МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Стахановский инженерно-педагогический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Луганский государственный университет имени
Владимира Даля»

Кафедра общеинженерных дисциплин

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине

«НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА»

для студентов направления подготовки
Профессиональное обучение (по отраслям),
профили: «Экономика и управление», «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Профессиональная психология», «Управление персоналом»
(в 2-х частях). Часть 1.

Луганск 2023

УДК 004.92

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом
ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля»
(протокол № от . .2023 г.)

Конспект лекций по дисциплине «**Начертательная геометрия. Инженерная и компьютерная графика**» для студентов направления подготовки **Профессиональное обучение (по отраслям)**, профили: «Экономика и управление», «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Профессиональная психология», «Управление персоналом» **»** (в 2-х частях). Часть 1. / Сост.: В.Д Волкова. **– Стаханов**: ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», 2023. – 67 с.

Конспект лекций содержит 6 лекций, описание которых сопровождается теоретическими сведениями. К каждой теме приведены вопросы и задачи для самопроверки, список рекомендованной литературы.

Предназначен для студентов профилей: «Экономика и управление», «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Профессиональная психология», «Управление персоналом».

Составитель: ст. преп. Волкова В.Д.

Ответственный за выпуск: доц. Сафонов В.И.

Рецензент: доц. Тугай В.В.

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1. Метод проекций. Проекции точки.

План лекции 1:

1. 1. Предмет и задание курса «Начертательная геометрия». История создания курса «Начертательная геометрия».

В число дисциплин, составляющих основу инженерного образования, входит начертательная геометрия.

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии и изучает формы окружающих нас предметов, обосновывает способы построения изображения их на плоскости, а также способы решения задач геометрического характера.

Начертательную геометрию выделяет то обстоятельство, что она для решения общегеометрических задач использует графический путь, при котором геометрические свойства фигур изучаются непосредственно по чертежу. В то время как в других ветвях геометрии чертеж является вспомогательным средством (так как с помощью чертежа лишь иллюстрируются свойства фигур), в начертательной геометрии чертеж является основным средством изучения фигур.

Начертательная геометрия является теоретической базой для составления чертежа.

Чертеж – это своеобразный язык, с помощью которого, используя лишь точки, линии и ограниченное число геометрических знаков, букв и цифр, человек имеет возможность изобразить на плоскости машины, приборы, инженерные сооружения. Причем этот графический язык является интернациональным, он понятен любому технически грамотному человеку независимо от того, на каком языке он говорит.

Следовательно, начертательная геометрия является теоретическим обоснованием черчения, дающего графическую подготовку к изучению последующих общетехнических и специальных дисциплин.

Изучение начертательной геометрии способствует развитию пространственного воображения и навыков правильного логического мышления. Совершенствуя нашу способность по плоскому изображению мысленно создавать представления о форме предмета и наоборот создание изображений мысленно созданных образов – визуализация мысли.

Выдающуюся роль в развитии начертательной геометрии сыграл крупный французский геометр конца 18 и начала 19 века, инженер, общественный и государственный деятель правления Наполеона I Гаспар Монж (1746-1818 гг.)

Монж систематизировал и обобщил накопленные к тому времени практический опыт и теоретические познания в области изображения пространственных фигур на плоскости. Монж предложил рассматривать плоский чертеж, состоящий из двух проекций, как результат совмещения двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Это совмещение плоскостей проекций он достигает путем вращения вокруг прямой их пересечения, называемой осью проекции.

Предложенный Монжем метод – это метод параллельного проецирования, с использованием прямоугольных проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Этот метод был и остается основным методом составления технических чертежей.

1. 2. Обозначения

1. Точки обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D,… или цифрами: 1, 2, 3,…

2. Прямые и кривые линии, произвольно расположенные относительно плоскостей проекций, обозначаются строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d,…

3. Линии, занимающие особое положение, обозначаются: h – горизонтальная прямая уровня (горизонталь);

f – фронтальная прямая уровня (фронталь); p – профильная прямая уровня;

x, y, z – оси абсцисс (широт), ординат (глубин) и аппликат (высот); k – постоянная прямая чертежа (линия преломления).

4. Поверхности (в том числе – плоскости) обозначаются заглавными буквами греческого алфавита: Γ (гамма), Δ (дельта), Θ (тета), Λ (ламбда), Σ (сигма), Ψ (пси), Φ (фи), Π (пи), Ω (омега).

5. Плоскости проекций обозначаются буквой Π с добавлением нижнего индекса: Π_1 – горизонтальная плоскость проекций,

Π_2 – фронтальная плоскость проекций, Π_3 – профильная плоскость проекций.

6. Проекции точек, линий, поверхностей обозначаются теми же буквами или цифрами, что и сами точки, линии, поверхности, но с добавлением нижнего индекса:

A_1, B_1,…; a_1, b_1,…; Δ_1, Θ_1,… – горизонтальные проекции; A_2, B_2,…; a_2, b_2,…; Δ_2, Θ_2,… – фронтальные проекции; A_3, B_3,…; a_3, b_3,…; Δ_3, Θ_3,… – профильные проекции.

7. Для обозначения несобственных (бесконечно удаленных) элементов используется верхний индекс ∞: A^{∞}, m^{∞}, Ψ^{∞}.

8. Также используются следующие символы:

∈– принадлежность точки (элемента множества) геометрической фигуре (множеству): $A \in m$, $B \in \Theta$;

$\subset$ – принадлежность геометрической фигуры (подмножества) данной фигуре (множеству): $m \subset \Sigma$, Δ □t;

$\cap$ – пересечение множеств: $a \cap \Omega$, $\Delta \cap \Sigma$;

= – совпадение, результат, присвоение: $A_1 = B_1$, $A = m \cap \Sigma$; ≡ – тождество: $\Delta_1 \equiv \Pi_1$;

|| – параллельность: $a || m$, $b || \Sigma$;

⊥– перпендикулярность: $t \perp \Phi$;

Если символ перечеркнут наклонной чертой, то это означает отсутствие данного свойства: A $\not\subset$ m (точка A не принадлежит прямой m).

Принятые сокращения:

г.м.т. – геометрическое место точек;

н.в. – натуральная величина;

т. – точка;

пл. – плоскость.

1. 3. Методы проецирования

Все правила построения изображений основаны на методе проекций.

Проекция – это точка пересечения проецирующей прямой линии с плоскостью проекций.

Для получения проекции геометрического образа нужно иметь (рис. 1.3):

- геометрический образ – точка ***A***;
- плоскость проекций – ***P***;
- центр или направление проецирования – ***S***. В процессе проецирования решаются две задачи:
- получение изображения геометрического образа, то есть чертежа;
- воспроизведение геометрического образа по чертежу.

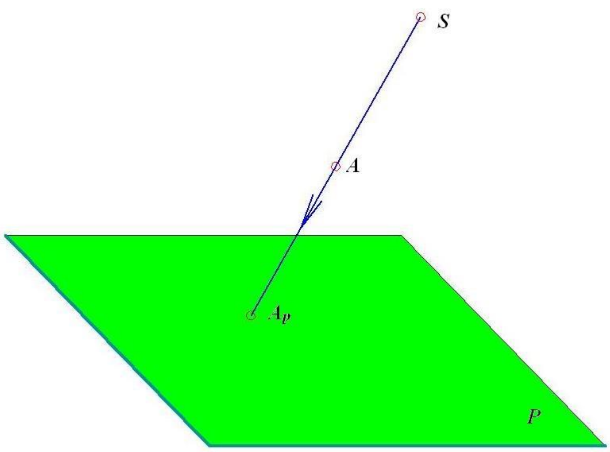


Рис. 1. 1 – Проецирование точки ***A*** на плоскость ***P***

Если в процессе проецирования решаются обе эти задачи, то полученные изображения называются обратимыми.

Существуют два способа получения изображений: центральное проецирование и параллельное проецирование.

1.3.1. Центральное проецирование

Для получения центральных проекций необходимо:
- задаться плоскостью проекций;
- центром проекций – точкой, не лежащей в этой плоскости.

При заданных центре проекций и плоскости, можно построить проекцию точки, а, следовательно, и всего образа, но имея проекцию, нельзя по ней определить положение самой точки в пространстве.

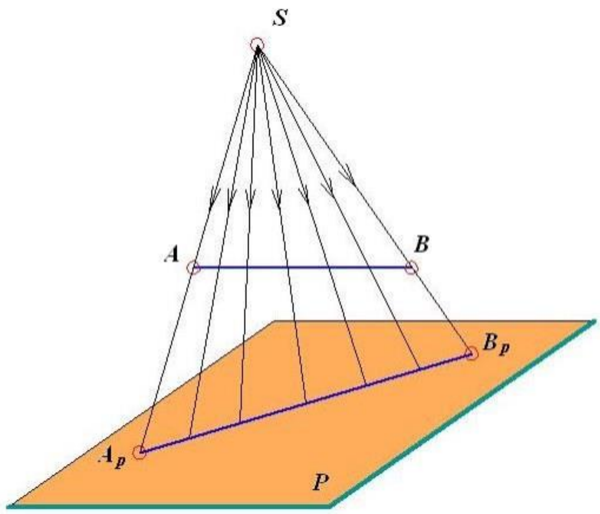


Рис. 1.2. Центральное проецирование отрезка прямой ***AB*** на плоскость ***P***: ***S*** – центр проецирования; ***P*** – плоскость проекций; ***A, B*** – проецируемый образ; ***Ap, Bp*** – центральные проекции точек ***A, B***; ***SA, SB*** – проецирующие прямые линии.

Свойства центральных проекций:
- проекция точки, есть точка, причем единственная;
- проекция прямой линии, есть прямая;
- проекция кривой линии – кривая в общем случае (в частном случае – это прямая, если она расположена в проецирующей плоскости);
- если точка принадлежит отрезку прямой линии, то центральная проекция ее, расположена на проекции этого отрезка;
- если геометрический образ лежит на плоскости проекций, то его проекция совпадает с ним;
- точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит проецирующая прямая.

1.3.2. Параллельное проецирование

Параллельное проецирование может рассматриваться, как частный случай центрального, если принять, что центр проекций бесконечно удален.

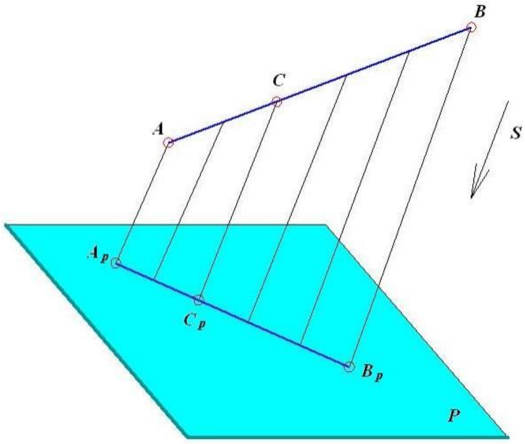


Рис. 1.3. Параллельное проецирование отрезка прямой ***AB*** на плоскость ***P***: ***S*** – направление проецирования; ***AB*** – проецируемый геометрический образ; ***P*** – плоскость проекций.

Параллельная проекция точки – это точка пересечения проецирующей прямой, проведенной параллельно заданному направлению, с плоскостью проекций.

Все свойства центральных проекций присущи и параллельному проецированию, но они обладают и собственными.

Свойства параллельных проекций

– если отрезок прямой делится точкой, то проекция этой точки делит проекцию отрезка в том же соотношении (***AC/CB=ApCp/CpBp***);

– отрезок прямой, параллельный плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину;

– проекции параллельных прямых параллельны.

Параллельные проекции могут быть прямоугольными и косоугольными.

Если проецирующие лучи располагаются нормально к плоскости проекций, то такие проекции называются ***прямоугольными или ортогональными***.

Слово «прямоугольный» часто заменяют словом «ортогональный», что в переводе с греческого языка означает «прямой» «угол».

Основным методом составления технических чертежей, разработанным ***Гаспаром Монжем,*** является метод ортогонального проецирования на две взаимно-перпендикулярные плоскости проекций. Он обеспечивает выразительность изображений предметов или геометрических образов.

1. 4. Комплексный чертеж (эпюр Г. Монжа).

Эпюр (франц.) "epuer" – улучшать, исправлять рисунок.

Комплексный чертеж (эпюр Монжа) – чертеж, составленный из двух или более связанных между собой ортогональных проекций изображаемого оригинала (точки, прямой и т.д.).

Принцип образования такого чертежа состоит в том, что данный оригинал ортогонально проецируется на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые потом соответствующим образом совмещаются с плоскостью чертежа. Одна из плоскостей проекции $П_1$ располагается горизонтально и называется горизонтальной плоскостью проекции. Плоскость $П_2$ располагается вертикально, перед наблюдателем, и называется фронтальной плоскостью проекции.

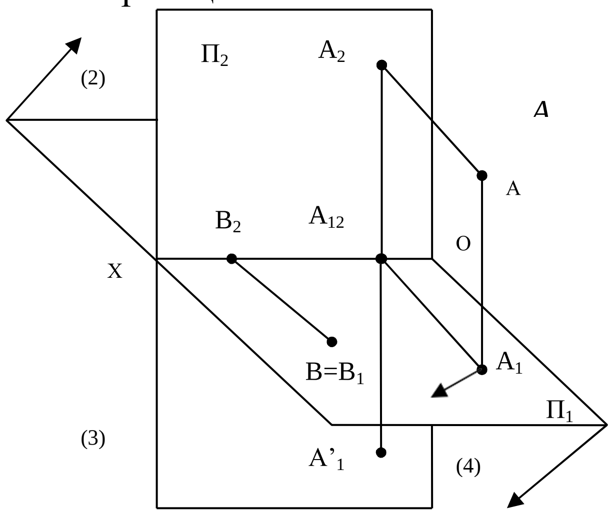


Рис. 1.4.

Прямая пересечения плоскостей проекций называется осью проекций.

Плоскостями $П_1$ и $П_2$ пространство делится на четыре двугранных угла или четыре четверти (квадранта), 1 - 4. Точки обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Рассмотрим проецирование точки на плоскости $П_1$ и $П_2$.

Точка А находится в I четверти. Из точки А опускаем перпендикуляры к плоскостям $П_1$ и $П_2$, в пересечении получаем горизонтальную проекцию $А_1$ и фронтальную $А_2$.

Выполнив обратную задачу: восстановив из точек $А_1$ и $А_2$ перпендикуляры к плоскостям $П_1$ и $П_2$, получим единственную точку в пространстве А. Из чего следует, что положение точки в пространстве определяет две ее проекции. Индексы проекций – индексы $П_1$ и $П_2$.

Для получения комплексного чертежа точки А необходимо плоскость $П_1$ вращением вокруг оси ОХ совместить с плоскостью $П_2$.

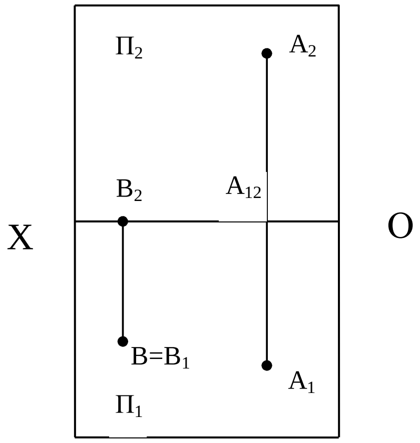


Рис. 1.5.

Спроецируем точку на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций, проведя третью плоскость $П_3$.

Плоскость $П_3$ называется профильной плоскостью проекции, а получаемая проекция - профильной проекцией.

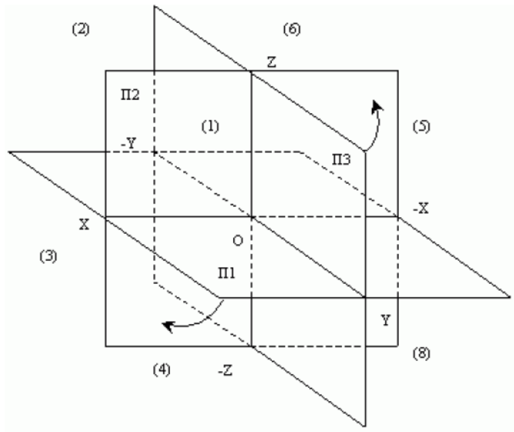


Рис. 1.6.

Плоскости проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$ образуют восемь трехгранных углов, которые называют октантами.

Счет первых четырех октантов совпадает со счетом четырех четвертей, образованных пересечением плоскостей проекции $П_1$ и $П_2$.

Каждая из осей проекции x, y, z делится плоскостями $П_1$, $П_2$, $П_3$, на две части: положительную и отрицательную.

Переход от пространственного изображения трех плоскостей проекции к комплексному чертежу осуществляется следующим образом:

- вращением вокруг оси OX совмещаем $П_1$ с $П_2$
- вращением вокруг оси OZ совмещаем $П_3$ с $П_2$

Точку O – пересечение осей x, y, z считают началом координат.

Если точка задана прямоугольными координатами, то это значит, что в качестве плоскостей проекции приняты плоскости $П_1$, $П_2$, $П_3$ и расстояние до них определяется координатами x, y, z положительными или отрицательными в зависимости от октанта, в котором находится точка.

