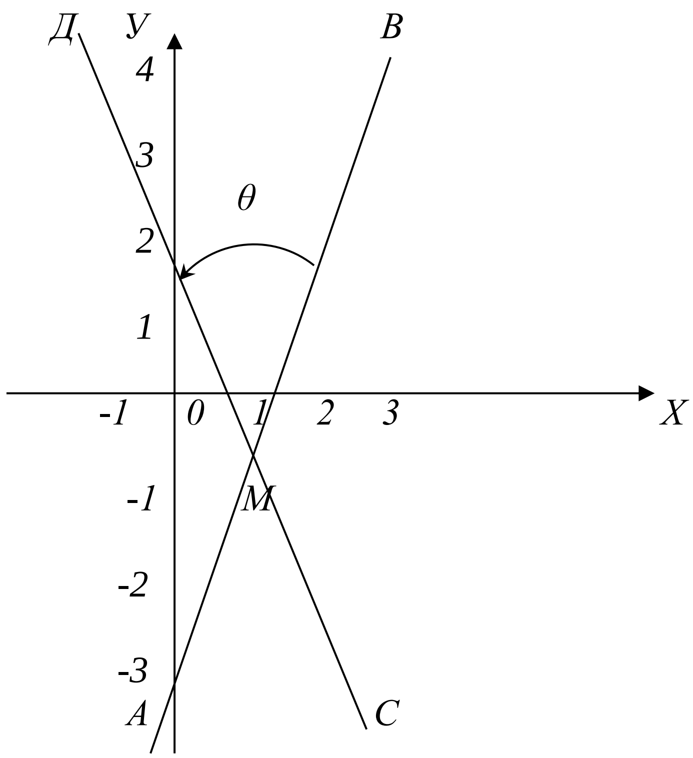


рис.14

Если прямые заданы в форме уравнения с угловым коэффициентом, т.е.

$l_1 : y = \kappa_1 x + b_1$
$l_2 : y = \kappa_2 x + b_2$ то применяется обычно формула для тангенса угла между прямыми, которая имеет вид:

$$tg\theta = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1 \cdot \kappa_2} \qquad (13)$$

Пример 9

Вычислить угол между прямыми $y = 2x - 3$ и $y = -3x + 2$ по формуле 13.

В уравнениях заданных прямых угловые коэффициенты имеют следующие значения:

$\kappa_1 = 2$; $\kappa_2 = -3$.

$$tg\theta = \frac{-3-2}{1+2(-3)} = 1 \qquad \theta = +45^{`}$$

Получен тот же результат, что и в примере 8.

Условие параллельности прямых

Условие параллельности прямых определяется условием параллельности их нормальных векторов (рис.15)

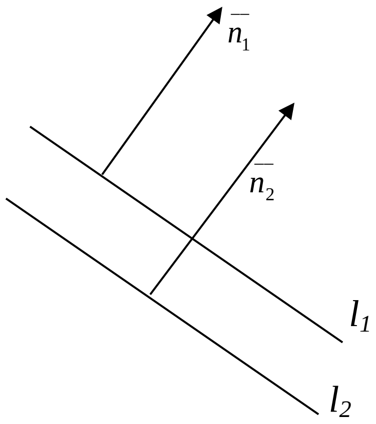


рис.15

Условием параллельности векторов есть $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0$ или в координатной форме

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \qquad (13)$$

В такой форме формулируется условие параллельности прямых, если они заданы в форме общего уравнения, т.е.

прямая l_1 уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0,$

прямая l_2 уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0,$

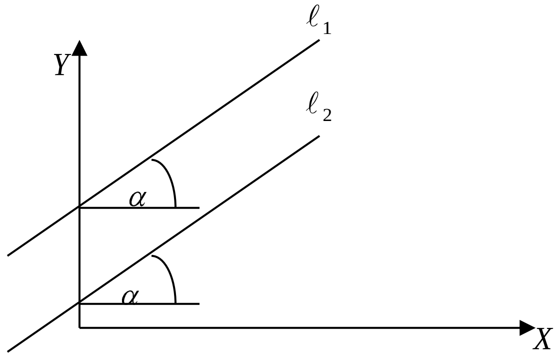
Если прямые заданы уравнением

$$y = \kappa_1 x + в_1$$

$$y = \kappa_2 x + в_2, \text{ то}$$

условие параллельность их состоит в равенстве угловых коэффициентов (рис.16)

$$K_1 = K_2 \qquad (14)$$



$\kappa_1 = tg\alpha.$

$\kappa_2 = tg\alpha.$

$K_1 = K_2$

рис.16

Пересечение прямых.

Для разыскания точки пересечения 2-х прямых, надо решить систему уравнений.

Если прямые заданы в форме общего уравнения

$A_1x+B_1y+C_1=0$
$A_2x+B_2y+C_2=0$ или в любой другой форме, то решается система 2-х уравнений.
Если система имеет единственное решение, то в результате решения мы получаем координаты точки.
Замечание
Если заданные прямые параллельны и не совпадают, система решения не имеет, если совпадают, система имеет бесконечное множество решений.
Пример 10
1. Найти точку пересечения прямых $y=2x-3$ и $y=-3x+2$

Решаем систему уравнений
$$\begin{cases} y-2x+3=0 \\ y+3x-2=0 \end{cases}$$
$$-5x+5=0 \to X=1$$
$y=2-3=-1.$
Прямые пересечены в точке (1;-1)
2. Прямые $2x-7y+12=0$ и $x-3.5y+10=0$ параллельны, но не совпадают.
   Действительно имеет $\frac{2}{1}=\frac{7}{3.5}=2$; но $\frac{12}{10}\neq 2$

Система решения не имеет.
3. Прямые $3x+2y-6=0$ и $6x+4y-12=0$ совпадают, т.к. отношения всех коэффициентов одинаковы $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{6}{12};$ система имеет бесчисленное множество решений.

Условие перпендикулярности двух прямых.
Условие перпендикулярности двух прямых определяется условием перпендикулярности их векторов нормалей (рис. 17)

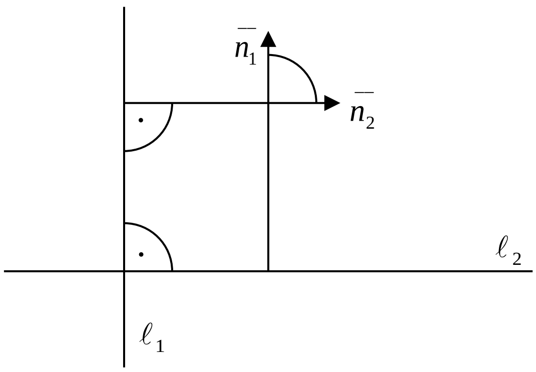


рис. 17
Это условие в векторной форме имеет вид
$\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2=0$ или в координатной форме $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$ (15)
Это условие перпендикулярности прямых, если они заданы в форме общего уравнения.