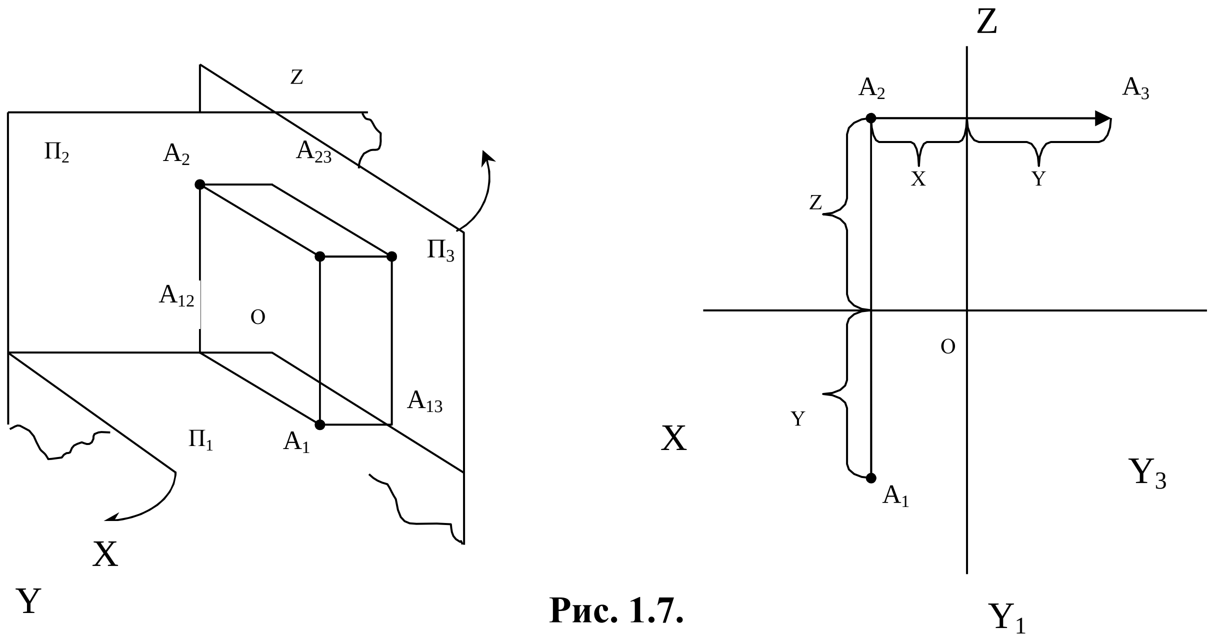


Рис. 1.7.
Точка А лежит в первом октанте

Для определения ее проекции, необходимо опустить перпендикуляры на $П_1$, $П_2$, $П_3$. Полученный прямоугольный параллелепипед называется координатным параллелепипедом.

Для получения комплексного чертежа необходимо совместить плоскости $П_3$ и $П_1$ с $П_2$. При этом ось у будет принадлежать как плоскости $П_1$, так и плоскости $П_3$.

Система координат комплексного чертежа

Координатами точки называются числа, определяющие расстояние точки до координатных плоскостей. В начертательной геометрии координатными плоскостями являются плоскости проекции. Координатные числа задаются в миллиметрах.

Координата **x** определяет расстояние точки до профильной плоскости проекций, координата **y** определяет расстояние точки до фронтальной плоскости проекции, а координата **z** – до горизонтальной плоскости проекции.

Запись А(10,15,45) означает координаты точки А: x=10мм, y=15мм, z=45мм.

Горизонтальная проекция точки определяется координатами x и y – A_1(x, y), фронтальная проекция точки определяется координатами x и z – A_2(x, z), профильная проекция точки определяется координатами y и z –

A_3(y, z).

Если одна из координат точки равна 0, то точка принадлежит одной из плоскостей проекции.

Если две координаты точки равны 0, то точка принадлежит координатной оси.

Точки, у которых одна или две координаты равны нулю, называют точками **частного положения**. Остальные точки называют точками **общего положения**.

Основные законы проецирования точки:

1. Положение точки в пространстве определяется двумя ее проекциями.

2. Горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси ОХ → $A_1A_2 \perp$ ОХ. Прямая A_1A_2 называется вертикальной линией связи.

3. Фронтальная и профильная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси OZ → $A_2A_3 \perp$ OZ. Прямая A_2A_3 называется горизонтальной линией связи.

На рисунке 1.8 «а» дан чертеж точки ***A***, она расположена в первой четверти: A_1 – лежит ниже оси ***OX***, а $\boldsymbol{A_2}$ – выше оси ***OX***. Координаты точки ***A*** (x, y, z) – имеют положительное значение.

На рисунке 1.8 «б» показан чертеж точки ***B***, расположенная во второй четверти, то есть над «- $\boldsymbol{\Pi_1}$» и сзади $\boldsymbol{\Pi_2}$. В этом случае проекции $\boldsymbol{B_1}$ и $\boldsymbol{B_2}$ лежат выше оси ***OX***. Координаты точки ***B*** (x, -y, z).

Точка ***C*** (рис. 1.8 «в») расположена в третьей четверти. Ее координаты ***C*** (x, - y, -z).

Точка ***D*** (рис. 1.8 «г») расположена в четвертой четверти, ее координаты D (x, y, -z).

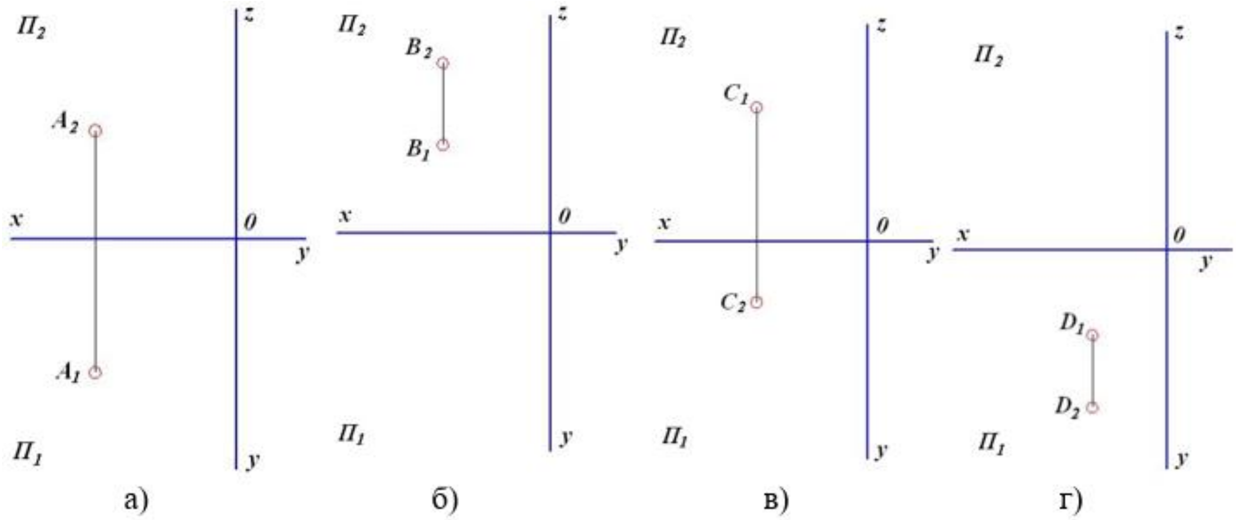


Рис. 1.8. Чертежи точек A, B, C, D.

Если среди координат точки есть отрицательные значения, то она располагается:

- во второй четверти, при «- y»;
- в третьей четверти, при «- z» и «- y»;
- в четвертой четверти, при «- z».

Вопросы для самоконтроля:

1.Приведите виды проецирования и их отличия.

2.Какой метод проецирования называется ортогональным или прямоугольным?

3.Что называется обратимым чертежом?

4.Как называются и как обозначаются плоскости проекций?

5.Дайте определение понятию «координаты точки».

6.Сформулируйте правило проекционной связи.

7. Проанализируйте построение точек по заданным координатам: ***A*** (80, 20, 40); ***B*** (50, 0, 20); ***C*** (30, 26, 0). Постройте три проекции каждой точки.

8. Сколько проекций точки необходимо, чтобы определить ее положение в пространстве?

9. Почему одна проекция точки не определяет положение точки в пространстве?

10. Где находятся расстояния на чертеже от точки в пространстве до плоскости проекций?

11. Как найти расстояния от точки до осей проекций?

Лекция 2. Проекции прямой и её отрезка

План лекции 2:

2. 1. Способы задания прямой.
2. 2. Прямые общего и частного положения.
2.2.1. Прямые параллельные одной плоскости проекций
2.2.2. Прямые линии параллельные двум плоскостям проекций (проецирующие прямые)
2. 3. Точка на прямой. Деление отрезка в данном отношении.
2.4. Определение натуральной величины отрезка прямой линии (Способ прямоугольного треугольника).
2.5. Построение отрезка заданной длины.
2. 6. Следы прямой линии.
2. 7. Проекции прямого угла.
2. 8. Взаимное положение двух прямых.

2. 1. Комплексный чертеж прямой линии. Способы задания прямой.

Прямая линия – одно из основных понятий геометрии. При систематическом изложении геометрии прямая линия обычно принимается за одно из исходных понятий, которое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии. Если основой построения геометрии служит понятие расстояния между двумя точками пространства, то прямую линию можно определить, как линию, вдоль которой расстояние между двумя точками является кратчайшим. Прямую линию в пространстве можно задать двумя точками (рис. 2.1 «а»), а на комплексном чертеже проекциями этих точек (рис. 2.1 «б»).

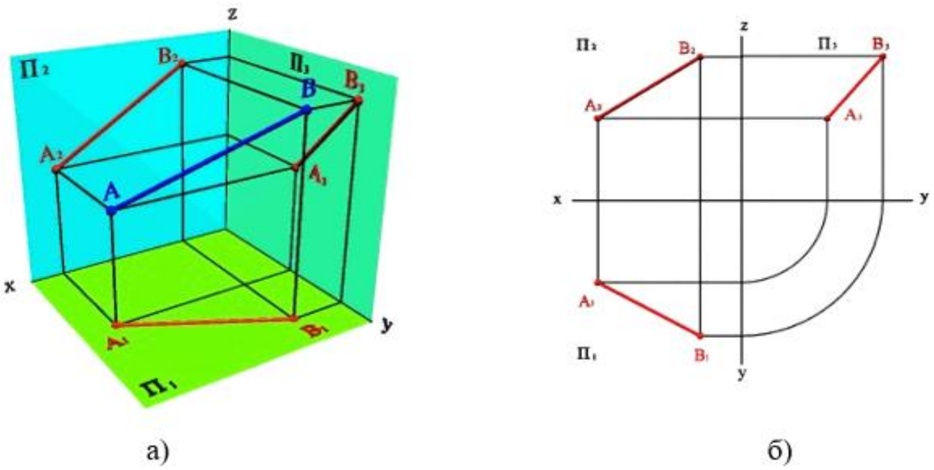


Рисунок 2.1 – Определение положения прямой по двум точкам.

Но прямую линию можно задать в пространстве, как результат пересечения двух плоскостей, или задать точкой и лучом, а на комплексном чертеже проекциями этих определителей.

2. 2. Прямые общего и частного положения

Прямая в пространстве может занимать какое-то случайное положение, то есть не параллельное и не перпендикулярное положение к плоскостям проекций. Такая прямая называется ***прямой общего положения***

Отличительная черта прямой общего положения на комплексном чертеже заключается в том, что ни одна из проекций ее не перпендикулярна и не параллельна осям координат.

Прямые линии параллельные или перпендикулярные какой-либо плоскости проекций называют ***прямыми частного положения***.

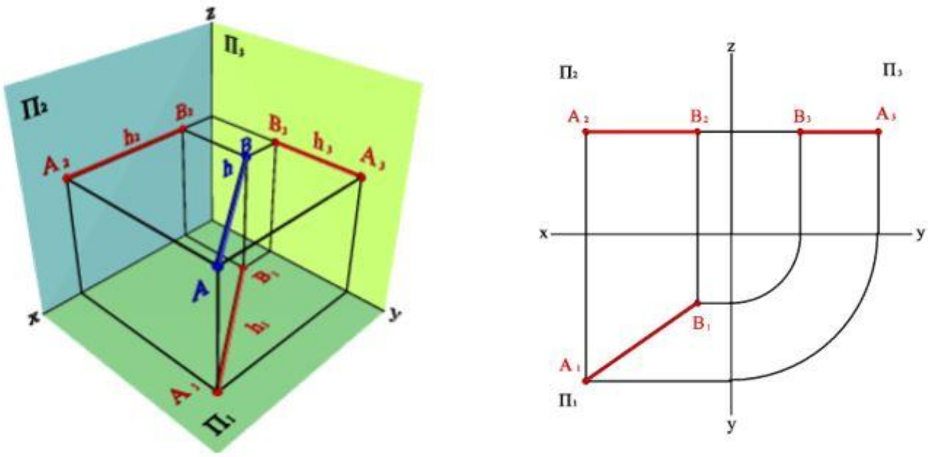
2.2.1. Прямые параллельные одной плоскости проекций

Прямые линии параллельные плоскостям проекций, занимают частное положение в пространстве и называются ***прямыми уровня***.

а) ***горизонтальная прямая*** – прямая параллельная горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$.

Отличительные признаки на чертеже:

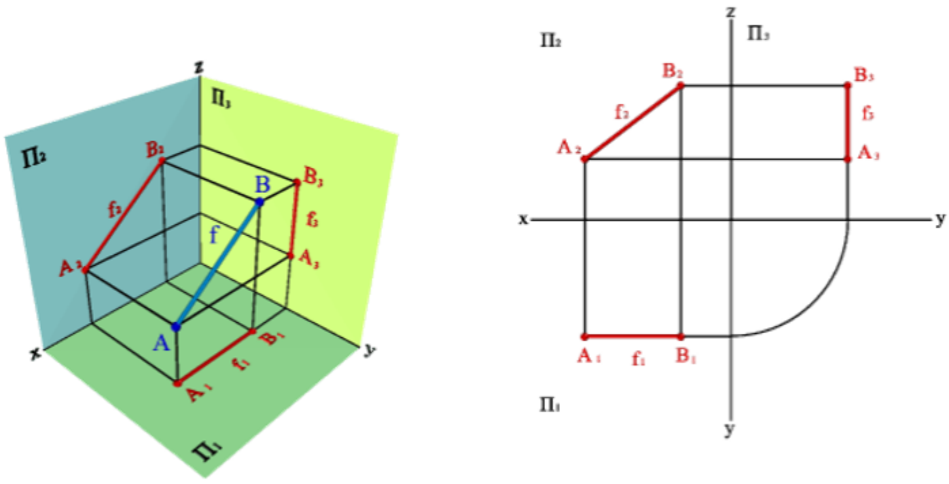
- фронтальная проекция $\boldsymbol{A_2B_2}$ параллельна оси проекций $\boldsymbol{x_0}$;
- горизонтальная проекция $\boldsymbol{A_1B_1}$ – натуральная величина;
- горизонтальная проекция $\boldsymbol{A_1B_1}$ составляет с осью $\boldsymbol{x_0}$ угол $\boldsymbol{\beta}$ – угол наклона прямой к плоскости $\boldsymbol{\Pi_2}$.



а) модель б) эпюр

Рис. 2.2. – Горизонтальная прямая.

б) фронтальная прямая линия – прямая параллельная фронтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$.



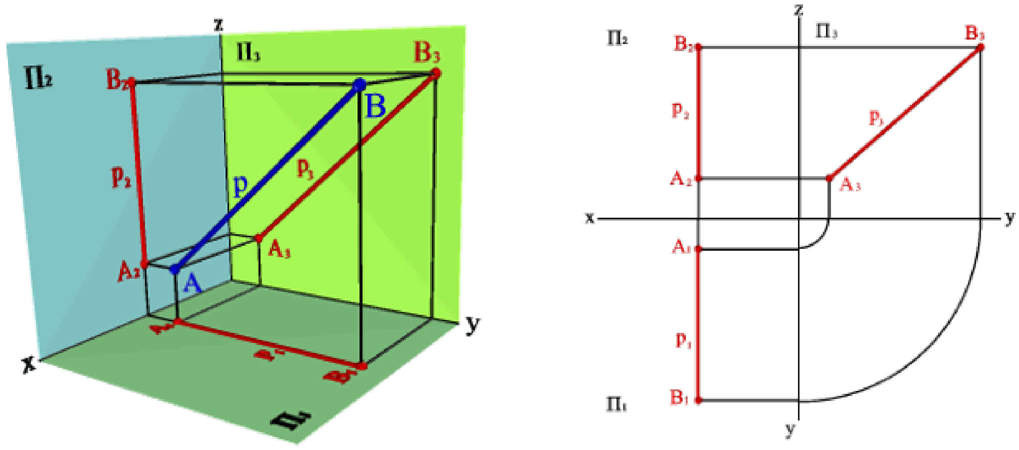
а) модель б) эпюр

Рис. 2.3. – Фронтальная прямая.

Отличительные признаки на чертеже:

- горизонтальная проекция $\boldsymbol{A_1B_1}$ параллельна оси x_0;
- фронтальная проекция $\boldsymbol{A_2B_2}$ – натуральная величина;
- фронтальная проекция $\boldsymbol{A_2B_2}$ составляет с осью $\boldsymbol{x_0}$ угол $\boldsymbol{\alpha}$ – угол наклона прямой ***AB*** к плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$.

г) ***профильная прямая линия*** – линия параллельная профильной плоскости проекций.



а) модель б) эпюр

Рис. 2.4 – Профильная прямая

Отличительные признаки на чертеже:

– горизонтальная и фронтальная проекции прямой $\boldsymbol{A_1B_1}$ и $\boldsymbol{A_2B_2}$ перпендикулярны оси $\boldsymbol{x_0}$;

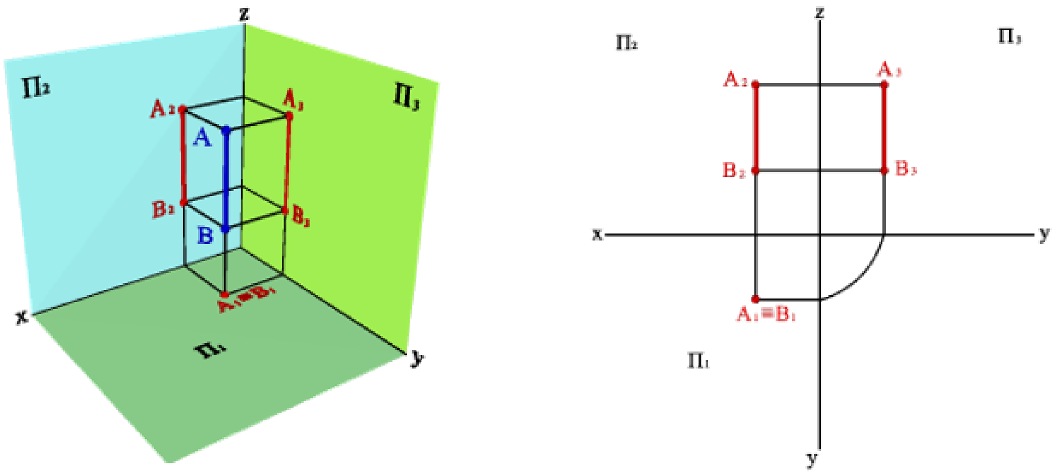
– профильная проекция прямой $\boldsymbol{A_3B_3}$ – натуральная величина;

– профильная проекция прямой $\boldsymbol{A_3B_3}$ наклонена к оси $\boldsymbol{y_0}$ под углом $\boldsymbol{\alpha}$, а к оси $\boldsymbol{z_0}$ под углом $\boldsymbol{\beta}$.

2.2.2. Прямые линии параллельные двум плоскостям проекций (проецирующие прямые)

Прямые линии параллельные двум плоскостям проекций будут перпендикулярны третьей плоскости проекций и называются ***проецирующими прямыми***.

а) ***горизонтально проецирующая прямая*** – прямая линия перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций.



а) модель б) эпюр

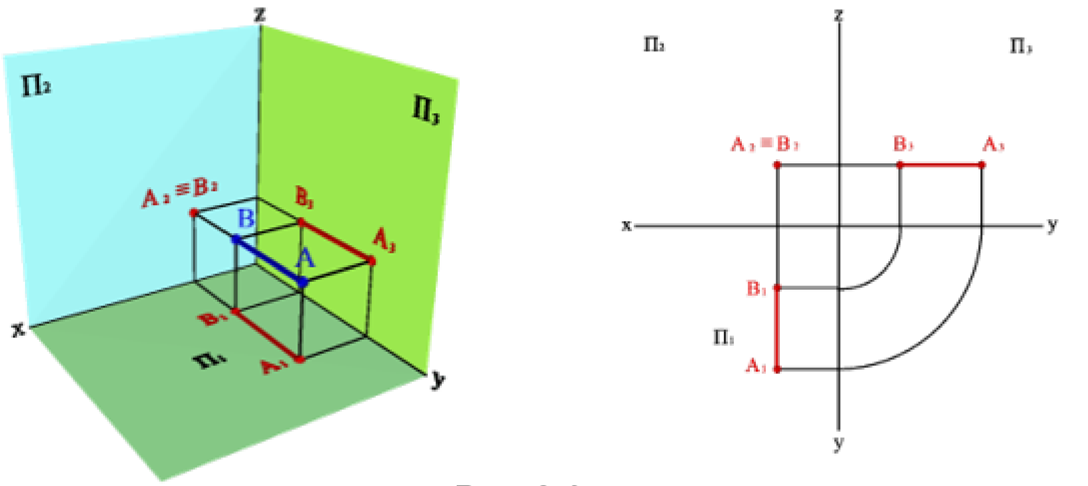
Рис. 2.5. – Горизонтально-проецирующая прямая

Отличительные признаки на чертеже:

– прямая ***AB*** перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$, параллельна фронтальной $\boldsymbol{\Pi_2}$ и профильной $\boldsymbol{\Pi_3}$ плоскостям проекций;

– горизонтальная проекция $\boldsymbol{A_1B_1}$ – точка;

– фронтальная $\boldsymbol{A_2B_2}$ и профильная $\boldsymbol{A_3B_3}$ проекции – натуральная величина, и расположены они перпендикулярно оси $\boldsymbol{x_0}$.



а) модель **Рис. 2.6.** б) эпюр

б) ***фронтально проецирующая прямая*** – прямая линия перпендикулярная фронтальной плоскости проекций.

Отличительные признаки на чертеже:

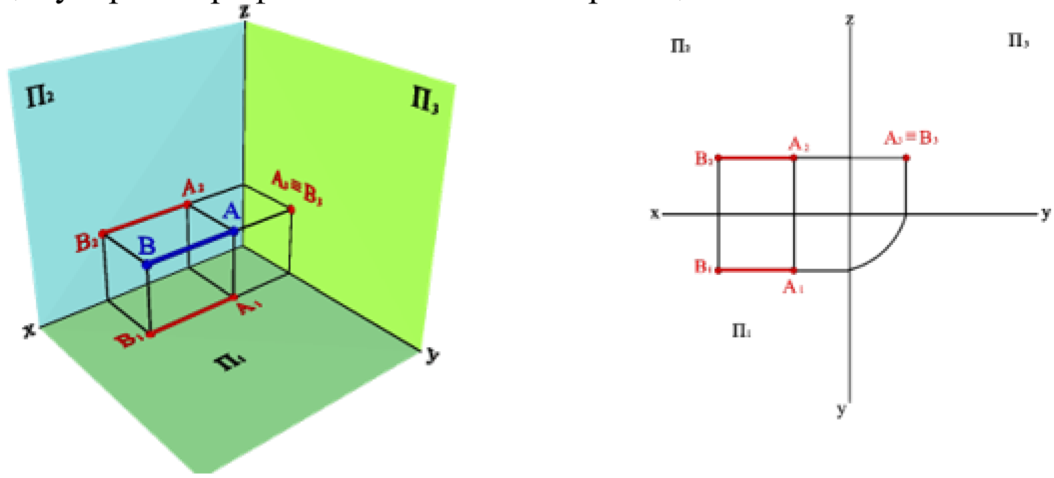
– пряма ***AB*** перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$, параллельная горизонтальной $\boldsymbol{\Pi_1}$ и профильной $\boldsymbol{\Pi_3}$ плоскостям проекций.

– фронтальная проекция $\boldsymbol{A_2B_2}$ – точка;

– горизонтальная проекция $\boldsymbol{A_1B_1}$ перпендикулярна к оси $\boldsymbol{x_0}$ и является натуральной величиной прямой ***AB***;

– профильная проекция $\boldsymbol{A_3B_3}$ перпендикулярна к оси $\boldsymbol{z_0}$ и является натуральной величиной.

в) ***профильно-проецирующая прямая*** – прямая линия перпендикулярная профильной плоскости проекций.



а) модель б) эпюр

Рис. 2.7 – Профильно-проецирующая прямая

Отличительные признаки на чертеже:

– прямая ***AB*** перпендикулярна к профильной $\boldsymbol{\Pi_3}$ плоскости проекций, параллельна горизонтальной $\boldsymbol{\Pi_1}$ и фронтальной $\boldsymbol{\Pi_2}$ плоскостям проекций;

– профильная проекция $\boldsymbol{A_3B_3}$ – точка;

– горизонтальная $\boldsymbol{A_1B_1}$ и фронтальная $\boldsymbol{A_2B_2}$ проекции параллельны оси $\boldsymbol{x_0}$, проецируются на $\boldsymbol{\Pi_1}$ и $\boldsymbol{\Pi_2}$ в натуральную величину.

2. 3. Правило принадлежности точки прямой

Если точка лежит на прямой, то проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой.

Если $A \in l \rightarrow A_1 \in l_1;\ A_2 \in l_2;\ A_3 \in l_3.$

Если отрезок прямой делится точкой, то проекция этой точки делит проекции отрезка в том же соотношении.

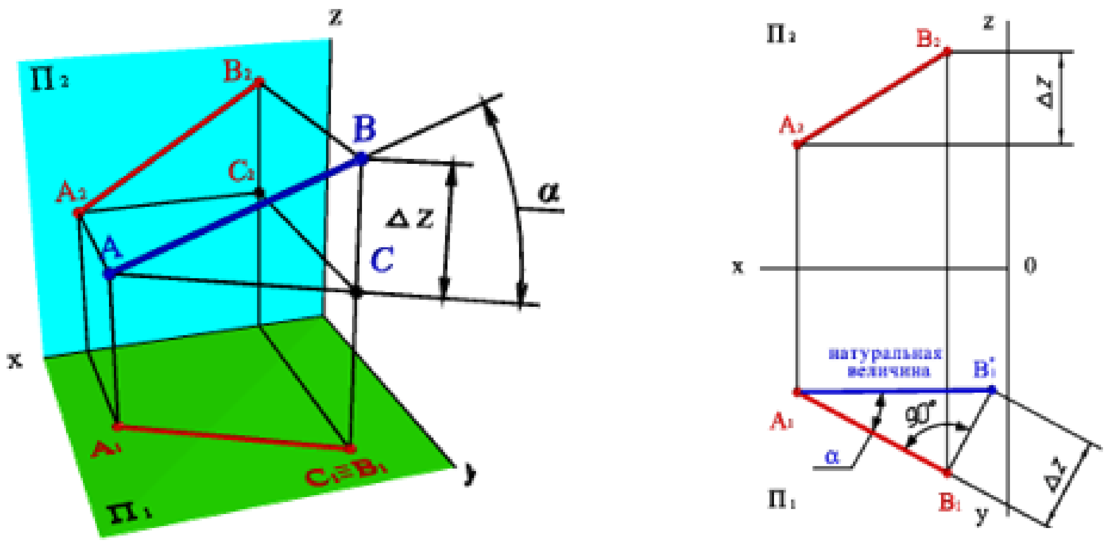
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{A_2C_2}{C_2B_2} = \frac{A_3C_3}{C_3B_3}$$

2. 4. Определение натуральной величины отрезка прямой линии (Способ прямоугольного треугольника).

Натуральную величину отрезка прямой линии можно определить ***методом прямоугольного треугольника***.

Рассмотрев рисунок 2.8, можно заключить, что отрезок ***AB*** является гипотенузой прямоугольного треугольника ***ABC***, в котором один катет равен проекции отрезка ($AC=A_1B_1$, так как они параллельны) на плоскость проекций, а другой катет равен разности расстояний от концов отрезка до плоскости проекций. Угол α – угол наклона отрезка к плоскости Π_1, он лежит между натуральной величиной отрезка и его проекцией на эту плоскость.

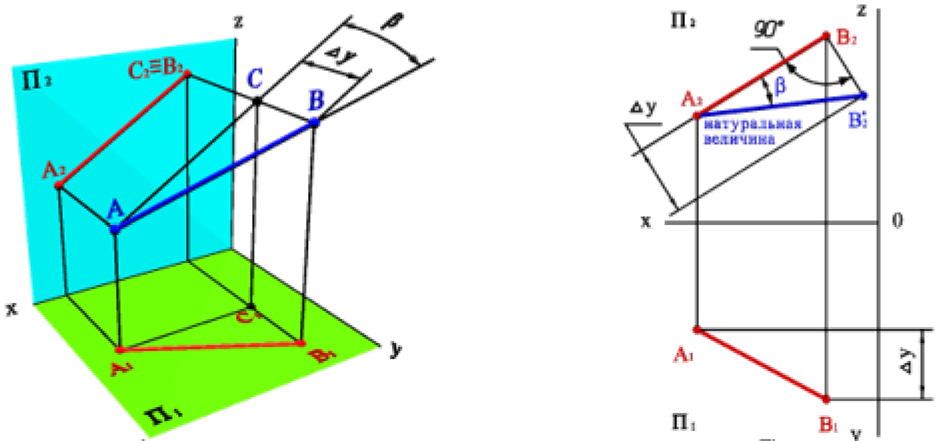
Прямоугольный треугольник можно построить в любом месте, лишь бы сохранялись условия: ***натуральная величина отрезка прямой равна гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет – его проекция, а второй – разность расстояний от концов отрезка до соответствующей плоскости проекций***.



а) модель б) эпюр

Рис. 2.8 – Определение натуральной величины отрезка и угла его наклона к горизонтальной плоскости проекций

Для определения β – угол наклона отрезка к плоскости Π_2 построения аналогичные (рис. 2.9). Только в треугольнике ***ABB**** сторона В***B****= Δ***У*** и треугольник совмещается с плоскостью Π_2.



а) модель б) эпюр

Рис. 2.9 – Определение натуральной величины отрезка и угла его наклона к фронтальной плоскости проекций.

2.5. Построение отрезка заданной длины

В некоторых задачах требуется не просто определить истинную длину данного на чертеже отрезка, а начертить отрезок заранее заданной длины, лежащий на данной прямой. Такое построение также выполняется способом прямоугольного треугольника.

Задача. *На комплексном двухпроекционном чертеже дана прямая l общего положения и точка A на ней (рис. 2.10). Требуется вдоль данной прямой от точки A отложить отрезок заданной длины m.* Решение. Отмечаем на прямой *l* произвольную точку *R*. На горизонтальной проекции отрезка строим прямоугольный треугольник $A_1R_1R_0$, катет которого R_1R_0 равен разности высот точек *A* и *R*. Гипотенуза A_1R_0 треугольника $A_1R_1R_0$ равна истинной длине отрезка *AR*. Откладываем вдоль гипотенузы A_1R_0 расстояние *m* и отмечаем точку B_0. “Возвращая” точку B_0 на проекции данной прямой, получаем чертеж отрезка AB, длина которого равна заданной величине m.

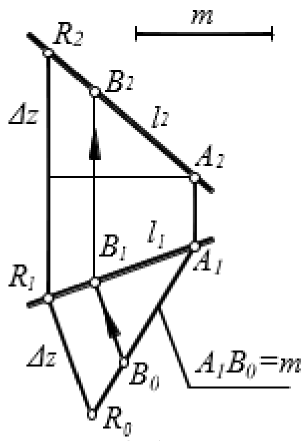
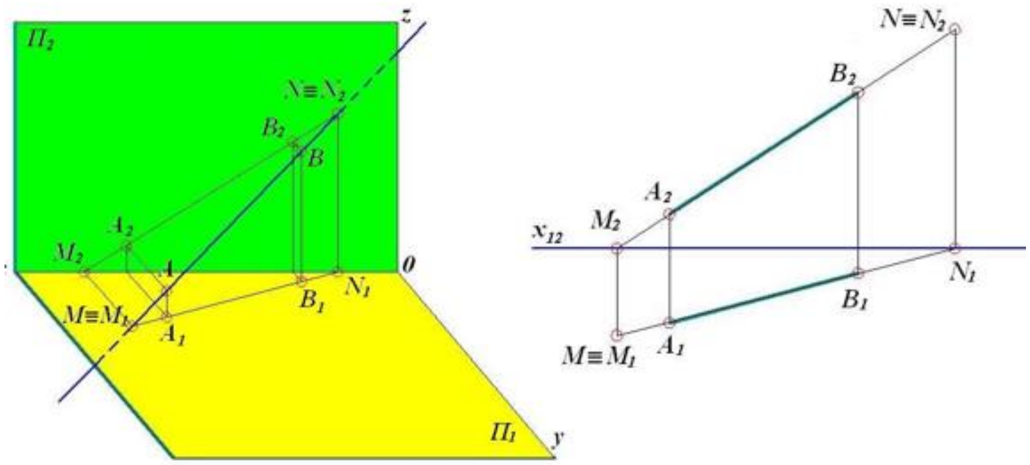


Рис. 2.10

2. 6. Следы прямой линии

Следы прямой линии – это точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций.

На рисунке 2.11 показаны точки ***M*** и ***N*** – это следы прямой ***AB***: точка ***M*** – горизонтальный след прямой; точка ***N*** – фронтальный след прямой.



а) модель б) эпюр

Горизонтальная проекция горизонтального следа (точка M_1) совпадает с самим следом, фронтальная проекция (точка M_2) лежит на оси проекций.

Рис. 2.11 – Нахождение горизонтального и фронтального следов прямой линии.

Фронтальная проекция фронтального следа (точка N_2) совпадает с самим следом (точкой N), а горизонтальная проекция (точка N_1) лежит на оси проекций.

Следы являются границами перехода прямой линии из одной четверти пространства в другую.

Отмеченные особенности в расположении следов проекций позволяет сформулировать следующие правила:

1. Для построения горизонтального следа M прямой необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с осью x_0 и в этой точке восстановить перпендикуляр к оси до пересечения с горизонтальной проекцией прямой.

2. Для построения фронтального следа N прямой нужно из точки пересечения горизонтальной проекции ее с осью Ox восстановить перпендикуляр до пересечения с фронтальной проекцией прямой.

2. 7. Проекции прямого угла

Угол – геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки. ***Углом между прямыми*** называется меньший из двух углов между лучами, параллельными этим прямым. ***Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой*** называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Из теоремы элементарной геометрии следует, что всякий плоский угол (острый, прямой, тупой) проецируется на плоскость в натуральную величину, если его обе стороны параллельны этой плоскости.

При проецировании прямого угла можно также сделать следующие выводы:

1. Если обе стороны угла параллельны какой-либо плоскости проекций, то прямой угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

2. Если одна сторона прямого угла параллельна какой-то плоскости

проекции, то прямой угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

3. Если обе стороны прямого угла прямые общего положения, то прямой угол проецируется искаженно на все три плоскости.