Если прямые заданы уравнениями

$y = \kappa_1 x + в_1$

$y = \kappa_2 x + в_2$,

то условие их перпендикулярности имеет вид $\kappa_1\kappa_2 + 1 = 0$ или $\kappa_2 = -\dfrac{1}{\kappa_1}$; (16)

<u>Пример 11</u>

1. Прямые $2x + 5y = 8$ и $5x - 2y = 3$ перпендикулярны. Действительно, здесь $A_1A_2 + B_1B_2 = 10 - 10 = 0.$
2. Прямые $y = 3X$ и $y = -\dfrac{1}{3}X$, перпендикулярны, т.к. $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 3 \cdot (-\dfrac{1}{3}) = -1.$

   или $\kappa_2 = -\dfrac{1}{\kappa_1}$;

<u>2.2. Расстояние от точки до прямой</u>

Пусть прямая ℓ задана в форме общего уравнения $Ax + By + C = 0.$ Нужно определить расстояние от заданной точки *Mo(x₀ ,y₀)* до этой прямой (обозначим его d) (рис. 18)

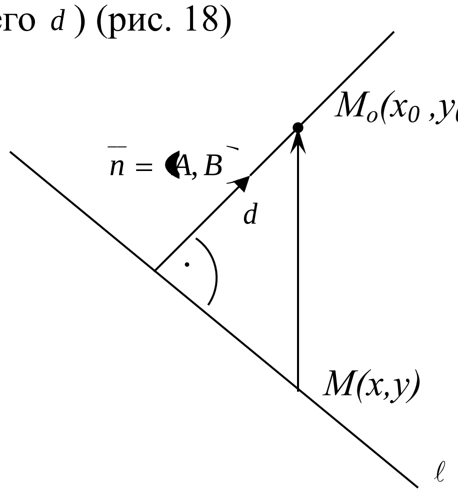


рис. 18

Расстояние d есть длинна перпендикуляра опущенного из точки M_0 на прямую . С этим перпендикуляром совпадает вектор нормали прямой $\overline{n} = (A, B)$. Возьмём на прямой ℓ произвольную точку *M(x,y)* , соедeним её с точкой M_0 вектором $\overline{MM_0}$. Проекция этого вектора на направление нормали и даст расстояние d .

$$d = np\,\overline{MM}_0 = \frac{\overline{n} \cdot \overline{MM}_0}{n}$$

$$\overline{n} \cdot \overline{MM}_0 = A(x_0 - x) + B(y_0 - y)$$

$$n = \sqrt{A^2 + B^2};$$

или $d = \dfrac{A(x_0 - x) + B(y_0 - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{Ax_0 + By_0 \overbrace{- Ax - By}^{C}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}};$

Полученное выражение нужно взять по абсолютной величине, т.к. точка может быть расположена по разные стороны от прямой и d будет иметь разные знаки. Т.к. нас интересует только величина расстояния, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (17)$$

Пример 12

Найти расстояние от точки *M_0(-1;1)* до прямой $3x - 4y + 5 = 0$

$$d = \frac{3x_0 - 4y_0 + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3\cdot(-1) - 4\cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Содержание: Координаты точки на плоскости. Расстояние между двумя точками.

На первых двух практических занятиях мы будем решать задачи, связанные с применением первоначальных формул аналитической геометрии на плоскости. Сюда относятся такие задачи:

1) определение расстояния между двумя точками на плоскости;
2) деление отрезка прямой в заданном отношении;
3) определение площади треугольника по координатам его вершин.

На этом и последующих практических занятиях по аналитической геометрии будут применяться только две системы координат: прямоугольная система на плоскости и в пространстве и полярная.

Когда в условии задачи будет сказано «дана точка», то это значит, что координаты точки известны. Если же в задаче будет поставлено требование «найти точку», то это означает, что следует определить ее координаты.

Фраза «дан отрезок прямой» означает, что координаты концов этого отрезка известны. Если известны координаты концов отрезка прямой, то тем самым положение отрезка на плоскости вполне определено. Координаты точки записываются в скобках рядом с названием точки, причем всегда на первом месте в прямоугольной системе координат записывается абсцисса точки, а повтором—ее ордината. Например, если x^1 — абсцисса точки А, а ее ордината, то это записывается так; А (x^1, y^2).

У точки, лежащей на оси абсцисс, ордината равна нулю; у точки, лежащей на оси ординат, абсцисса равна нулю. Обе координаты начала координат равны нулю.

Задача 1. 16. Отрезок *АВ* соединяет точки *А* (—6, 7) и В(1,—2). Определить длину этого отрезка и угол между ним и положительным направлением оси О*x*.

Решение. По формуле (1.1), полагая в ней x_1 = - *6,* x_2 =1, y_1 = 7, y_2 = -2, получаем, что длина *АВ*^. 11,4 ед. масштаба (знак ≈ означает, что имеет место приближенное равенство. Теперь по формуле (1,2) находим угловой коэффициент отрезка *AB:* tg φ = - $\frac{9}{7}$.

Перепишем это равенство в виде — tg φ =- $\frac{9}{7}$. Отсюда следует, что tg (180- φ) = 1,2857, и по таблицам найдем, что φ = 127°52'.

Задача 1,17 (для самостоятельного решения). Найти длину отрезка AB, соединяющего точки A(—4, 5) и *B(*—6, 7) и угол между этим отрезком и положительным направлением оси *Ox*.

Ответ. *AB* = $\overline{8}$ ед. масштаба; φ = 135°.

Задача 1, 18. Найти периметр треугольника, если координаты его вершин известны: A(—3, —6); B(4, —1); C (5. —2).

Ответ. AB ≈ 8,6 ед. масштаба;

AC ≈ 8,9 ед. масштаба;

BC ≈ 1,4 ед. масштаба;

периметр треугольника AB+ *AC* + BC = 8,6+8,9+ 1,4= 18,9 ед. масштаба.

Задача 1, 19 (для самостоятельного решения). Найти периметр треугольника с вершинами A (1, 3), *B* (4, 5), C(—5, —7).

Ответ. Периметр треугольника приближенно равен 30,3 ед. масштаба.

Задача 1,20. Доказать, что треугольник, вершины которого A (2, 3); B (6, 7); C(—7, 2)—тупоугольный.

Решение. 1) Определяем длины сторон и находим, что

AB = $\overline{32}$ ед. масштаба;

AC = $\overline{82}$ ед. масштаба,

BC = $\overline{194}$ ед. масштаба.

Значит, $BC^2 > AB^2 + AC^2$ (194 > 32+82); треугольник действительно тупоугольный.