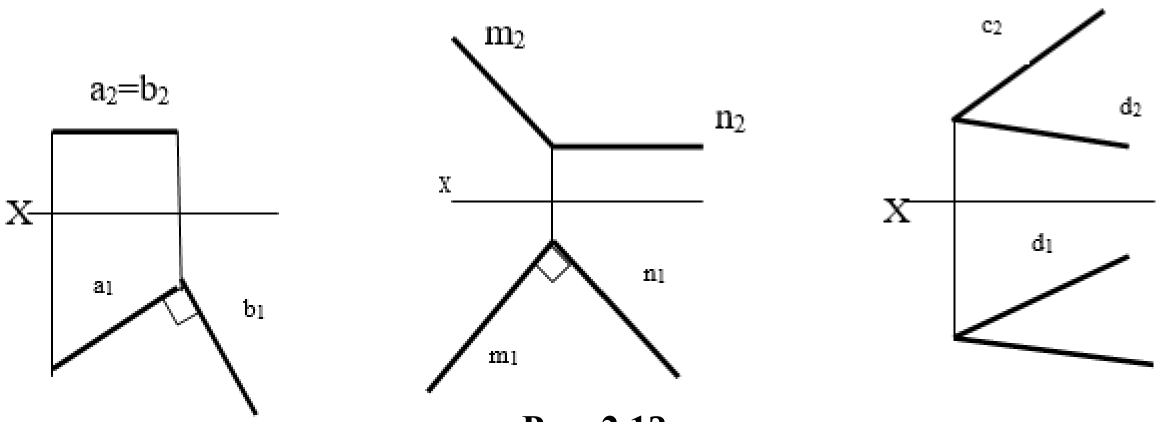


Рис. 2.12

2.8. Взаимное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут занимать положение: быть параллельными, пересекаться, скрещиваться.

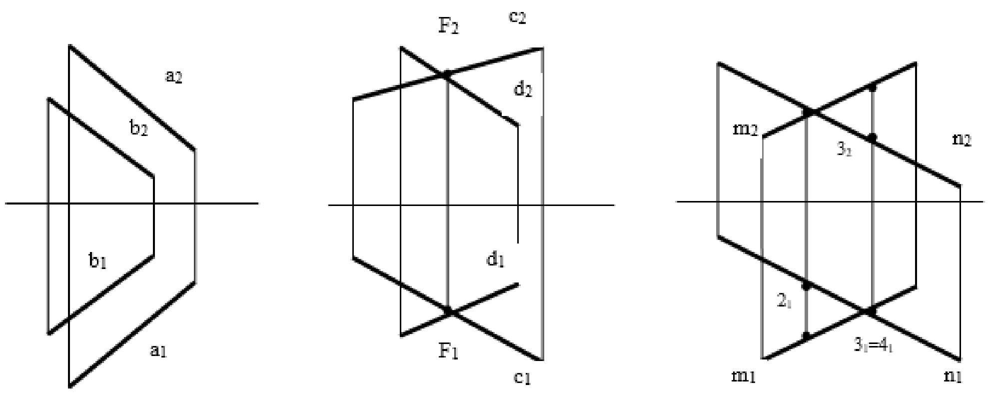


Рис. 2.13

Параллельными называются прямые, которые не пересекаются находятся в одной плоскости.

Пересекающимися называются прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие общую точку.

Скрещивающиеся прямые – прямые, которые не параллельны, не пересекаются, не лежат в одной плоскости.

Характеристики прямых:

1. Одноименные проекции взаимно параллельных прямых параллельны между собой.

2. Если прямые пересекаются, то их одноименные проекции также пересекаются, причем проекции точки пересечения лежат на одной линии связи.

3. Если прямые скрещиваются, то точки пересечения одноименных проекций не лежат на одной линии связи.

Конкурирующие точки

Две точки, лежащие на одном проецирующем луче, называются конкурирующими.

В этом случае проекции этих точек, принадлежащих двум прямым, не будут совпадать.

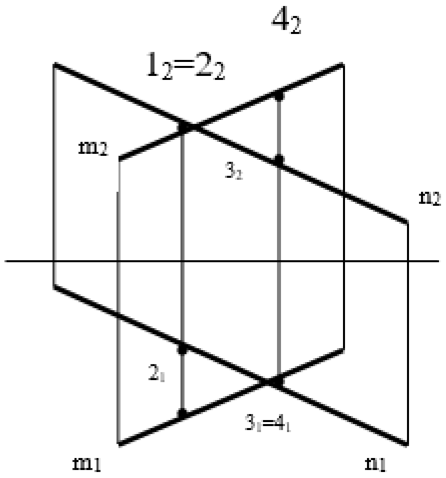


Рис. 2.14

Вопросы для самоконтроля

1.Как задать положение прямой в пространстве?
2. Что представляет собой прямая общего положения?
3. Какие частные положения прямой в пространстве вы знаете?
4.Что называется следами прямой?
5.Сформулируйте правило принадлежности точки прямой.
6. В чем состоит и для чего используют способ прямоугольного треугольника?
7. Проанализируйте построение отрезков по заданным координатам: ***A*** (80, 30, 40) и ***B*** (20, 30, 40); ***C*** (40, 60, 10) и ***D*** (40, 10, 20); ***E*** (50, 0, 50) и ***F*** (0, 60, 20). Постройте три проекции заданных прямых.
8. Сколько нужно иметь проекций, чтобы определить положение прямой в пространстве?
9. Как находится натуральная величина отрезка?
10.Дайте определение конкурирующим точкам и прямым.
11.Проведите примеры чертежей проецирующих прямых, линий уровня.

Лекция 3. Проекции плоскости. Взаимное положение точек, прямых и плоскостей.

План лекции 3:

3. 1. Способы задания плоскости.
3. 2. Плоскости общего и частного положения.
3. 3. Особые линии плоскости. Линии наибольшего наклона.
3. 4. Принадлежность точек и прямых плоскости.
3. 5. Пересечение прямой линии с плоскостью (основная позиционная задача).
3. 6. Определение видимости на чертеже.
3. 7. Взаимное пересечение плоскостей.

3. 1. Способы задания плоскости

На комплексном чертеже плоскость можно задать путем изображения геометрических элементов, определяющих положение плоскости в пространстве:

1. Тремя точками, не принадлежащими одной прямой.
2. Прямой и точкой, если точка не принадлежит этой прямой.
3. Двумя пересекающимися прямыми.
4. Двумя параллельными прямыми.
5. Треугольником или любой плоской фигурой.

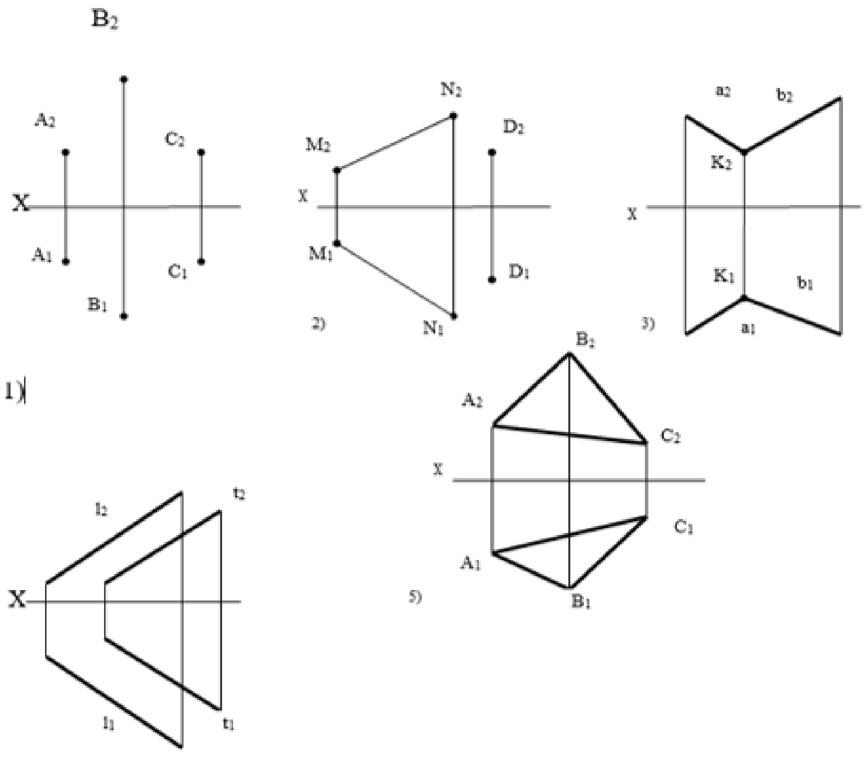


Рис. 3.1.

Плоскости обозначаются ∑, Т, Ψ, Ω, Θ, Q.
Запись: Q(A,B,C) Θ(ΔABC) Ψ(lIIt) T(MN,D) Σ(a∩b)

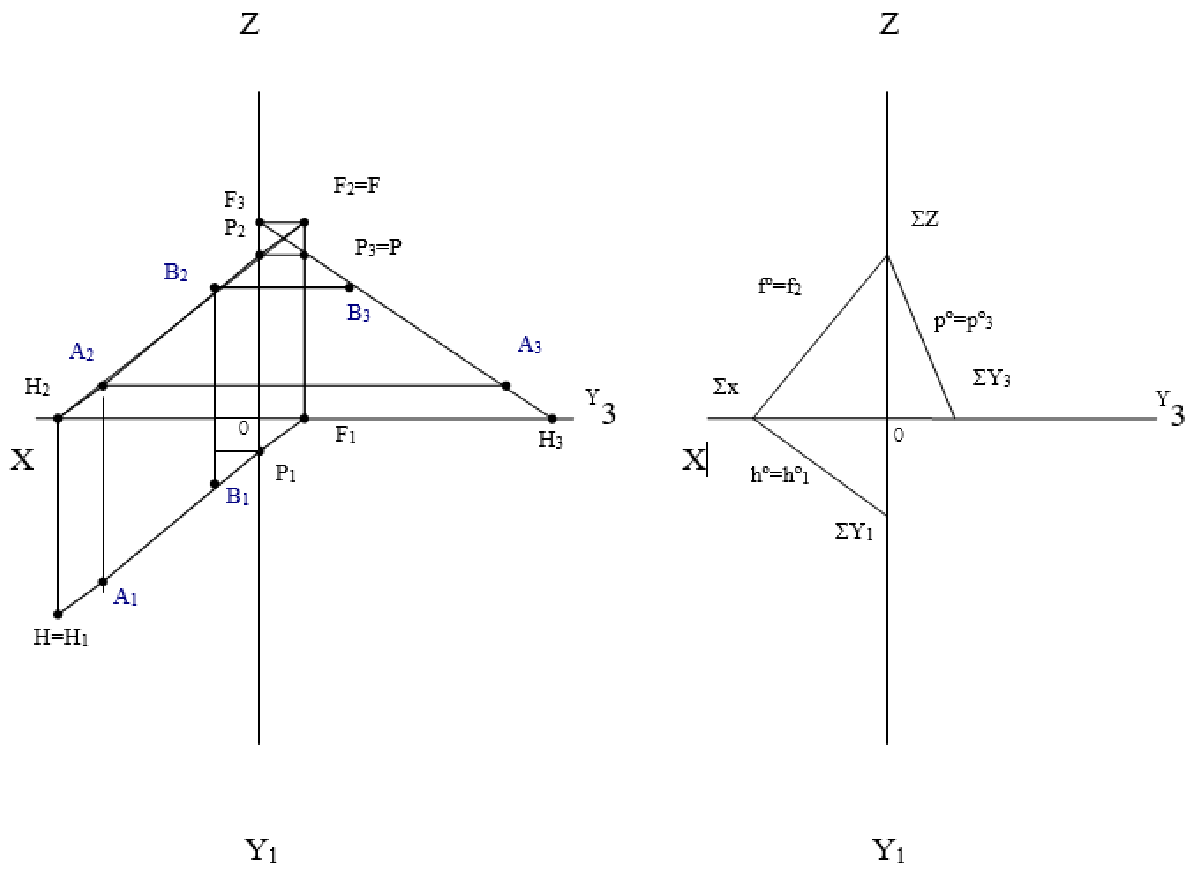


Рис. 3.2.

Следом плоскости *называется прямая, по которой плоскость пересекается с плоскостью проекции.*

Плоскость общего положения имеет три следа: горизонтальный, фронтальный и профильный.

Следы плоскости сливаются с одноименными своими проекциями

Если плоскость расположена наклонно ко всем трем плоскостям проекций, то каждая пара ее следов пересекается в точке называемой точкой схода следа (Σx, Σy, Σz). Следы прямых, принадлежащих плоскости, находятся на одноименных следах этой плоскости.

3. 2. Плоскости общего и частного положения.

Плоскости подразделяются на плоскости общего и частного положения (плоскости уровня и проецирующие плоскости).

Плоскостью общего положения *называется плоскость, наклонно расположенная ко всем трем плоскостям проекций.*

Плоскость общего положения проецируется искаженно на все три плоскости проекции.

Плоскость общего положения не проецируется в прямую линию ни на одну из плоскостей проекции.

3.2.1. Проецирующие плоскости

Горизонтально-проецирующей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекции.

Горизонтальные проекции всех точек, принадлежащих горизонтально-проецирующей плоскости располагаются на горизонтальном следе этой плоскости.

Это свойство называется "**собирательным**", а след, обладающим этим свойством, следом-проекцией плоскости.

Фронтальный след горизонтально-проецирующей плоскости $\perp$ оси ОХ, профильный след $\perp$ ОУ$_3$.

Фронтально-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекции. Фронтальный след-проекция обладает „***собирательным***“ свойством.

Профильно-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекции. Профильный след-проекция обладает „***собирательным***“ свойством.

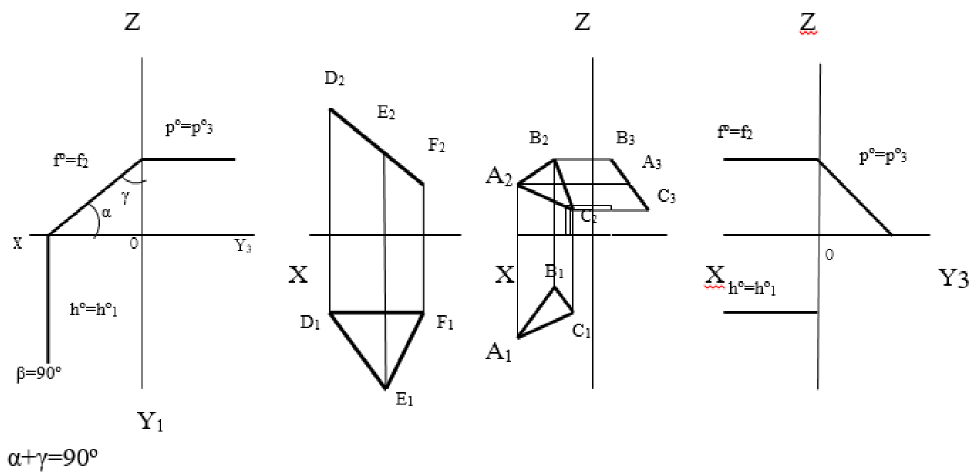


Рис. 3.3.

Характеристика проецирующих плоскостей:

1. Проецирующая плоскость, заданная не следами, изображается на одной из проекций в виде наклонной прямой, на двух других - в искаженную величину.

2. Проецирующая плоскость изображается следами, один из которых представляет собой наклонную прямую, два других перпендикулярны осям проекции. Проецирующую плоскость обычно задают одним следом-проекцией. Два других следа не показывают.

3. След-проекция обладает ”собирательным”свойством. (Все, что лежит в плоскости проецируется на след этой плоскости).

4. Углы, образованные следом-проекцией с осями координат,

определяют натуральные величины углов наклона данной плоскости к плоскостям проекции.

5. С одной плоскостью проекции проецирующая плоскость составляет угол 90°, сумма двух других=90°.

3.2.2. Плоскости уровня

Плоскостями уровня *называются плоскости, параллельные плоскостям проекции.*

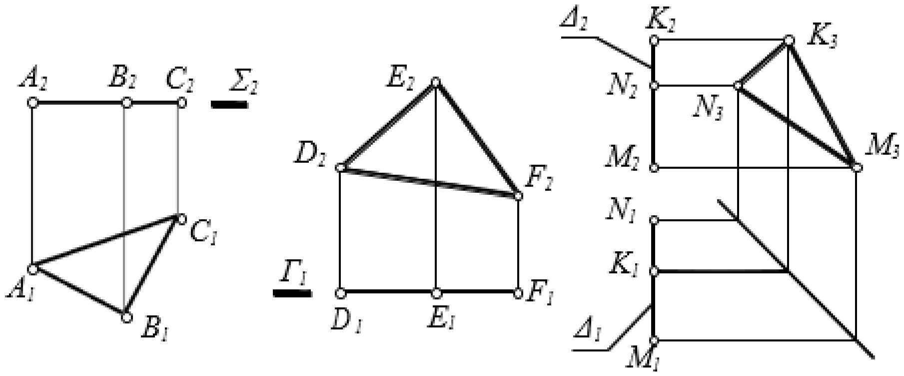


Рис. 3.4.

Характеристика плоскостей уровня:

1. Плоскости уровня, не заданные следами, проецируются на одну плоскость в натуральную величину, на две другие в виде прямых, параллельных или перпендикулярных осям проекции.

2. Плоскости уровня, заданные следами, имеют два следа, параллельных или перпендикулярных осям проекции.

3. Оба следа-проекции плоскости уровня обладают “собирательным” свойством.

3.3. Особые линии плоскости

Горизонталь плоскости – прямая, принадлежащая этой плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекции (h).

Фронталь плоскости – прямая, принадлежащая этой плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекции (f).

Профильная прямая плоскости – прямая, принадлежащая этой плоскости и параллельная профильной плоскости проекции (p).

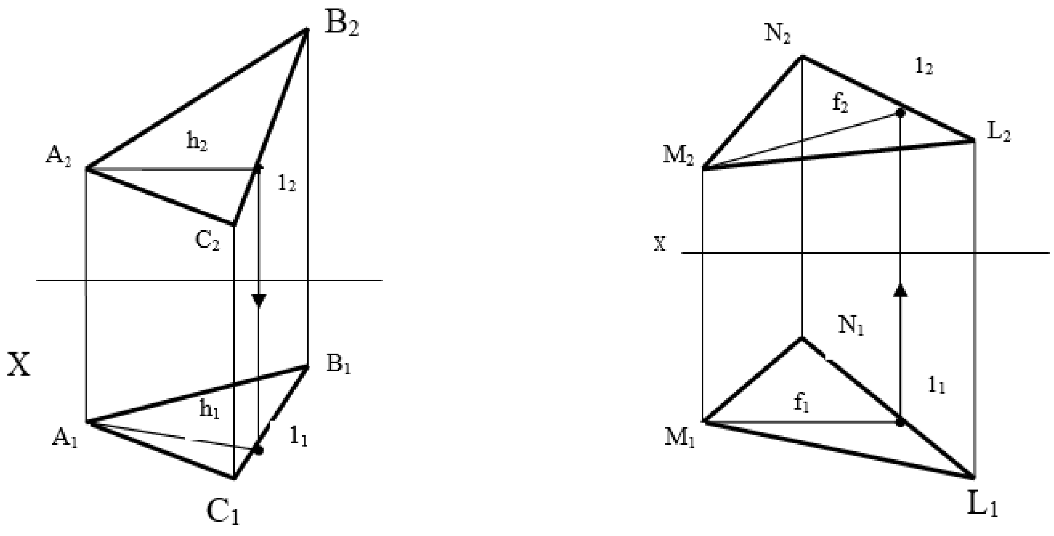


Рис. 3.5.

Характеристика особых линий:

1. В плоскости можно провести множество горизонталей, фронталей, профильных прямых, и все они будут параллельны между собой.

2. Если плоскость задана не следами, построение:

– горизонтали плоскости начинается с фронтальной проекции, которая параллельна оси ОХ;

– фронтали плоскости начинается с горизонтальной проекции, которая параллельна оси ОХ;

– профильной прямой следует начинать с проведения фронтальной проекции, параллельной оси OZ или горизонтальной проекции, параллельной оси $ОУ_1$.

3. Горизонтальная проекция горизонтали плоскости параллельна горизонтальному следу плоскости:

– фронтальная проекция фронтали плоскости параллельна фронтальному следу плоскости;

– профильная проекция профильной прямой плоскости параллельна профильному следу плоскости.

(При построении особых линий плоскости следует помнить, что следы прямых, лежащих в плоскости, расположены на одноименных следах этой плоскости.

Линия наибольшего наклона плоскости

Линия наибольшего наклона плоскости – *прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная линии уровня или перпендикулярная следу плоскости.*

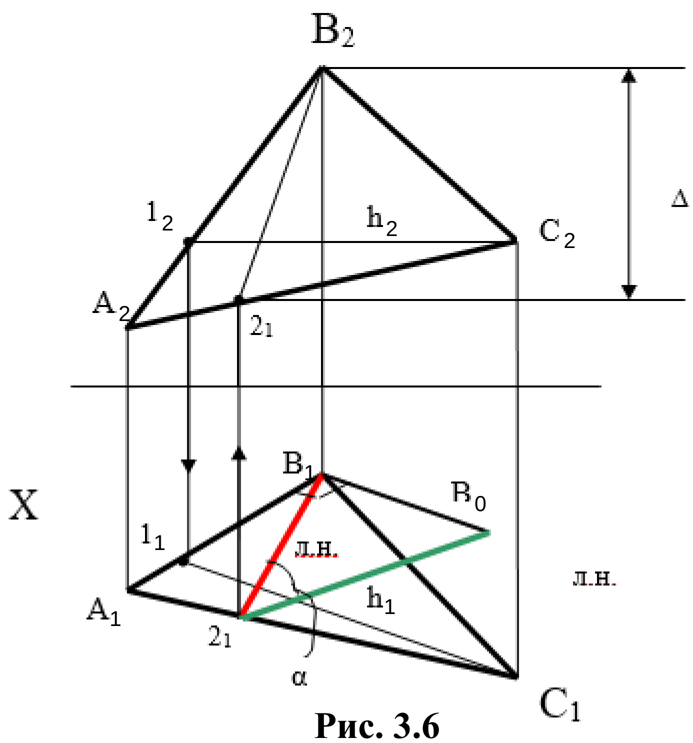


Рис. 3.6

Плоскость имеет линии наибольшего наклона относительно горизонтальной плоскости проекции $П_1$, фронтальной $П_2$, профильной $П_3$.

С помощью линий наибольшего наклона плоскости определяются углы наклона данной плоскости к плоскостям проекции.

Натуральную величину этих углов определяют с помощью прямоугольного треугольника.

3.4. Принадлежность точек и прямых плоскости

1. Прямая принадлежит плоскости, если две точки прямой принадлежат этой плоскости.

2. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через одну точку и параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.

3. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

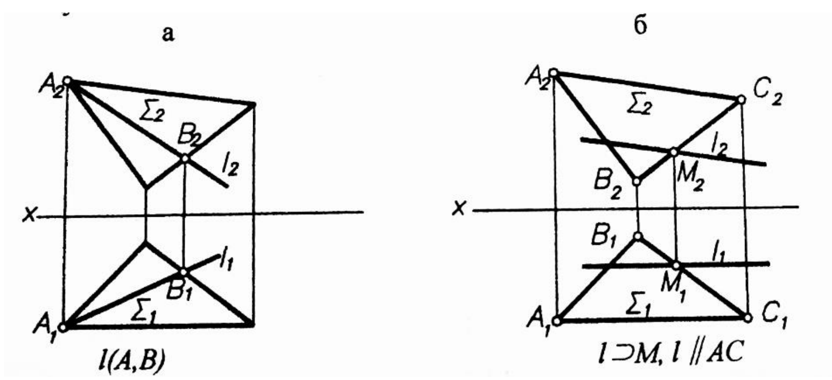


Рис. 3.7.

3. 5. Основная позиционная задача

Позиционными задачами называют задачи, в которых надо определить общие элементы геометрических фигур, заданных на чертеже. В начертательной геометрии рассматривают две позиционные задачи.

Первая позиционная задача: определение точки (или точек) пересечения произвольной кривой линии с произвольной поверхностью. В простейшем случае надо *найти точку пересечения прямой с плоскостью* (прямая – это простейшая линия, а плоскость – простейшая поверхность).

Вторая позиционная задача: построение линии пересечения двух произвольных поверхностей. В простейшем случае надо *найти линию пересечения двух плоскостей*.

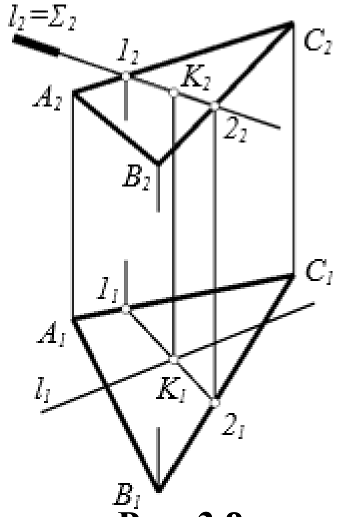


Рис. 3.8.

Первая позиционная задача. *На чертеже задана плоскость общего положения Г(ABC) и прямая общего положения l (рисунок 3.8). Требуется построить точку их пересечения.*

Для решения задачи надо выполнить три действия.

1. Через прямую *l* проведем вспомогательную секущую плоскость *Σ* и обязательно отметим ее на чертеже. На рисунке 3.8 вспомогательная плоскость *Σ*, проходящая через *l*, выбрана фронтально-проецирующей.

Внимание! Первое действие – самое главное! Если на чертеже не отметить вспомогательную секущую плоскость, то последующие действия утрачивают геометрический смысл!

2. Секущая плоскость *Σ* разрезает данную плоскость *ABC*. Отмечаем на чертеже линию разреза *1-2*.

3. Линия разреза *1-2* и прямая *l* лежат в одной и той же плоскости (в секущей плоскости *Σ*). Следовательно, прямые *1-2* и *l* пересекутся между собой в некоторой точке *K*. Эта точка и есть искомая точка пересечения прямой *l* и плоскости *ABC*.

Запишем порядок решения первой позиционной задачи в символической форме (в виде алгоритма).

Определение: *Алгоритм – совокупность последовательных однозначных операций, которые необходимо совершить для решения задачи.*

1. $l \subset \Sigma \perp П2$ (через прямую *l* проводим вспомогательную секущую фронтально-проецирующую плоскость *Σ*).

2. $\Sigma \cap Г(ABC)=1\text{-}2$ (строим линию *1-2* пересечения данной плоскости *Г(ABC)* и вспомогательной плоскости *Σ*).

3. $l \cap (1\text{-}2)=K$ (отмечаем искомую точку *K*). Задача решена.

Результат построения не изменится, если в первом действии алгоритма через прямую *l* будет проведена другая вспомогательная секущая плоскость, например, горизонтально-проецирующая (проверить самостоятельно).

3. 6. Определение видимости на чертеже

Плоскость треугольника *ABC* считается непрозрачной. Проекции прямой *l* частично будут невидимы (“закрыты” от зрителя непрозрачным треугольником). Поэтому для полного решения первой позиционной задачи надо не только найти точку *K* пересечения прямой с плоскостью, но и показать на чертеже видимые участки этой прямой (*определить видимость*). Для определения видимости проекций прямой *l* применяют *способ конкурирующих точек*.

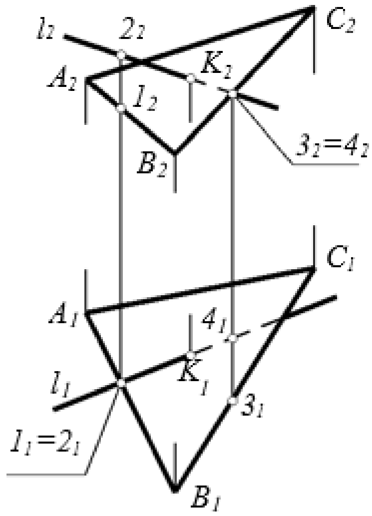


Рис. 3.9.

Чтобы определить видимость на горизонтальной плоскости проекций, берем какую-либо пару горизонтально-конкурирующих точек, например, горизонтально-конкурирующие точки *1* и *2* (рис. 3.9). Точка *1* находится на стороне *AB* треугольника, точка *2* – на прямой *l*. Точка *2* расположена *выше* точки *1*, поэтому прямая *l* проходит *над* стороной *AB*. Следовательно, на горизонтальной проекции левый участок прямой *l* – видимый. В точке *K* прямая *l* пересекается с плоскостью треугольника. Поэтому на горизонтальной проекции правый участок прямой *l* – невидимый.

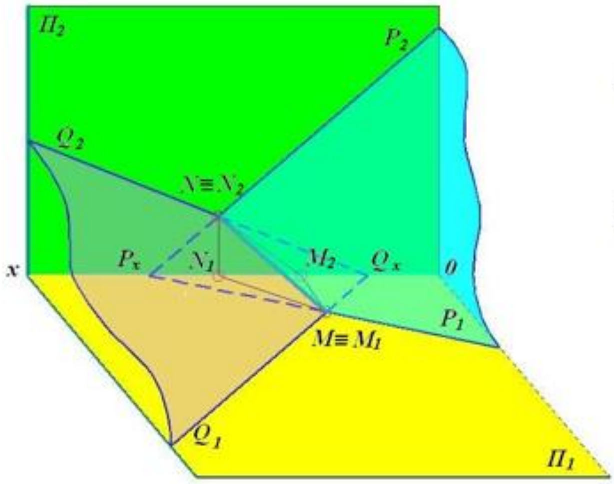
Чтобы определить видимость фигур на фронтальной плоскости проекций, берем какую-либо пару фронтально-конкурирующих точек, например, пару точек *3* и *4* (см. рис.3.9). Точка *3* находится на стороне *BC* треугольника, точка *4* – на прямой *l*. Точка *3* расположена *перед* точкой *4*, поэтому на фронтальной проекции сторона *BC* треугольника проходит *перед* прямой *l*. В этом месте треугольник закрывает от зрителя прямую *l*. Поэтому правая часть фронтальной проекции прямой *l* – невидимая. В точке *K* прямая *l* пересекается с плоскостью треугольника, поэтому левый участок фронтальной проекции прямой *l* – видимый.

3. 7. Линия пересечения двух плоскостей

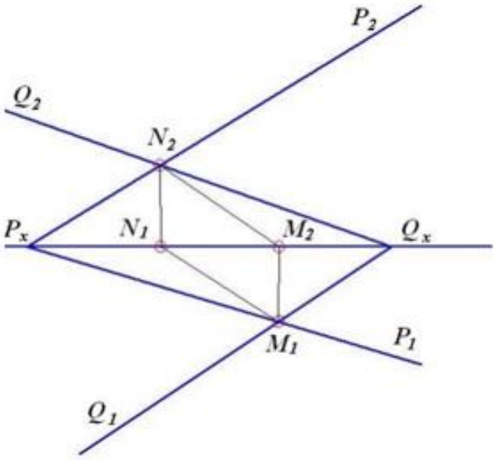
Две плоскости в пространстве могут быть либо взаимно параллельны, в частном случае совпадая друг с другом, либо пересекаться. Взаимно перпендикулярные плоскости представляют собой частный случай пересекающихся плоскостей.

Для того, чтобы на комплексном чертеже построить линию пересечения двух плоскостей, необходимо найти на этом чертеже две точки, принадлежащих одновременно обеим плоскостям.

Если плоскости заданы следами, то точки пересечения одноименных следов являются точками пересечения плоскостей (рис. 3.10). Прямая проходящая через эти точки является общей для обеих плоскостей, то есть их линией пересечения.



а) модель



б) эпюр

Рис. 3.10 – Линия пересечения двух плоскостей.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является геометрическим определителем плоскости?
2. Что называется следами плоскости?
3. Приведите примеры чертежей проецирующих плоскостей, плоскостей уровня.
4. Сформулируйте правила принадлежности точки плоскости, прямой плоскости.
5. Как может быть задана на чертеже плоская фигура?
6. Какие частные положения плоских фигур вы знаете?
7. При каких условиях прямая будет принадлежать плоскости?
8. При каких условиях точка принадлежит плоскости?
9. Что представляет собой горизонталь и фронталь плоскости?
10. Что представляет собой линия наибольшего ската плоскости и в каком случае следует ее применять?

Лекция 4. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

План лекции 4:

4.1. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

Определение. *Плоскость и прямая называются параллельными, если они пересекаются в несобственной точке*. Отсюда следует **теорема**: *если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости* (доказать самостоятельно).

Пусть через точку *M* требуется провести прямую, параллельную данной плоскости *Г*. Плоскость *Г* задана на чертеже треугольником *ABC* (рис. 4.1.). Начертим в плоскости *Г* произвольную прямую (например, прямую *CK*) и проведем через точку *M* прямую *l*, параллельную прямой *CK*. Прямая *l* параллельна плоскости *Г*.

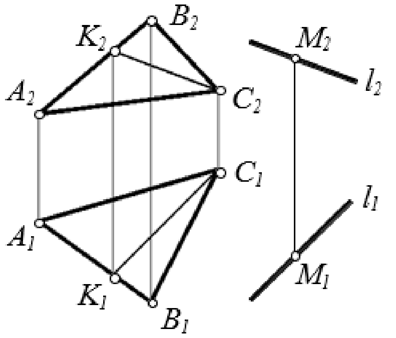


Рис. 4.1

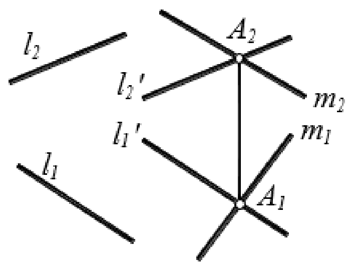


Рис. 4.2

Пусть через прямую *m* надо провести плоскость, параллельную данной прямой *l* (рис. 4.2). Через произвольную точку *A* на прямой *m* проведем прямую *l'*, параллельную прямой *l*. Две пересекающиеся прямые *m* и *l'* определяют плоскость, параллельную прямой *l*.

Определение. *Две плоскости называются параллельными, если они пересекаются по несобственной прямой*. Отсюда следует **теорема**: *если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны* (доказать самостоятельно).

Задача. Пусть через точки M и N требуется провести плоскости, параллельные данной плоскости Σ. Плоскость Σ задана треугольником ABC (рис. 4.3). Проведем через точку M две прямые a и b, параллельные сторонам AB и BC. Пересекающиеся прямые a и b определяют плоскость Σ', параллельную данной плоскости Σ.

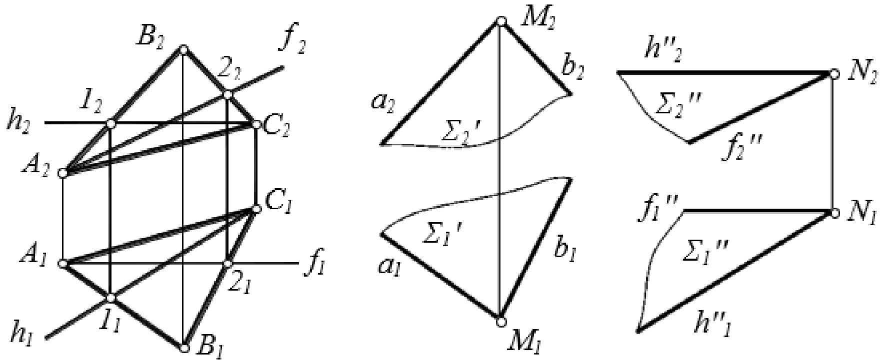


Рис. 4.3

Проведем в данной плоскости $\Sigma(ABC)$ горизонталь h и фронталь f. Плоскость Σ'', параллельная плоскости Σ, может быть задана горизонталью h'' и фронталью f'', параллельными горизонтали h и фронтали f плоскости Σ. Такая плоскость проведена через точку N (см. рис. 4). Плоскости $\Sigma(h\cap f)$, $\Sigma'(a \cap b)$ и $\Sigma''(h''\cap f'')$ взаимно параллельны.

4.2. Признаки перпендикулярности прямых и плоскостей

Определение 1. *Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.* Перпендикулярные прямые могут пересекаться, но могут быть и скрещивающимися.