Замечание. Из элементарной геометрии известно что если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник — прямоугольный; если квадрат большей стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других сторон, то треугольник — остроугольный; если же квадрат большей из сторон треугольника больше суммы квадратов двух других сторон, то треугольник — тупоугольный. Пользуясь этим замечанием, решить следующую задачу.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Содержание: Деление отрезка в заданном отношении. Координаты середины отрезка. Определение площади треугольника по известным координатам его вершин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Если x_1 и y_1 —координаты точки A, а x_2 и y_2 —координаты точки B, то координаты x и y точки C. делящей отрезок AB в отношении

$\gamma = \frac{AC}{CB}$ определяются по формулам

$$x = \frac{x1+\gamma x2}{1+\gamma},\ y = \frac{y1+y2}{2} \qquad (2,1)$$

Если γ **= 1,** то точка C (x, y) делит отрезок AB пополам, и тогда координаты x и y средины отрезка AB определятся **по** формулам

$$x = \frac{x1+x2}{2}, \qquad y = \frac{y1+y2}{2} \qquad (2,2)$$

2. Площадь треугольника по известным координатам его вершин A (x_1, y_1), **B** (x_2, y_2), **C** (x_3, y_3), вычисляется по формуле

$$\mathbf{S = \frac{1}{2}\,[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)].} \qquad (2.3)$$

Полученное с помощью этой формулы число следует взять **по** абсолютной величине.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Содержание: Различные виды уравнения прямой. Исследование общего уравнения прямой. Построение прямой по ее уравнению.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В прямоугольных координатах уравнение прямой на плоскости задается в одном из следующих видов;

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b \qquad (3,1)$$

где k — угловой коэффициент прямой, т. е. тангенс того угла, который прямая образует с положительным направлением оси *Ox,* причем этот угол отсчитывается от оси *Ox* к прямой против часовой стрелки, b—величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. При b = 0 уравнение (3,1) имеет вид $y = kx$, и соответствующая ему прямая проходит через начало координат.

Уравнением (3, 1) может быть определена любом прямая на плоскости, но перпендикулярная оси *Ox.*

Уравнение прямой с угловым коэффициентом разрешено относительно текущей координаты *y.*

2. *Общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3,2)$$

Частные случаи общего уравнения прямой:

а) Если $C = 0$, уравнение (3,2) будет иметь вид

$$Ax + By = 0$$

и прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат, так как координаты начала координат x = 0. y = 0 удовлетворяют этому уравнению.

б) Если в общем уравнении (3,2) B = 0, то уравнение примет вид

$$Ax + C = 0, \text{ или } x = -\frac{C}{A}$$

Уравнение не содержит переменной *у,* а определяемая этим уравнением прямая параллельна оси *Оу.*

в) Если в общем уравнении прямой (3,2) *А = 0,* то это уравнение примет вид

$$By + C = 0, \text{ или } y = -\frac{C}{B}$$

уравнение не содержит переменной *х,* а определяемая им прямая параллельна оси *Ох.*

Следует запомнить: если прямая параллельна какой-нибудь координатной оси, то в ее уравнении отсутствует член, содержащий координату, одноименную с этой осью.

г) При C = 0 и A = 0 уравнение (3, 2) принимает вид By = O, или y = 0. Это уравнение оси Ox.

д) При C = 0 и B=0 уравнение (3,2) запишется в виде Ax= 0 или x = 0. Это уравнение оси Ox

. 3. Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3,3)$$

где a—величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox\

b—величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Каждый из этих отрезков отложен от начала координат.

Особенности этого уравнения такие: в левой части уравнения между дробями стоит знак плюс, величины а и Ь могут быть как положительными, так и отрицательными, правая часть уравнения равна единице.

4. Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha + \sin\alpha - p = 0. \qquad (3,4)$$

Здесь p—длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, измеренная в ед. масштаба, а α — угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox. Отсчитывается этот угол от оси Ox против часовой стрелки. Для приведения общего уравнения прямой (3,2)

к нормальному виду обе его части надо умножить на нормирующий множитель.

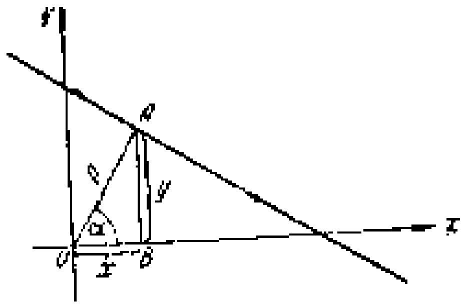
$$N = \pm\frac{1}{A^2+B^2} \qquad (3,5)$$

причем перед дробью следует выбрать знак, противоположный знаку свободного члена С в общем уравнении прямой (3.2).

Особенности нормального уравнения прямой: сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице, свободный член отрицателен, а правая часть его равна нулю.

Задача 3,16. Привести к нормальному виду уравнение прямой

$5x - 12y + 26 = 0$



Ответ. $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$

Из сравнения с уравнением (3,4) видим, что p = 2, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

Задача 3,17 (для самостоятельного решения). Уравнение прямой 7х + у — 3 =0 привести к нормальному виду.

Ответ: $\frac{7}{5\sqrt{2}}x + \frac{1}{5\sqrt{2}}y - \frac{3}{5\sqrt{2}} = 0,$

$p = \frac{3}{5\sqrt{2}}$

$$\cos\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Задача 3, 18 (для самостоятельного решения). Привести к нормальному виду уравнение прямой bx—8у—15=0.

14 ' ^

Ответ. $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1.5 = 0; p = 1.5; \cos\alpha = \frac{3}{5}; \sin\alpha = -\frac{3}{5}$

Задача 3,19. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую 3х - 6у + 5 = О, а также координаты основания этого перпендикуляра.

Решение. Приведем данное уравнение к нормальному виду:

$$N = -\frac{1}{\overline{3^2 + 6^2}}, \quad N = -\frac{1}{\sqrt{45}} = -\frac{1}{3\sqrt{5}}$$

После умножения на нормирующий множитель уравнение примет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{\sqrt{5}}{3} = 0$$

Из сравнения с (3,4) заключаем, что $p = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Для определения координат основания этого перпендикуляра из фиг. 3, 9 получим формулы

$$x = p\cos\propto, \qquad y = p\sin\propto$$

(эти формулы верны при любом расположении прямой относительно координатных осей).

Как видно из уравнения (3,4), $\cos\propto = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\propto = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и искомые координаты основания перпендикуляра равны

$$x = -\frac{1}{3}, \ y = \frac{2}{3}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Содержание: Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Определение точки пересечения двух прямых.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку А (x_1 , y_1) в данном направлении, определяемом угловым коэффициентом k,

$$y - y1 = k(x - x1) \qquad (4, 1)$$

Это уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку А (x_1 , y_1), которая называется центром пучка.