Определение 2. *Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она пер-пендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.*

Определение 3. *Две пересекающиеся плоскости называются взаимно перпендику-лярными, если образованный ими двугранный угол равен 90°.*

Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей, доказываемые в школьном курсе геометрии [13], могут быть сформулированы в виде признаков перпендикулярно-сти.

Признак 1. *Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых, перпендикулярна к обеим параллельным прямым.* Пусть прямые a и b параллельны (рис. 4.4). Проведем перпендикуляр t к одной из прямых, например, к прямой a. Тогда прямая t будет перпендикулярна не только к прямой a, но и к прямой b.

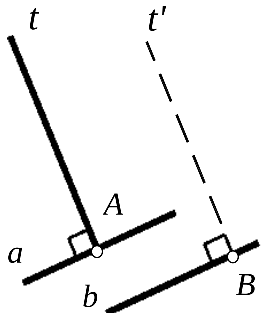


Рис. 4.4

Из этого признака следует, что две взаимно перпендикулярные прямые в пространстве не обязаны пересекаться. Они могут скре-щиваться, но при этом быть взаимно перпендикулярны. Например,

на рис. 4.4 каждая из параллельных прямых t и t' перпендикулярнакаждой из прямых a и b.

Признак 2. *Если прямая t перпендикулярна каким-нибудь двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости Σ, то прямая t перпендикулярна к этой плоскости Σ (рис. 4.2).*

Две пересекающиеся прямые a и b определяют в пространстве некоторую плос-кость *Σ*. Проведем перпендикуляр *t* к этим прямым (см. рис. 4.5). Согласно признаку 2, прямая *t* перпендикулярна к плоскости *Σ*.

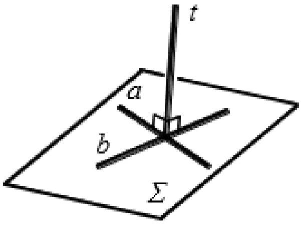


Рис. 4.5

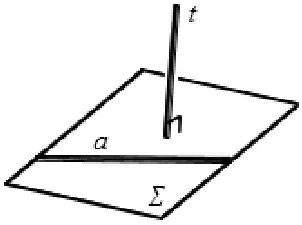


Рис. 4.6

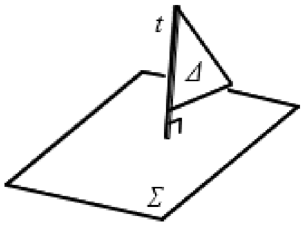


Рис. 4.7

Признак 3. *Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна лю-бой прямой в этой плоскости* (этот признак перпендикулярности следует непосредст-венно из определения 2).

Дана плоскость *Σ*. Проведем к ней перпендикуляр *t* (рис. 4.6). Согласно признаку 3, прямая *t* перпендикулярна к произвольной прямой *a*, лежащей в плоскости *Σ*.

Признак 4. *Если плоскость Δ проходит через перпендикуляр к плоскости Σ, то плоскости Δ и Σ взаимно перпендикулярны (рис. 4.7). Дана плоскость Σ. Проведем к ней перпендикуляр t. Через прямую t проведем про-извольную плоскость Δ (см. рис. 4.7). Согласно признаку 4, плоскость Δ перпендику-лярна плоскости Σ.*

Признаки перпендикулярности используются при построении взаимно перпендику-лярных прямых и плоскостей на комплексном чертеже.

4.3. Теорема 1 (о проекциях прямого угла)

Если одна сторона прямого угла параллельна какой-либо плоскости проекций, а другая сторона является прямой общего положения, то прямой угол изображается на этой плоскости проекций прямым углом.

Пусть отрезок *AB* перпендикулярен отрезку *BC*, причем отрезок *AB* – горизонталь ($AB||\Pi_1$), а отрезок *BC* – прямая общего положения (рис. 4.8). Докажем, что угол $A_1B_1C_1$ – прямой, то есть $A_1B_1 \perp B_1C_1$.

Доказательство

1) Отрезок *AB* перпендикулярен отрезку *BC* по условию: $AB \perp BC$.

2) Отрезок *AB* перпендикулярен линии связи *BB1* по построению. Следовательно (в соответствии с признаком 2 перпендикулярности прямой и плоскости), отрезок *AB* перпендикулярен плоскости *Δ(BC∩BB1)*.

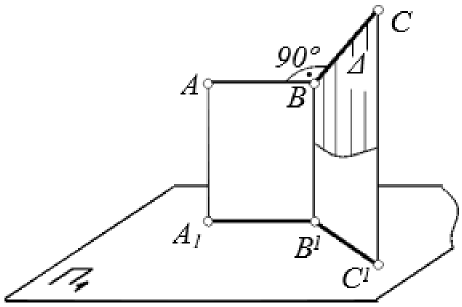


Рис. 4.8

3) Проекция A_1B_1 отрезка AB параллельна самому отрезку AB по условию. Отрезок AB перпендикулярен плоскости Δ, следовательно, проекция A_1B_1 также перпендикулярна плоскости Δ.

4) Поскольку прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости Δ, то она перпендикулярна прямой B_1C_1, лежащей в плоскости Δ (признак 3). Следовательно, $A_1B_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 1. ***Если одна из взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, то данные скрещивающиеся прямые изображаются на этой плоскости проекций прямым углом.***

Одну из сторон “висящего в воздухе” прямого угла *ABC*, показанного на рис. 4.8 (например, сторону *BC*), можно мысленно переместить в пространстве параллельно самой себе. Тогда прямая *BC* выйдет из пересечения со стороной *AB*. Но горизонтальные проекции прямых *AB* и *BC* все равно образуют прямой угол.

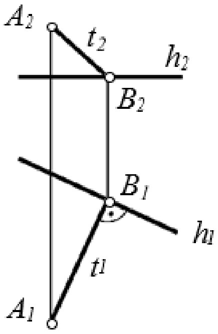


Рис. 4.9

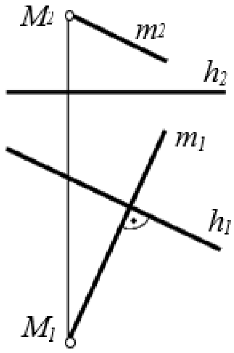


Рис. 4.10

Рассмотрим примеры построения комплексных чертежей взаимно перпендикулярных прямых.

Задача 1. *На чертеже дана горизонталь h и точка A (рис. 4.9). Требуется из точки A опустить перпендикуляр t на прямую h.* Требование “опустить перпендикуляр на прямую” означает, что перпендикуляр к прямой должен с ней пересечься.

В соответствии с теоремой 1, если прямая перпендикулярна горизонтали *h*, то их горизонтальные проекции t_1 и h_1 должны быть взаимно перпендикулярны. Горизонталь *h* и прямая *t*, показанные на рис. 4.9, пересекаются в точке *B* и образуют прямой угол. Задача имеет единственное решение, так как из точки *A* можно опустить единственный перпендикуляр на прямую *h*.

Задача 2. *Дана горизонталь h и точка M (рис. 4.10). Требуется через точку M провести прямую, перпендикулярную к горизонтали h, но не пересекающуюся с ней.*

Проведем через точку *M* какую-нибудь прямую *m*, горизонтальная проекция *m1* которой образует прямой угол с *h1*. В соответствии со следствием из теоремы 1, горизонталь *h* и прямая *m* перпендикулярны друг другу, но не пересекаются между собой (см. рис. 4.10). Задача имеет бесчисленное множество решений. Все прямые, проходящие через точку *M* и перпендикулярные к горизонтали *h*, образуют плоскость, перпендикулярную к *h*.

Задача 3. *Дана фронталь f и точка*

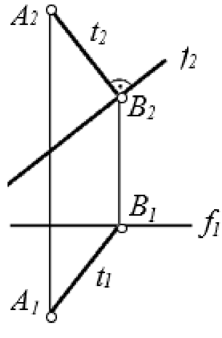


Рис. 4.11

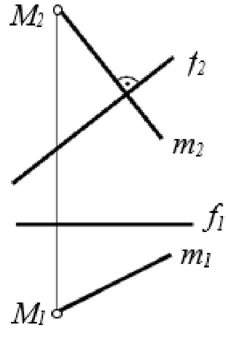


Рис. 4.12

A (рис. 4.11). Требуется из точки A опустить перпендикуляр t на прямую f. Если прямая *t* перпендикулярна фронтали *f*, то, в соответствии с теоремой 1, их фронтальные проекции t_2 и f_2 должны быть взаимно перпендикулярны (см. рис. 4.11). Фронталь *f* и прямая *t*, показанные на чертеже, пересекаются в точке *B* и*1* образуют прямой угол. Задача имеет единственное решение.

Задача 4. *Дана фронталь f и точка M (рис. 4.12). Требуется через точку M провести прямую, перпендикулярную к фронтали f, но не пересекающуюся с ней.*

Проведем через точку *M* какую-нибудь прямую *m*, фронтальная проекция m_2 которой образует прямой угол с f_2. Фронталь *f* и прямая *m*, показанные на рис. 4.12, перпендикулярны друг другу (согласно следствию из теоремы 1), но между собой не пересекаются (скрещиваются). Задача имеет бесчисленное множество решений. На рис. 4.12 показано только одно из решений задачи.

4.4. Теорема 2 (о взаимной перпендикулярности прямых и плоскостей)

Напомним признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости. В частности, прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна к главным линиям плоскости – горизонтали и фронтали. Отсюда следует теорема об изображении на комплексном чертеже перпендикуляра к плоскости общего положения.

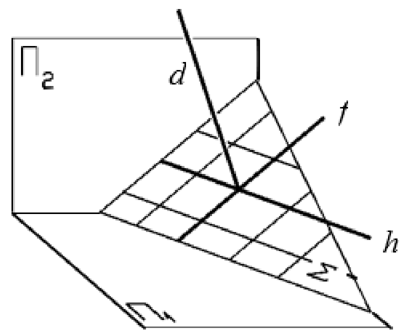


Рис. 4.10

Если прямая d перпендикулярна к плоскости, то на комплексном чертеже горизонтальная проекция d1 прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали ($d_1 \perp h_1$), а фронтальная проекция d_2 прямой перпендикулярна фронтальной проекции фронтали ($d_2 \perp f_2$), принадлежащим этой плоскости.

Пусть прямая *d* перпендикулярна к плоскости общего положения *Σ* (рис. 4.13). Начертим в плоскости *Σ* ее главные линии – горизонталь *h* и фронталь *f*. Докажем,

что на комплексном чертеже проекции перпендикуляра *d* подчиняются условиям: $d1 \perp h1$, $d2 \perp f2$.

4.4.1. Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости

Напомним утверждение теоремы 2. Плоскость *Σ* и прямая *m* взаимно перпендикулярны, если на чертеже выполнены условия: $m1 \perp h1$, $m2 \perp f2$, где

h и f – главные линии плоскости Σ.

“**Прямая” задача.** *Через данную точку M провести прямую m, перпендикулярную к плоскости Σ общего положения.* Плоскость Σ задана на чертеже прямыми a и b, пересекающимися в точке K (рис. 4.14).

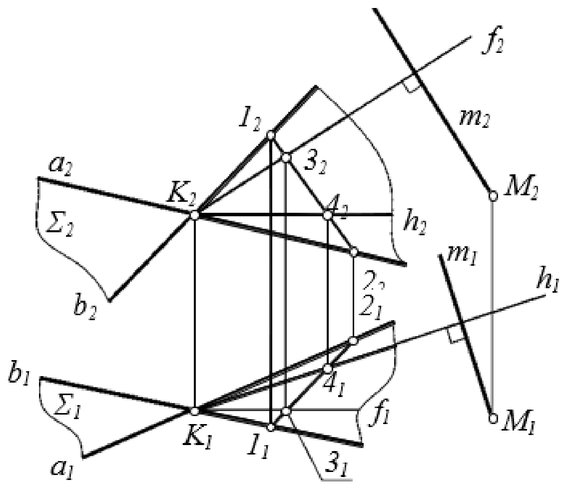


Рис. 4.14

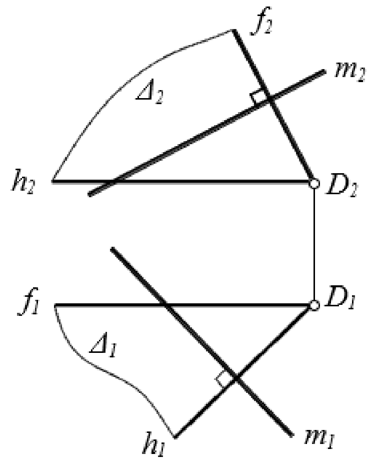


Рис. 4.15

Начертим главные линии плоскости Σ (горизонталь h и фронталь f). Для построения этих линий в плоскости Σ проведена произвольная вспомогательная прямая *1-2*. На этой прямой отмечены точки *3* и *4*, принадлежащие фронтали и горизонтали.

Проведем через точку M прямую m таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2: горизонтальная проекция m_1 прямой m перпендикулярна к h_1, а фронтальная проекция m_2 прямой m перпендикулярна к f_2. Прямая m (m_1, m_2) перпендикулярна к плоскости Σ. Задача решена.

“Обратная” задача. *Через точку D провести плоскость Δ, перпендикулярную прямой общего положения m* (рис. 4.15).

Плоскость, перпендикулярная к прямой общего положения, может быть задана пересекающимися горизонталью и фронталью, перпендикулярными к данной прямой. На рис. 4.15 через точку D проведены горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы выполнить условия: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$. Задача решена. Действительно, в соответствии с теоремой 2, начерченная на рис. 4.15 плоскость $\Delta(h \cap f)$ перпендикулярна прямой m. Прямая m перпендикулярна как горизонтали h, так и фронтали f.

4.4.2. Построение взаимно перпендикулярных плоскостей

Плоскость, перпендикулярную к данной плоскости, можно провести двумя способами: либо через прямую, перпендикулярную данной плоскости, либо перпендикулярно прямой, принадлежащей заданной плоскости.

Задача. *Плоскость Σ общего положения задана пересекающимися*

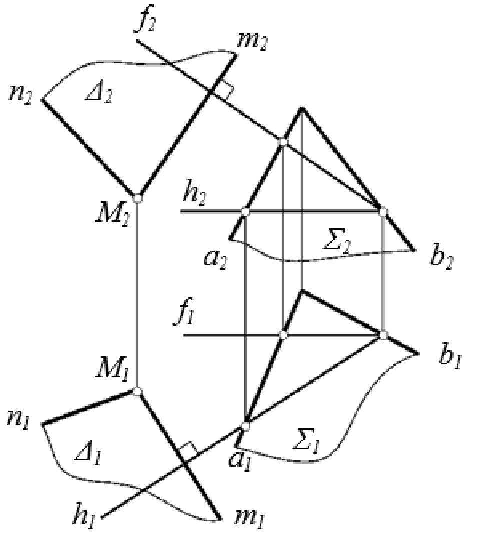


Рис. 4.16

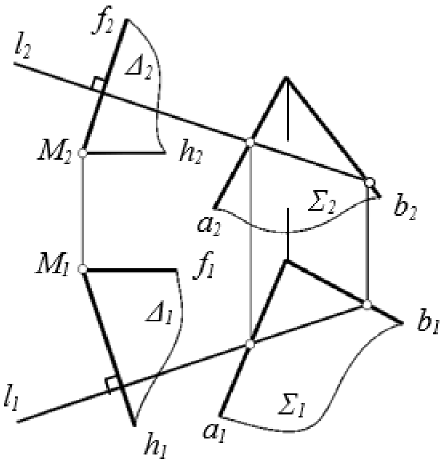


Рис. 4.17

прямыми a и b. Требуется через данную точку M провести плоскость Δ, перпендикулярную к плоскости Σ.

<u>Первый способ</u>

Начертим в плоскости Σ главные линии (горизонталь и фронталь), затем в соответствии с теоремой 2 проведем через точку M перпендикуляр m к плоскости Σ: $m1 \perp h1$ и $m2 \perp f2$ (рис. 4.16). Любая плоскость, проходящая через прямую m, перпендикулярна плоскости Σ. Проведем через точку M произвольную прямую n. Пересекающиеся прямые m и n определяют в пространстве плоскость Δ, перпендикулярную плоскости Σ.

Имеется бесчисленное множество решений, так как через перпендикуляр к плоскости Σ можно провести бесчисленное множество плоскостей. Все они перпендикулярны плоскости Σ.

<u>Второй способ</u>

Проведем в плоскости $\Sigma(a \cap b)$ произвольную прямую l (рис. 4.17). Плоскость Δ, перпендикулярная к прямой l, задается пересекающимися горизонталью и фронталью.

На рис. 4.17 через точку M проведены горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости: $h1 \perp l1$ и $f2 \perp l2$. Плоскость Δ, заданная горизонталью h и фронталью f, перпендикулярна к прямой l.

Прямая l лежит в плоскости Σ, следовательно, плоскость $\Delta(h \cap f)$ перпендикулярна к плоскости Σ.

Имеется бесчисленное множество решений: плоскость, перпендикулярная любой прямой l в плоскости Σ, будет перпендикулярна к Σ.

4.4.3. Построение взаимно перпендикулярных прямых

Напомним один из признаков перпендикулярности прямых и плоскостей: *если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости*. Следовательно, для построения перпендикуляра к данной прямой m надо провести плоскость *Σ*, перпендикулярную к этой прямой. Любая прямая, лежащая в плоскости *Σ*, будет перпендикулярна прямой *m*.

Задача: *На чертеже (рис. 4.18) дана прямая m общего положения. Требуется через данную точку M провести прямую a, перпендикулярную прямой m.*

Через точку *M* проведем плоскость *Σ*, перпендикулярную прямой *m*. Плоскость *Σ*, перпендикулярная к прямой общего положения *m*, может быть задана пересекающимися горизонталью и фронталью, каждая из которых проводится перпендикулярно к прямой m.