2. Уравнение прямой, проходящей через две точки: А (x_1 , y_1) и В (x_2 , y_2). записывается так:

$$\frac{y-y1}{y2-y1} = \frac{x-x1}{x2-x1} \qquad (4.2)$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

$$k = \frac{y2-y1}{x2-x1} \qquad (4.3)$$

3. Углом между прямыми а и Ь называется угол, на который надо повернуть первую прямую а вокруг точки пересечения этих прямых против движения часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой Ь.

Если две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$\mathbf{y = k1x + b1}.$$
$$\mathbf{y = k2x + b2} \qquad (4,4)$$

Т

то угол между ними 0 определится по формуле

$$\mathbf{tg0} = \frac{\mathbf{k2-k1}}{\mathbf{1+k1k2}} \qquad (4,5)$$

Следует обратить внимание на то, что в числителе дроби из углового коэффициента второй прямой вычитается угловой коэффициент первой прямой.

Если уравнения прямых заданы в общем виде

$$A1x + B1y + C1 = 0,$$

$$A2x = B2y + C2 = 0 \qquad (4,6)$$

угол между ними определяется по формуле

$$tg0 = \frac{A1B2 - A2B1}{A1A2 + B1B2} \qquad (4,7)$$

4. Условия параллельности двух прямых:

а) Если прямые заданы уравнениями (4, 4) с угловым коэффициентом, то необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в равенстве их угловых коэффициентов:

$$k1=k2 \qquad (4,8)$$

б) Для случая, когда прямые заданы уравнениями в общем виде (4,6), необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в том, что коэффициенты при соответствующих текущих координатах в их уравнениях пропорциональны, т. е.

$$\frac{A1}{A2} = \frac{B1}{B2} \qquad (4.9)$$

5. Условия перпендикулярности двух прямых:

а) В случае, когда прямые заданы уравнениями (4, 4) с угловым коэффициентом, необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключатся в том, что их угловые коэффициенты обратные по величине и противоположны по знаку, т. е.

$$k2 = -\frac{1}{k1} \qquad (4,10)$$

`Это условие может быть записано также в виде

$$k1k2 = -1 \qquad (4.\ 11)$$

б) Если уравнения, прямых заданы в общем виде (4,6), то условие их перпендикулярности (необходимое и достаточное) заключается в выполнении равенства

$$A1A2 + B1B2=0 \qquad (4,12)$$

6. Координаты точки пересечения двух прямых находят, решая систему уравнений (4, 6); Прямые (4,6) пересекаются в том и только в том случае, когда

$$A1B2 - A2B1 \neq 0$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Содержание: Расстояние отданной точки до данной прямой.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Расстояние точки A (x_1, y_1) до прямой Ax + By + C =0 есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Она определяется по формуле

$$d = \frac{Ax1+by1+C}{\overline{A^2+B^2}} \qquad (5.1)$$

Правило. Чтобы определить расстояние от точки A(x_1, y_1) до прямой Ax + By + C = 0, нужно привести уравнение прямой к, нормальному виду, взять левую часть полученного уравнения и подставить в нее вместо текущих координат координаты данной точки. Абсолютная величина полученного числа и даст искомое расстояние.

Расстояние от точки до прямой есть всегда величина положительная. Кроме расстояния от точки до прямой, рассматривается еще так называемое отклонение точки от прямой.

Отклонение δ данной точки отданной прямой есть расстояние от этой точки до прямой, которому приписывается знак плюс, если точка и начало координат находятся по разные стороны от прямой, и знак минус, если точка и начало координат находятся по одну сторону от прямой (см. учебник И. И. Привалова, гл. III, § 16, или § 22 учебника Н. В. Ефимова).

Расстояние от точки до прямой есть абсолютная величина отклонения этой точки от прямой.

Задача 5,8. Дана прямая 4х+3у+1= О. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от нее на 3 ед. масштаба.

Решение. Очевидно, что искомых прямых будет две. Отклонение 2 точек одной из искомых прямых от данной будет равно +3, а другой —3; δ = ± 3.

Уравнение семейства прямых, параллельных данной, будет таким:

$$4x + 3y + C = 0$$

Из этого семейства требуется отобрать две искомые прямые. После приведения его к нормальному виду получим

$$\frac{4x + 3y + C}{\pm 5} = 0$$

(два знака в знаменателе мы удерживаем пока потому, что знак C нам неизвестен). Возьмем на данной прямой произвольную точку, например,$A(0, -\frac{1}{3})$ Подставим ее координаты в левую часть последнего уравнения и, учитывая, что отклонение точек искомой прямой от искомых равно ± 3, для определения C полученного уравнения

$$\pm 3 = \frac{4*0+3*\ -\frac{1}{3}\ +C}{\pm 5}, \text{откуда } \pm 3 = \frac{C-1}{\pm 5}$$

На основании этого C_1 = 16, C_2 = — 14. Подставляя эти значения С в уравнение семейства прямых 4x + 3y+C == O, получим, что искомых прямых две:

4x+3y+16=0 и 4x+3y=0.

Решение допускает простую проверку, которую рекомендуется сделать.

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Уравнения сторон треугольника ABC известны:

(AB)x+y-1 =0,

(AC) 2x—y—5=0.

(BC) 3x + y = 0.

Найти длины высот этого треугольника их уравнения.

Указание. Определить координаты вершин треугольника и воспользоваться формулой для определения расстояния от точки до прямой.

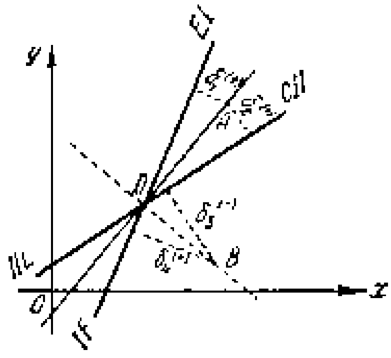
Ответ. Уравнение высоты h_{BC} x — 3y — 5 = 0;
уравнение высоты h_{AC} 2x + 4y — 5 = 0;
уравнение высоты h_{AB} x — y — 4 = 0;

$$hBC = \frac{\sqrt{10}}{2}; \qquad hAC = \frac{3\sqrt{5}}{2}; \qquad hAB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

Содержание; Уравнение биссектрисы угла между двумя прямыми. Задачи повышенной трудности.

На этом практическом занятии мы будем решать задачи повышенной трудности, однако такие, которые не потребуют каких либо дополнительных сведении **из** теории прямой линии. Научимся прежде всего находить уравнение биссектрисы угла между двумя прямыми.



Фиг. 6,1.

Задача 6,1. Найти уравнение биссектрис углов между прямыми

12x+9y—17 = 0 и 3x+4y + 11 = 0.