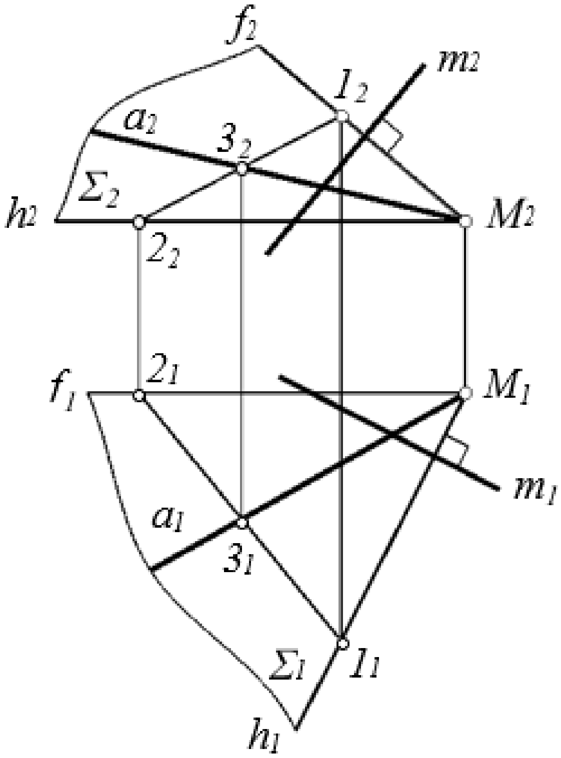


Рис. 4.18

На рис. 4.18 через точку *M* проведены горизонталь *h* и фронталь *f* таким образом, чтобы выполнить условия:

$m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$. В соответствии с теоремой 2, начерченная на рис. 4.18 плоскость *Σ*, заданная горизонталью *h* и h_1 фронталью *f*, перпендикулярна прямой *m*.

Любая прямая в плоскости Σ перпендикулярна прямой *m*. На чертеже показана только одна такая прямая (прямая *a*). Скрещивающиеся прямые общего положения m и a взаимно перпендикулярны.

Задача имеет множество решений: любая прямая в плоскости *Σ*, проходящая через точку *M*, перпендикулярна прямой *m*, то есть удовлетворяет условию задачи.

Среди найденного множества прямых, проходящих через точку *M*, есть единственная прямая, которая не только перпендикулярна к прямой *m*, но и пересекается с ней. Как построить такую прямую?

4.5. Решение типовых задач

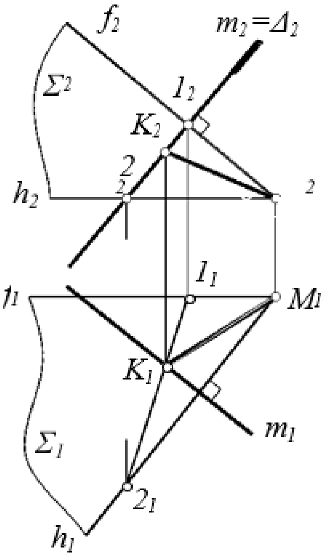


Рис. 4.19

Рассмотрим несколько геометрических задач, в которых требуется выполнять на чертеже построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.

Задача 1. *Опустить перпендикуляр из точки M на прямую m общего положения (рис. 4.19).*

Через точку *M* проведем плоскость *Σ*, перпендикулярную прямой *m*. Зададим эту плоскость горизонталью и фронталью так, чтобы на чертеже выполнялись условия теоремы 2: $h_1 \perp m_1$ и $f_2 \perp m_2$. Все прямые в плоскости *Σ* перпендикулярны прямой *m*.

Найдем точку *K* пересечения прямой *m* с плоскостью *Σ*. Для построения точки *K* следует применить схему решения первой позиционной задачи: провести через *m* вспомогательную секущую плоскость *Δ*, построить линию разреза *1-2* и отметить искомую точку $K=m\cap(1\text{-}2)$.

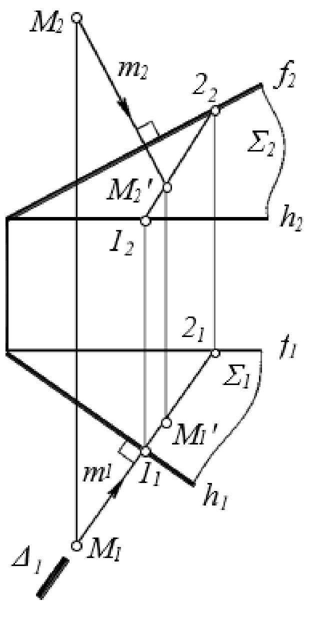


Рис. 4.20

Прямая *MK* лежит в плоскости *Σ*, следовательно, она перпендикулярна прямой *m*. При этом прямая *MK* пересекает прямую *m*. Поэтому отрезок *MK* есть искомый перпендикуляр, опущенный из точки *M* на прямую *m*.

Задача 2. *Найти расстояние от точки M до прямой m.* Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки *M* на прямую *m*. Поэтому сначала надо опустить перпендикуляр *MK* на прямую *m* (см. рис. 4.19), а затем определить истинную длину отрезка *MK* способом прямоугольного треугольника.

Задача 3. *Построить ортогональную проекцию точки M на плоскость Σ* общего положения (рис. 4.20).

Для построения ортогональной проекции надо через точку *M* провести проецирующий луч *m*, перпендикулярный плоскости *Σ*. Точка пересечения *M'* этого луча с плоскостью *Σ* – ортогональная проекция точки *M* на плоскость *Σ*.

Чтобы начертить прямую *m*, перпендикулярную плоскости *Σ*, надо выполнить условия: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$, где h_1и *f* – главные линии плоскости *Σ* (теорема 2). После построения перпендикуляра *m* находим точку *M'* пересечения этого перпендикуляра *m* с плоскостью *Σ*, используя вспомогательную секущую плоскость *Δ*. Точка *M'* – искомая ортогональная проекция.

Задача 4. *Найти расстояние от точки M до плоскости Σ.*

Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Поэтому сначала надо опустить перпендикуляр *MM'* из точки *M* на плоскость *Σ* (см. рис. 4.20), затем определить истинную длину отрезка *MM'* способом прямоугольного треугольника.

Геометрические места точек или прямых, удовлетворяющих заданным условиям

Перечислим определения некоторых геометрических мест, встречающихся при решении комбинированных задач.

1. Геометрическое место точек, удаленных от данной точки *O* на расстояние *R*, есть поверхность сферы с центром *O* и радиусом *R*.

2. Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой *j* на расстояние *R*, есть поверхность цилиндра вращения с осью *j* и радиусом *R*.

3. Геометрическое место точек, удаленных от данной плоскости на заданное расстояние – две плоскости, параллельные данной.

4. Геометрическое место прямых, проходящих через точку *S* на прямой *j* и наклоненных к *j* под постоянным углом – прямолинейные образующие конуса вращения с вершиной *S* и осью *j*.

5. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку *S* и равнонаклоненных к данной плоскости *Σ* – образующие конуса вращения с вершиной *S* и осью, перпендикулярной к плоскости *Σ*.

6. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек *A* и *B*, есть плоскость, перпендикулярная отрезку *AB* и проходящая через его середину (срединная плоскость).

7. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек *A, B* и *C*, есть перпендикуляр к плоскости этих точек, проходящий через центр окружности *ABC*.

8. Геометрическое место точек, равноудаленных от четырех точек *A, B, C, D*, не лежащих в одной плоскости – точка (центр сферы, проходящей через данные точки *A, B, C, D*).

9. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей *Σ* и *Δ* – биссекторная плоскость двугранного угла $\Sigma \cap \Delta$.

Вопросы для повторения

1. Сформулировать признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей, признак параллельности двух плоскостей.

2. Сколько прямых, параллельных данной плоскости, можно провести через данную точку пространства?

3. Сформулировать признаки перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей.

4. Могут ли скрещивающиеся прямые быть взаимно перпендикулярны?

5. Сформулировать условие, при котором две прямые, расположенные в пространстве перпендикулярно друг другу, изображаются на плоскости проекций Π_1 или Π_2 взаимно перпендикулярными прямыми (теорема 1 о проекциях прямого угла).

6. Сколько прямых, перпендикулярных к данной прямой, можно провести через данную точку пространства?

7 Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки пространства на данную прямую?

8. Как изображается на чертеже прямая линия, перпендикулярная к данной плоскости (теорема 2 о проекциях прямой, перпендикулярной к плоскости)?

9. Сколько перпендикуляров к плоскости можно провести через данную точку пространства?

10. Сколько плоскостей, перпендикулярных к данной плоскости, можно провести через данную точку пространства?

Лекция 5. Линии поверхности. Задание и изображение поверхности

План лекции 5:

В предыдущих лекциях были рассмотрены чертежи основных геометрических объектов трехмерного пространства (точки, прямой и плоскости) и связанные с ними метрические и позиционные задачи.

Этим, разумеется, не исчерпывается содержание начертательной геометрии, предмет изучения которой – все многообразие геометрических фигур трехмерного пространства, в том числе кривых линий и криволинейных поверхностей. Рассмотрим основные типы кривых линий и поверхностей и способы их изображения на проекционном чертеже.

5.1. Линии

Линия – геометрическое понятие, которому в разных разделах геометрии дают раз-личные определения. В начертательной геометрии *линию рассматривают либо как траекторию движущейся точки, либо как границу поверхности, либо как результат взаимного пересечения поверхностей.*

Простейшая линия – прямая. Прямую линию можно считать либо траекторией материальной точки, движущейся по инерции равномерно и прямолинейно (в соответствии с первым законом Ньютона), либо множеством общих точек двух пересекающихся плоскостей.

Ломаная линия составлена из отрезков прямой линии. Например, граница плоской многоугольной фигуры – ломаная линия.

Линии, отличающиеся от прямой и ломаной, называют кривыми линиями. Способы образования кривых линий могут быть различны. Одни кривые линии образуются по определенному графическому или аналитическому правилу, алгоритму или закону. Такие линии называют *закономерными*. Другие кривые получены опытным путем или начерчены архитектором или дизайнером “от руки”. Их называют *незакономерными* (или *графическими*).

Закономерные кривые разделяют на *алгебраические* и *трансцендентные* соответственно тому, являются ли их уравнения в прямоугольной системе координат алгебраическими или трансцендентными.

Уравнение называют алгебраическим, если в нем содержатся только алгебраические операции над неизвестными (умножение, сложение, возведение в целую степень).

Например, уравнение $x^3 - ay^2 + b = 0$ – алгебраическое. Ему соответствует алгебраическая кривая третьего порядка, лежащая в плоскости xy. Порядком алгебраической кривой называют степень ее уравнения.

Синусоида – закономерная, но не алгебраическая кривая, так как уравнение синусоиды $y = sinx$ в декартовых прямоугольных координатах OXY не алгебраическое (трансцендентное).

По своему расположению в пространстве различают *плоские и пространственные* кривые линии.

Начертательная геометрия изучает кривые линии и различные операции с ними по их проекциям на комплексном чертеже. Чтобы изобразить кривую линию на чертеже, надо построить горизонтальную и фронтальную проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой. Соединяя проекции точек плавной линией, получаем проекционный чертеж данной кривой.

5.1.1. Плоские кривые линии

Напомним, что в начертательной геометрии кривая линия может рассматриваться как траектория движущейся точки. Если точка движется в плоскости, то она описывает плоскую кривую. Для построения плоской кривой линии надо на чертеже задать плоскость этой кривой, затем указать в этой плоскости ряд последовательных положений движущейся точки. Соединяя проекции точек плавной кривой, получим чертеж плоской кривой линии.

Среди плоских кривых линий особо выделяют кривые второго порядка – эллипс, параболу и гиперболу. Кривые второго порядка представляют значительный интерес ввиду широкого применения их в ряде разделов физики, в астрономии, механике, архитектуре и др.

5.1.1.1. Эллипс

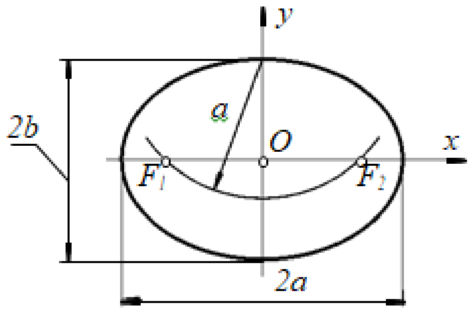


Рис. 5.3

Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где *2a* и *2b* – большая и малая оси эллипса, а начало координат *O(0,0)* – центр эллипса (рис. 5.3).

Эллипс есть множество точек M, для которых сумма расстояний от точки M до двух фиксированных точек F_1 *и* F_2 *постоянна и равна длине большой оси эллипса:* $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Точки F_1 и F_2 называют фокусами эллипса. Если даны оси *2a* и *2b* эллипса, то его фокусы находят на пересечении большой оси *2a* с окружностью радиуса *a* с центром в конце малой оси *2b* (см. рис. 5.3).

Окружность – частный случай эллипса. Уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$ получается из уравнения эллипса, если $a=b=R$.

5.1.1.2. Гипербола

Гипербола описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

где величины *2a* и *2b* – действительная и мнимая оси гиперболы, а начало координат *O(0,0)* – центр гиперболы (рис. 5.4).

Гипербола есть множество точек M, для которых абсолютная величина разности расстояний от точки M до фиксированных точек F_1 *и* F_2 *постоянна и равна длине действительной оси гиперболы:* $|MF_1-MF2|=2a$.

Точки F_1 и F_2 называют фокусами гиперболы. Если даны оси *2a* и *2b* гиперболы, то ее фокусы находят на пересечении действительной оси *2a* с окружностью радиуса $R=\sqrt{a^2+b^2}$, центр которой совпадает с центром гиперболы.

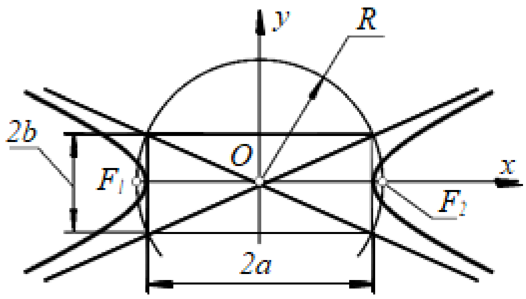


Рис. 5.4

Прямые, проходящие через центр гиперболы и касающиеся ее в несобственных точках, называют асимптотами гиперболы. Асимптоты гиперболы направлены по диагоналям прямоугольника со сторонами *2a* и *2b*. По мере удаления в бесконечность ветви гиперболы неограниченно приближаются к своим асимптотам.

5.1.1.3. Парабола

Парабола описывается уравнением $y^2=2px$, где коэффициент *p* называют параметром параболы (рис. 5.5). Вершина параболы совпадает с началом координат *O(0,0)*.

Парабола есть множество точек, равноудаленных от заданной точки (фокуса F) и от заданной прямой (директрисы d).

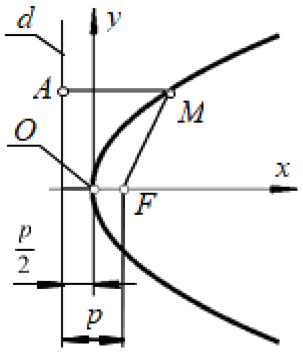


Рис. 5.5

Расстояние между фокусом *F* и директрисой *d* равно параметру *p* параболы. Вершина параболы *O* делит это расстояние пополам. Для произвольной точки *M* параболы расстояние *MF* до фокуса равно расстоянию *MA* до директрисы (см. рис. 5.5).

Из анализа уравнения параболы нетрудно сделать вывод, что *все параболы подобны друг другу.* Действительно, все параболы отличаются друг от друга только одним размером: параметром *p*. Аналогичным образом, все окружности подобны, так как отличаются друг от друга только одним размером: радиусом *R*.

5.1.2. Пространственные кривые линии

Пространственная кривая линия определяется либо как траектория точки, движущейся в трехмерном пространстве, либо как линия пересечения поверхностей.

Пример 1. Зенитная самонаводящаяся ракета, преследуя произвольно маневрирующую цель, движется по незакономерной пространственной траектории.

Пример 2. Линия пересечения поверхностей кругового конуса и эллиптического цилиндра – закономерная пространственная алгебраическая кривая четвертого порядка. Из закономерных пространственных кривых наибольшее практическое применение имеют винтовые линии, в частности – *цилиндрическая винтовая линия (гелиса).* Моделью винтовой линии может служить цилиндрическая пружина.

Цилиндрическая винтовая линия образуется как траектория точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно равномерно перемещающейся в направлении этой оси.

Подведем резец к вращающемуся с постоянной угловой скоростью цилиндру. Будем равномерно перемещать резец параллельно оси вращения цилиндра. На цилиндре останется “царапина” в виде винтовой линии.

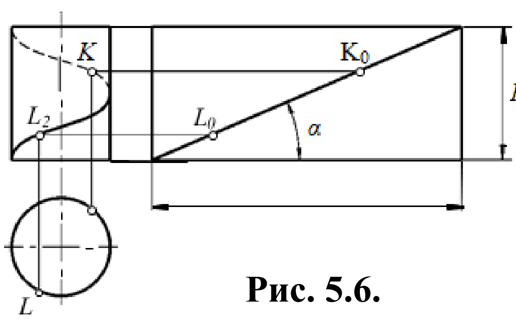


Рис. 5.6.

Винтовая линия – неалгебраическая (трансцендентная) пространственная кривая. Если ось цилиндра перпендикулярна плоскости *П*$_1$, то горизонтальная проекция винтовой линии – окружность, а фронтальная –

синусоида. На развертке цилиндра винтовая линия изобразится в виде прямой линии с углом наклона α (рис. 5.6). Угол α называют углом подъема винтовой линии. Расстояние H между соседними витками, измеренное вдоль оси цилиндра, называют шагом винтовой линии.