Решение. Приведем подробное решение этой задачи. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла между двумя прямыми есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. Обратимся к фиг. 6, 1. Отклонения δ_1 и δ_2 точки *A* биссектрисы от сторон угла *CDE* имеют знак плюс, так как точка *A* и начало координат лежат по разные стороны как от первой, так и от второй прямой, т. е. δ_1 и δ_2. Возьмем точку *B* на биссектрисе смежного угла *CDF.* Точка *B* и начало координат лежат по разные стороны от прямой *EF,* поэтому отклонение δ_3 имеет знак плюс

($\delta_4 > 0$). Отклонение δ_3 точки *B* от прямой *CL имеет* знак минус, так как точка *B* и начало координат лежат с одной и той же стороны от прямой *CL,* т. е. $\delta_3 < 0$. Значит, δ_3 и δ_4 в этом случае равны по абсолютной величине, но противоположны **по** знаку, и имеет место равенство

$$\delta_3 = -\delta_4$$

Обозначим через *X* и Y текущие координаты точки на биссектрисе и рассмотрим отклонения этой точки от сторон угла. Для биссектрисы одного угла эти отклонения равны, а для биссектрисы смежного угла они равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Пусть уравнения сторон угла имеют вид

$A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$

Приведем эти уравнения к нормальному виду, и **тогда,** для случая, **когда** $\delta_1 = \delta_2$ уравнение биссектрисы будет **иметь вид .**

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\ \overline{A_1^2+B_1^2}} = \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\ \overline{A_2^2+B^2}}$$

Для **случая же** $\delta_3 = -\delta_4$ уравнение биссектрисы **получим в** виде

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\ \overline{A_1^2+B_1^2}} = -\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\ \overline{A_2^2+B^2}}$$

Замечание. При решении задачи нет надобности обозначать координаты точки на биссектрисе через **X и У. Их** можно, означить через *x* и у, так как это не меняет этих уравнение.

Объединяя уравнения (A) и (B) и используя только **что** сделанное замечание, будем иметь уравнения двух **биссектрис в виде**

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\overline{A_1^2+B_1^2}} = \pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\overline{A_2^2+B^2}}$$

Теперь решение нашей задачи не составит труда.

Для **нашего** случая уравнения биссектрис запишутся **так:**

$$\frac{12x+9y-17}{\overline{12^2+9^2}} = \pm\frac{3x+4y+11}{\overline{3^2+4^2}}$$

ИЛИ

$$\frac{12x+9y-17}{15} = +\frac{3x+4y+11}{5}$$

И

$$\frac{12x+9y-17}{15} = -\frac{3x+4y+11}{5}$$

Окончательно уравнения биссектрис получаем в виде

$$21x+21y+16=0$$

$$3x\text{-}3y\text{-}50=0$$

Легко проверить, что найденные две биссектрисы перпендикулярны. Действительно, условие перпендикулярности двух прямых $A_1A_2+B_1B_2=0$ выполняется (проверьте!).

II Аналитическая геометрия в пространстве

Уравнение плоскости

Плоскость (рис.1) проходящая через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{n}=(A,B,C)$ представляется уравнением первой степени

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (1.)

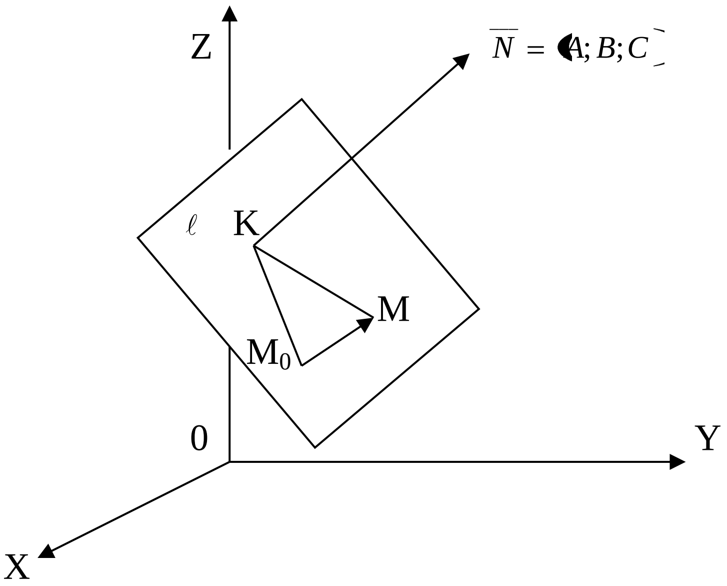


Рис. 1.

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax+By+Cz+D=0$ (2.)

Где $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

Вектор $\overline{n}$ называется нормальным вектором плоскости P.

Замечание

выражение плоскость *P* представляется выражением (1.) или (2.) означает что:

1. координаты x,y,z всякой точки *M* плоскости *P* удовлетворяют уравнению (1.) или (2.).
2. координаты x,y,z всякой точки, не лежащей на плоскости *P,* не удовлетворяют уравнению.

Пример 1.

Плоскость проходящая через точку (2;1;-1) и перпендикулярная к вектору (-2;4;3) представляется уравнением :

$-2(x-2)+4(y-1)+3(z+1)=0$ или

$-2x+4y+3z+3=0$

Исследуем положение плоскости при различных значениях коэффициентов общего уравнения плоскости (2.)

1. $D = 0$

уравнение плоскости $Ax + By + Cz = 0$

Эта плоскость проходит через начало координат, т.к. точка $x = y = z = 0$ удовлетворяет этому уравнению.

2. $C = 0$

Уравнение плоскости $Ax + By + D = 0$. Эта плоскость параллельна оси OZ (рис.2.)

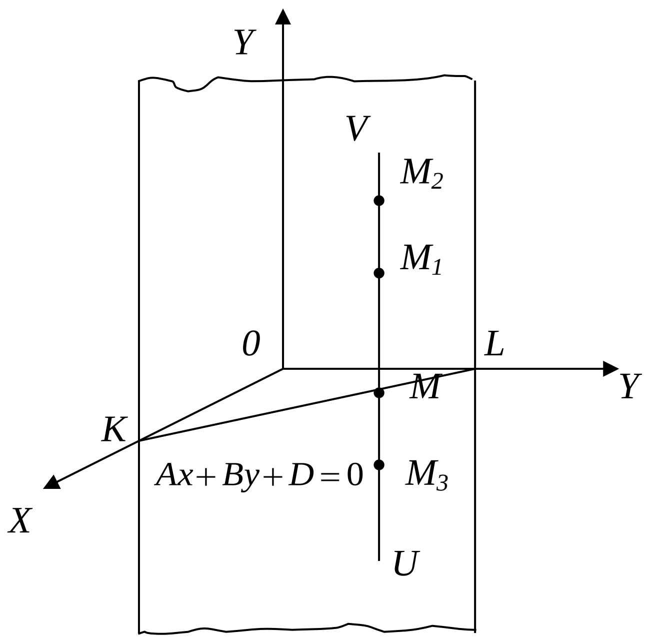


Рис. 2.

В плоскости oxy уравнение $Ax + By + D = 0$ представляет прямую. Разъясним почему в пространстве то же уравнение представляет плоскость.

Возьмём на прямой KL какую – либо точку $M(x_0; y_0)$. Так как точка M лежит в плоскости oxy для неё $Z = 0$ и она удовлетворяет уравнению $Ax + By + D = 0$.

Рассмотрим теперь точки $M_1, M_2, M_3, ...$ для которых $Z \neq 0$ т.е.

$M_1(x_0, y_0, z_1); M_2(x_0, y_0, z_2); M_3(x_0, y_0, z_3).$ Координаты этих точек тоже удовлетворяют, которое для большей ясности можно записать так

$Ax_0 + By_0 + 0 \cdot z + D = 0.$

Эти точки заполняют вертикальную прямую UV, проходящую через точку M.

Такие же вертикальные прямые можно построить для всех точек прямой KL. В совокупности они заполняют плоскость P.

По аналогии

$B = 0, \quad Ax + Cz + D = 0$ - плоскость параллельная оси $OУ$.

$A = 0, \quad By + Cz + D = 0$ - плоскость параллельная оси OX.

Таким образом если в уравнении плоскости отсутствует одна переменная, то плоскость параллельна оси этой переменной.

3. $C = 0; D = 0 \quad Ax + By = 0$ - уравнение плоскости проходящей через ось oZ.

$A = 0; D = 0 \quad By + Cz = 0$ - плоскость проходящая через ось oX

$B = 0; D = 0 \quad Ax + Cz = 0$ - плоскость проходящая через ось oY

4. $A = 0; B = 0 \quad Cz + D = 0$ - уравнение плоскости параллельной плоскости oXY

$A = 0; C = 0 \quad By + D = 0$ - уравнение плоскости параллельной плоскости XoZ

$B = 0; C = 0 \quad Ax + D = 0$ - уравнение плоскости параллельной плоскости YoZ

5. $A = 0; B = 0; D = 0. \quad Cz = 0$ - уравнение координатной плоскости XoY

$A = 0; C = 0; D = 0. \quad By = 0$ - уравнение координатной плоскости XoZ

$B = 0; C = 0; D = 0. \quad Ax = 0$ - уравнение координатной плоскости YoZ

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть $a, в, c$ - отрезки отсекаемые плоскостью P на осях (рис.3.)

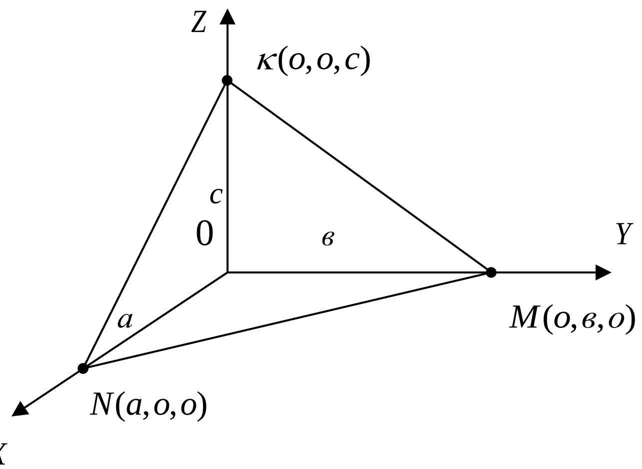


рис.3.

Так как точки $N(a,o,o), M(o,в,o), \kappa(o,o,c)$ удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, имеем:

$$A \cdot a + D = 0 \to A = -\frac{D}{a};$$

$$B \cdot в + D = 0 \to B = -\frac{D}{в};$$

$$C \cdot c + D = 0 \to C = -\frac{D}{c};$$

Подставив эти коэффициенты в уравнения плоскости получим:

$$-\frac{D}{a} \cdot x - -\frac{D}{в} \cdot y - \frac{D}{c} \cdot z + D = 0$$

Перенеся свободный член уравнения D справа от знака равенства и сокращая D (предполагая, что $D \neq 0,$)получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{в} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3.)$$

Это уравнение плоскости в отрезках.

Пример 2.

Написать уравнение плоскости $3x-6y+2z-12=0$ в отрезках.

Заданное уравнение представляем в виде $3x-6y+2z-12$ и делим его *12*

получаем: $\frac{3x}{12}-\frac{6y}{12}+\frac{2z}{12}=1$ или

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{(-2)}+\frac{z}{6}=1$$

Отрезки, отсекаемые на осях есть $a=4; в=-4; z=6.$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Три точки $M_0(x_0;y_0;z_0);M_1(x_1;y_1;z_1);M_1(x_1;y_1;z_1)$ не лежащие на одной прямой, образуют плоскость. Запишем Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

этому уравнению удовлетворяют и точки M_1 и M_2

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)=0.$$
$$A(x_2-x_0)+B(x_2-x_0)+C(z_2-z_0)=0.$$

Решая систему этих трёх уравнений, определяем коэффициенты A,B,C и уравнение плоскости найдено.

Это уравнение удобнее представить в виде определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x-x_0; y-y_0; z-z_0 \\ x_1-x_0; y_1-y_0; z_1-z_0 \\ x_2-x_0; y_2-y_0; z_2-z_0 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

)

Пример 3.

Точки $M_0(1,2,3)$ $M_1(2,1,2)$ $M_2(3,3,1)$ не лежат на одной прямой , т.к. векторы

$\overline{M_0M_1}=(1;-1;-1)$ и $\overline{M_0M_2}=(2;1;-2)$ не коллиниарны.

Плоскость M_0 M_1 M_2 представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Раскрывая определитель, получим $x+z-y=0$

Замечание

Если точки $M_0\,M_1$ и M_2 лежат на одной прямой, уравнение становится тождественным.

Точка пересечения трёх плоскостей

Три плоскости могут не иметь ни одной общей точки (если по крайней мере две из них параллельны, а также если прямые их пересечения параллельны), могут иметь бесчисленное множество общих точек (если все они проходят через одну прямую) или иметь только одну общую точку.
В первом случае система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Не имеет решений, во втором случае имеет бесчисленное множество решений, в третьем только одно решение. Исследование системы уравнений и способы их решения были рассмотрены в материале первого кредита.

Различные задачи на плоскость

Угол между двумя плоскостями

Две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

образуют четыре двухгранных угла, попарно равных. Один из них равен углу между нормальными векторами $\overline{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$
Обозначая любой из двухгранных углов φ, имеем :

$$Cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5.)$$

Выбирая верхний знак, получаем $Cos\left(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}\right)$, выбирая нижний – получаем

$$Cos\left[180^\circ - \left(\widehat{\overline{N}_1\ \overline{n}_2}\right)\right]$$

Пример 4.

Угол между плоскостями $x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0$ и $x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$ определится из равенства: $Cos\varphi = \pm \frac{1 \cdot 1 + (-1) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1 + 1 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{1 + 1 + (\sqrt{2})^2}} = \pm \frac{1}{2};$

Получаем $\varphi = 60^\circ$ или $\varphi = 120^\circ$

Условие перпендикулярности

Условие перпендикулярности 2-х плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть условие перпендикулярности их нормальных векторов $\overline{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{n}_1 = (A_2; B_2; C_2)$.
Это условие в векторной форме есть равенство нулю скалярного произведения, $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$

В координатной форме: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ (6.)

<u>Условие параллельности двух плоскостей</u>

Есть условие параллельности их нормальных векторов $\overline{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{n}_1 = (A_2; B_2; C_2)$.

Условие параллельности векторов в векторной форме есть $\overline{n}_1 * \overline{n}_2 = 0$

В координатной форме $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (7.)

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.
Формула выводится по аналогии с формулой для расстояния от точки до прямой на плоскость и имеет вид: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

<u>Пример 5.</u>

Найти расстояние от точки $M_0(3;9;1)$ до плоскости $x - 2y + 2z - 3 = 0$

$$d = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 5\frac{1}{3};$$

<u>Уравнение прямой в пространстве</u>

Всякая прямая линия *UV* (рис.3.22) представляется системой двух уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (8.)$$

представляющих (если их рассматривать по отдельности) какие-либо две различные P_1 и P_2, проходящие через UV. Эти уравнения, взятые в совокупности называются уравнением прямой *UV*.

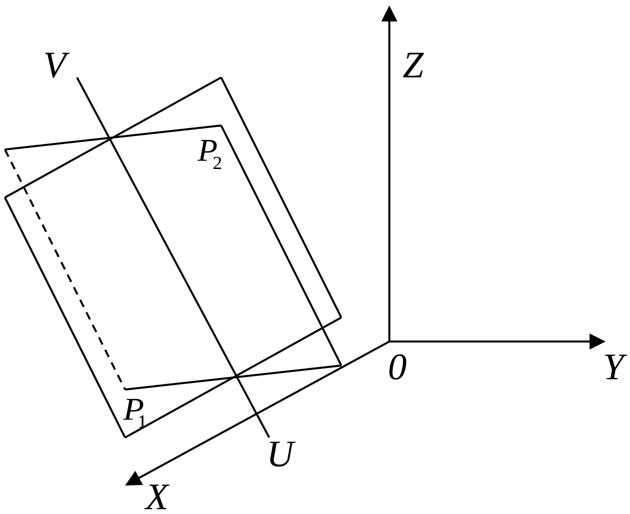


Рис.4.

Замечание

Выражение «прямая *UV* представляется системой уравнений (8.)» означает, что :

1. координаты x, y, z всякой точки *M* прямой *UV* удовлетворяют обоим уравнениям ;
2. координаты всякой точки, не лежащей на *UV*, не удовлетворяют сразу обоим уравнениям, хотя могут удовлетворять одному из них.

Пример 6.

Написать уравнение прямой *OK* (рис.3.23), проходящей через начало координат и точку $K(4;3;2;)$.

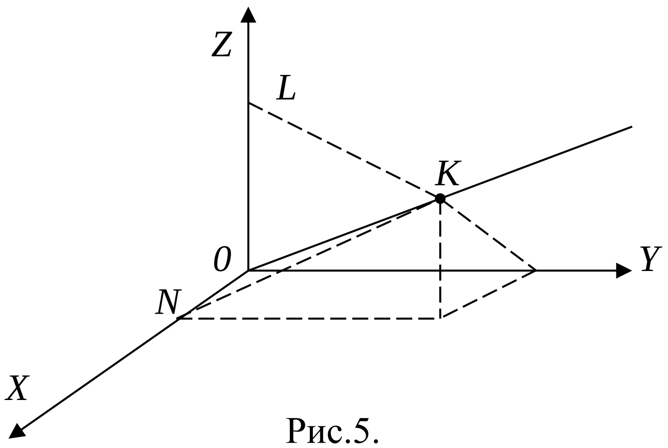


Рис.5.

Прямую *OK* можно найти как линию пересечения двух плоскостей Си KoX .
Уравнение плоскости KoX составим по координатам 3-х точек: $K(4;3;2)$ $O(0;0;0)$. За третью точку возьмём какую – либо лежащую на оси OZ , например $L(0;0;1)$.

Получаем $\begin{vmatrix} x; y; z \\ 4;3;2 \\ 0;0;1 \end{vmatrix} = 0$

Раскрывая определитель получаем $3x - 4y = 0$.

Таким же образом составляем уравнение плоскости , как проходящую через точки $K(4;3;2)$, $O(0;0;0)$, $N(1;0;0)$.

Получаем $\begin{vmatrix} x; y; z \\ 4;3;2 \\ 1;0;0 \end{vmatrix} = 0$

Или $2y - 3z = 0$.

Таким образом прямая *OK* представляется системой уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Прямую *OK* можно получить как линию пересечения плоскостей KoZ и KoY.
В результате получим систему:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 2x - 4z = 0 \end{cases}$$

Ту же прямую OK можно представить системой :

$$\begin{cases} 2y - 3z = 0 \\ 2x - 4z = 0 \end{cases}$$

первое уравнение представляет плоскость KoX , второе – плоскость KoY .

Условие, при котором два уравнения первой степени представляют прямую

Система $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Представляет прямую линию, если коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 (в этом случае плоскости не параллельны).

Если коэффициенты A_1, B_1, C_1 пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, но свободные члены не подчинены той же пропорции

$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 \neq D_1 : D_2$, то система несовместима и не представляет никакого геометрического образа / плоскости параллельны и не совпадают.

Если все четыре величины $A_1, B_1, C_1; D_1$ пропорциональны величинам $A_2, B_2, C_2; D_2$

$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$, то одно из уравнений системы есть следствие другого и система представляет плоскость (плоскости совпадают).

Пример 7.

1. Система $\begin{cases} 2x - 7y + 12z - 4 = 0 \\ 4x - 14y + 36z - 8 = 0 \end{cases}$

Представляет прямую т.к. нет пропорциональности коэффициентов уравнения.

2. Система $\begin{cases} 2x - 7y + 12z - 4 = 0 \\ 4x - 14y + 24z - 8 = 0 \end{cases}$

Представляет плоскость (все четыре величины $A_1, B_1, C_1; D$ пропорциональны.

3.Система $\begin{cases} 2x - 7y + 12z - 4 = 0 \\ 4x - 14y + 24z - 12 = 0 \end{cases}$

не представляет никакого геометрического образа (величин A_1, B_1, C пропорциональны, а D не подчинена той же пропорции ; система несовместима.

Пересечение прямой с плоскостью

Прямая в $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

И плоскость P

$Ax + By + Cz + D = 0$

Могут не иметь ни одной общей точки (если $\ell \| P$), могут иметь бесчисленное множество общих точек (если ℓ лежит на P), или иметь только одну общую точку, (вопрос сводится к разысканию общих точек трёх плоскостей. (Задача решается так же как в п. выше).

Направляющий вектор

Всякий ненулевой вектор $\overline{S}=(l;m;n)$, лежащий на прямой UV (или параллельный ей)называется направляющим вектором этой прямой . Координаты $l;m;n$ направляющего вектора называются направляющим коэффициентами прямой.

За направляющий вектор прямой UV

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

принимается векторное произведение нормальных векторов $\overline{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ и $\overline{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ плоскостей P_1 и P_2 (рис6.)

т.е. $\overline{S}=\overline{n}_1 * \overline{n}_2$.

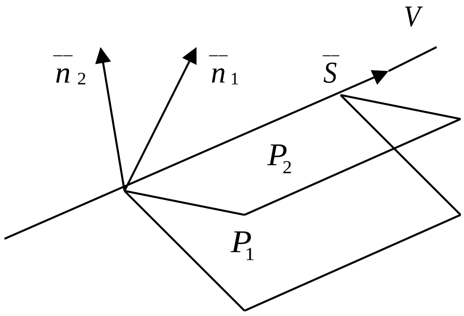


рис.6.

Пример 8.

Найти направляющий вектор прямой

$$\begin{cases} 2x-2y+z+8=0 \\ x-2y-2z+1=0 \end{cases}$$

Имеет $\overline{n}_1=(2;-2;-1)$; $\overline{n}_2=(1;2;-2)$

$\overline{S}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2$.

По формуле находим

$$\overline{S}=\begin{vmatrix} \overline{i};\overline{j};\overline{k} \\ 2;-2;-1 \\ 1;2;-2 \end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix} -2;-1 \\ 2;-2 \end{vmatrix}+\overline{j}\cdot\begin{vmatrix} -1;2 \\ -2;1 \end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix} 2;-2 \\ 1;2 \end{vmatrix}=6\,\overline{i}+3\,\overline{j}+6\,\overline{k}.$$

Направляющие коэффициенты вектора будут

$\ell=6; m=3; n=6$

Каноническое уравнение прямой

По аналогии с выводом формулы (3.4) можно получить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно направляющему вектору

$\overline{S}=(l;m;n)$ (рис.7.)

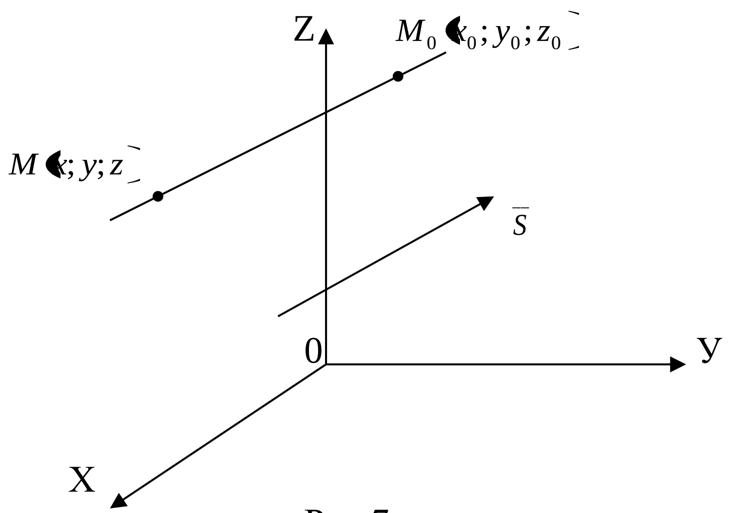


Рис.7.

Уравнение прямой имеем вид

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad (9.)$$

Это уравнение в координатной форме выражает условия параллельности векторов $\overline{MM_0}$ и $\overline{S}$

Замечание

Т.к. за точку M_0 можно взять любую из точек прямой l ,а направляющий вектор $\overline{S}$ можно заменить направляющим вектором $K\overline{S}$, то каждой из величин $x_0;y_0;z_0;l;m;n$ по отдельности можно дать произвольные значения.

Пример 9.

1.написать канонически уравнения прямой проходящей через точку $A(5;-3;2)$ и $B(6;1;-2)$

В качестве С можно взять A , за вектор $\overline{S}$ можно принять $\overline{AB}=(-2;4;-4)$

Каноническое уравнение будет $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{z}$

2. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(5;0;1)$ и $M_1(5;6;5)$ будет $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-0}{6}=\dfrac{z-1}{4}$

выражение $\dfrac{x-5}{0}$ условно; оно означает, что $x-5=0$,

так, что вместо канонического уравнения можно заменить систему:

$$\begin{cases} x-5=0 \\ \dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{4} \end{cases}$$

Приведение уравнения прямой к каноническому виду

Для того, чтобы вместе привести уравнение прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

к каноническому виду надо определить $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежащей на прямой и направляющей коэффициенты $l; m; n$.

Пример 10.

1. Привести уравнение прямой:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 3 = 0 \\ 5x - y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

к каноническому виду.

Дадим координате X какое-либо значение, например $x = 3$. Получим систему $\begin{cases} -3y - z + 9 = 0 \\ -y + z + 7 = 0 \end{cases}$

Решая которую найдём $y = 4; z = -3$ Найденная точка $M_0(3; 4; -3)$ лежит на заданной прямой.

Вычислим направляющие коэффициенты l, m, n

$$\overline{S} = \begin{vmatrix} \overline{i}\,; \overline{j}; \overline{k} \\ 2; -3; -1 \\ 5; -1; 1 \end{vmatrix} = -4\,\overline{i} - 7\,\overline{j} + 13\,\overline{k}$$

Отсюда $l = -4; \overline{m} = -7; n = 13.$

И так каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+3}{13}$$

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры 13 е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. - 448 с
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: учебник 7-е изд. Мс ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ
по дисциплине
«Высшая математика»
для студентов направления подготовки
Профессиональное обучение (по отраслям),
профилей «Информационные технологии и системы», «Экономика и управление», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Профессиональная психология», «Управление персоналом», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело»
(в 4-х частях). Часть 1.

С о с т а в и т е л ь:
Александр Павлович Волков

Печатается в авторской редакции.
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать ______________
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага типограф. Гарнитура Times
Печать офсетная. Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _______
Тираж 100 экз. Изд. №______. Заказ №______. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного
университета имени Владимира Даля

Свидетельство о государственной регистрации издательства МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015г.

Адрес издательства: 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60
E-mail: izdat.lguv.dal@gmail.com **http:** //izdat.dahluniver.ru/