Винтовая линия является *геодезической линией* на поверхности кругового цилиндра. *Геодезической* называется принадлежащая данной поверхности и кратчайшая из всех линий, которые можно провести между двумя точками поверхности. Геодезическая линия изображается на развертке поверхности в виде прямой. Например, кратчайшее расстояние между точками L и K, измеренное по поверхности цилиндра, равно расстоянию L_0K_0 на его развертке.

5.2. Классификация поверхностей

Кривые поверхности широко применяются в различных областях науки и техники при создании очертаний различных технических форм или как объекты инженерных исследований. Существуют три способа задания кривых поверхностей:

1. Аналитический способ – как правило, таким способом задаются закономерные поверхности, образование которых можно описать математическим уравнением.

2. Каркасный способ задания поверхности – поверхность задается двумя семействами линий. Причем линии внутри семейства не пересекаются, но зато пересекают все линии второго семейства. Этот способ применяется при проектировании кузовов автомобилей, в самолето- и судостроении, в топографии и т. п.

3. Кинематический способ задания поверхности – в этом случае поверхность задается образующим элементом и законом его перемещения. Образующий элемент и закон его перемещения принято называть – кинематическими определителями поверхности. У каждой поверхности может быть несколько кинематических определителей, но при решении задач по начертательной геометрии из их многообразия выбирают простейшие.

5.2.1. Многогранники

Многогранники – это тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Различают: **Пирамида** – это многогранник, одна грань которого многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной. Пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр многоугольника. Пирамида называется усеченной, если вершина её отсекается плоскостью.

Призма – многоугольник, две грани которого (основания призмы) представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами, а все другие грани параллелограммы. Призма называется прямой, если её ребра перпендикулярны плоскости основания. Если основанием призмы является прямоугольник, призму называют параллелепипедом.

Тетраэдр (четырехгранник) – ограничен четырьмя равносторонними и равными треугольниками.

Гексаэдр (шестигранник, или куб) – ограничен шестью равными квадратами.

Октаэдр (восьмигранник) – ограничен восемью равносторонними и равными треугольниками.

Додекаэдр (двенадцатигранник) – ограничен двенадцатью равносторонними и равными пятиугольниками.

Икосаэдр (двадцатигранник) – ограничен двадцатью равносторонними и равными треугольниками.

Вокруг всех правильных многогранников можно описать сферу.

5.2.2. Коническая поверхность общего вида

Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l, проходящей через неподвижную точку S и пересекающей направляющую m, называется конической поверхностью.

Графическая часть определителя содержит чертеж двух элементов: точки S и направляющей m (рис. 5.7). Алгоритмическая часть определителя может быть записана символически: S $l \cap m$ (“образующая l проходит через точку S и пересекает направляющую m”). Точка S называется вершиной кони ческой поверхности.

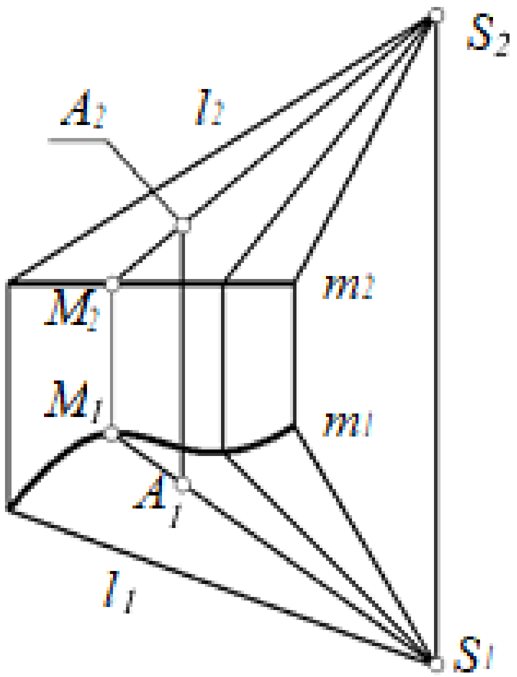


Рис. 5.7

Проверим, полностью ли задана поверхность на чертеже. Укажем на одной из проекций (например, на фронтально проекции) проекцию A_2 произвольной точки A, принадлежащей поверхности. Проведем через A_2 и S_2 фронтальную проекцию образующей. В точке M_2 эта проекция пересекает проекцию направляющей. С помощью линий связи найдем горизонтальную проекцию S_1M_1 образующей. Точка A принадлежит образующей SM. Недостающая горизонтальная проекция A_1 точки A определена с помощью линии связи.

По одной проекции точки, принадлежащей поверхности, удалось построить вторую проекцию этой точки. Следовательно, поверхность на чертеже полностью задана.

5.2.3. Цилиндрическая поверхность общего вида

Пусть прямолинейная образующая l движется параллельно заданному направлению s, пересекая при этом направляющую кривую m. Образующая l в процессе своего движения “заметает” цилиндрическую поверхность общего вида.

Поверхность, образованная прямолинейной образующей l, движущейся параллельно заданному направлению s и пересекающей направляющую m, называется цилиндрической поверхностью.

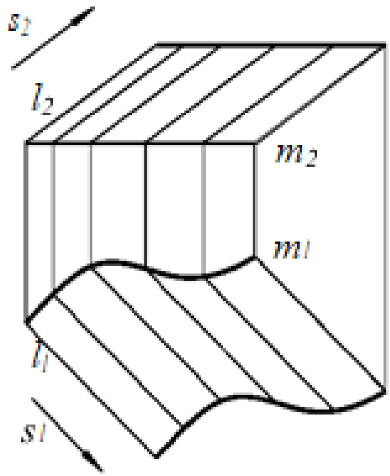


Рис. 5.8

Цилиндрическая поверхность – частный случай конической поверхности. Действительно, если вершина S конической поверхности “уходит в бесконечность” по заданному направлению s, то все образующие становятся параллельны этому направлению. При этом получается цилиндрическая поверхность.

Чтобы задать цилиндрическую поверхность на чертеже, надо начертить направляющую кривую m и указать направление s (рис. 5.8). Графическая часть определителя дополняется алгоритмом формирования поверхности. Символическая запись алгоритма имеет вид: $m \cap l || s$ (“*образующая l пересекает направляющую m и движется параллельно направлению s*”).

5.2.4. Поверхности с плоскостью параллелизма

Пусть прямолинейная образующая l движется параллельно заданной плоскости Σ, пересекая при этом направляющие a и b. Получаем линейчатую поверхность с плоскостью параллелизма (поверхность Каталана).

Поверхность, образованная прямолинейной образующей l, движущейся параллельно заданной плоскости Σ и пересекающей направляющие a и b, называется линейчатой поверхностью с плоскостью параллелизма.

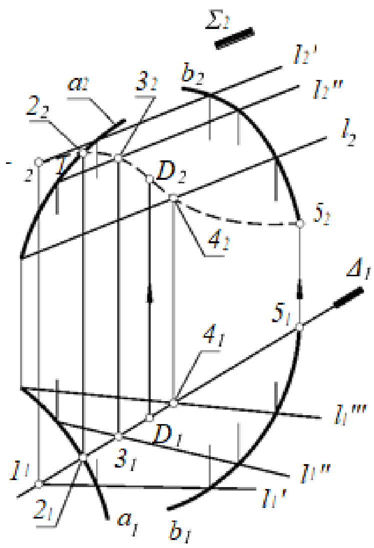


Рис. 5.9

Графическая часть определителя линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма содержит чертежи двух направляющих a, b и плоскости параллелизма Σ.

Алгоритмическая часть определителя может быть записана символически: $a \cap l \cap b$, $l || \Sigma$ (“*образующая l параллельна* *плоскости Σ и пересекает направляющие a, b”*).

Прямолинейные образующие параллельны плоскости параллелизма, но не параллельны между собой.

Покажем, что линейчатая поверхность с плоскостью параллелизма полностью задана на чертеже, если начерчены ее направляющие *a*, *b* и указана плоскость параллелизма *Σ* (рис. 5.9).

Пусть дана горизонтальная проекция *D1* какой-либо точки *D*, принадлежащей поверхности. Чтобы найти фронтальную проекцию точки *D*, построим сетку образующих *l'*, *l''*, *l'''*,… и через D_1 проведем вспомогательную секущую плоскость *Δ*. Плоскость *Δ* рассекает линейчатую поверхность по линии *1…5*, показанной на рис. 5.9 штриховой линией. Точка *D* принадлежит этой линии, поэтому недостающая фронтальная проекция D_2 точки *D* может быть найдена с помощью вертикальной линии связи.

Для построения недостающей проекции точки *D* не обязательно вводить в рассмотрение вспомогательную секущую плоскость *Δ*. Достаточно начертить горизонтальную проекцию произвольной кривой, лежащей на данной линейчатой поверхности и проходящей через точку *D*. Построив фронтальную проекцию этой кривой, отмечаем на ней искомую фронтальную проекцию точки *D*.

Если дана фронтальная проекция какой-либо точки, принадлежащей поверхности, то ее горизонтальная проекция определяется по принадлежности к соответствующей образующей (без построения сетки образующих).

Таким образом, по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, удается построить вторую проекцию этой точки. Следовательно, поверхность на чертеже (см. рис. 5.9) полностью задана.

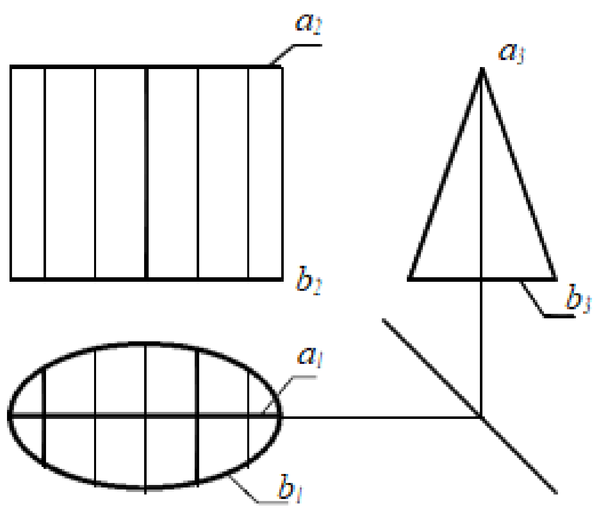


Рис. 5.10

Если обе направляющие линейчатой поверхности с плоскостью параллелизма – кривые линии, то поверхность называется *цилиндроидом* (см. рис. 5.9). Если одна из направляющих кривая линия, а другая направляющая прямолинейна, то

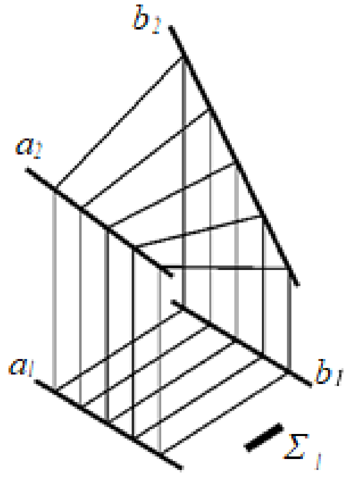


Рис. 5.11

поверхность называют *коноидом*. На рис. 5.10 показан коноид с прямолинейной направляющей *a*, криволинейной направляющей *b* (линия *b* – эллипс) и плоскостью параллелизма

П3. Такую поверхность называют “прямой клин”. Горизонтальные плоскости рассекают эту поверхность по эллипсам.

Если обе направляющие – прямые, то линейчатую поверхность называют *косой плоскостью* или *гиперболическим параболоидом.* На рис. 5.11 показана косая плоскость с прямолинейными направляющими *a, b* и плоскостью параллелизма *Σ*. Все образующие косой плоскости параллельны плоскости параллелизма, но не параллельны между собой.

5.2.5. Поверхности вращения

Поверхность, образованная вращением образующей линии l вокруг некоторой оси i, называется поверхностью вращения.

Пусть *l* – произвольная плоская кривая. Вращая образующую *l* вокруг оси *i*, получаем поверхность вращения общего вида (рис. 5.12). Каждая точка *1, 2, 3…* образующей *l* перемещается по окружности, которую называют *параллелью*. Через точку *2* проходит параллель минимального радиуса. Эту параллель называют “*горловым сечением*” поверхности.

В сечении поверхности вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, получается окружность (параллель).

Плоскость, проходящая через ось вращения *i*, пересекает поверхность вращения по линии, называемой *меридианом*.

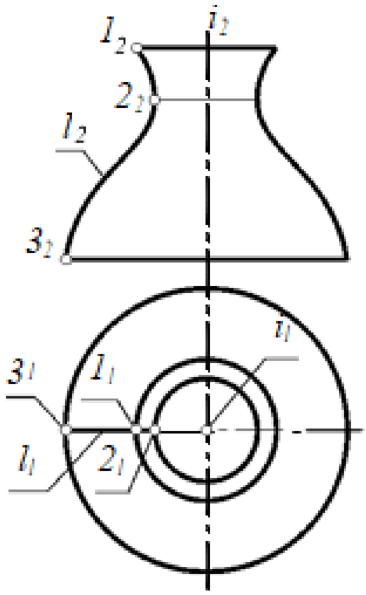


Рис. 5.12

На чертеже, как правило, изображают *очерки* проекций поверхности.

Определение. *Очерк (очерковая линия) – это граница области, состоящей из проекций точек поверхности.* Например, на рис. 5.12 показан фронтальный очерк поверхности вращения (“кувшин”) и его горизонтальный очерк, образованный параллелями минимального и максимального радиусов. Из определения следует, что *ни одна точка поверхности не может проецироваться за пределы очерка*. Если множество проекций всех точек поверхности *Φ* совпадает с множеством точек плоскости проекций $П_i$, то на $П_i$ поверхность *Φ* не имеет очерка.

5.2.5.1. Поверхности, образованные вращением прямой линии

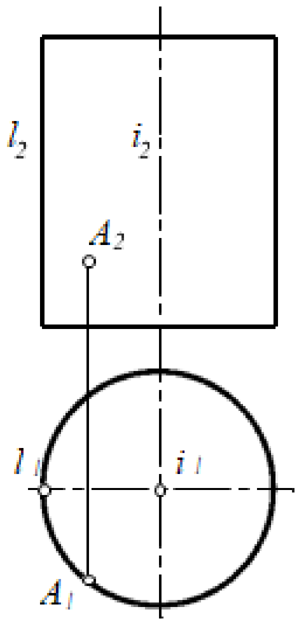


Рис. 5.13

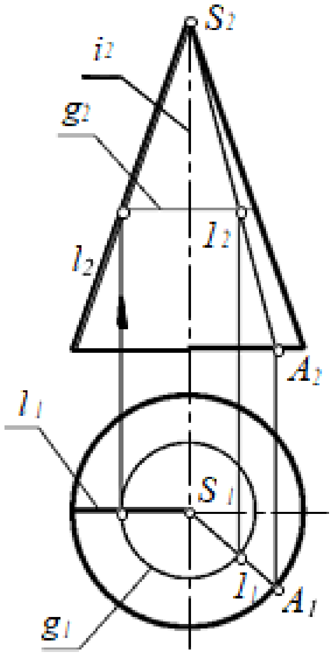


Рис. 5.14

Две прямые линии в пространстве могут быть либо параллельны, либо пересекаться, либо скрещиваться под произвольным углом. Соответственно этому различают три вида поверхностей, образованных вращением прямой линии *l* вокруг оси *i*.

1. Если образующая *l* параллельна оси вращения *i*, получается *прямой круговой цилиндр* (рис. 5.13).

Горизонтальная проекция *A1* произвольной точки *A*, принадлежащей поверхности цилиндра, лежит на горизонтальном очерке цилиндра.

2. Если образующая *l* пересекается с осью вращения – получается *прямой круговой конус* (рис. 5.14).

Чтобы найти недостающую проекцию точки на поверхности конуса, надо провести через эту точку параллель или прямолинейную образующую, принадлежащие поверхности конуса. Например, на рис. 5.14 дана горизонтальная проекция точки *1*, принадлежащей поверхности конуса. Чтобы определить фронтальную проекцию точки *1*, проведем через 1_1 проекцию g_1 параллели *g*. С помощью линии связи найдем фронтальную проекцию g_2 этой параллели и отметим на ней фронтальную проекцию точки *1*.

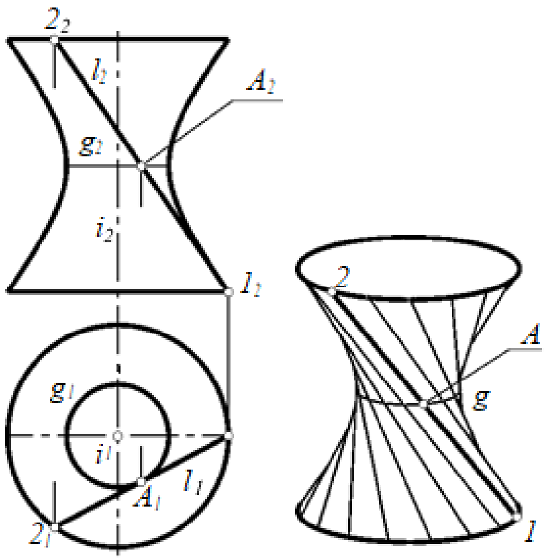


Рис. 5.15

Эта же задача может быть решена с помощью образующей. Проведем через 1_1 проекцию S_1A_1 прямолинейной образующей *SA*. Найдем фронтальную проекцию S_2A_2 этой образующей (см. рис. 5.14). Фронтальная проекция 1_2 точки *1* находится на S_2A_2.

3. Если образующая *l* скрещивается с осью вращения *i*, то при вращении прямой *l* вокруг оси *i*

образуется *однополостный гиперболоид вращения* (рис. 5.15). Точки образующей l перемещаются по окружностям (параллелям) разного диаметра.

Параллель g минимального диаметра называют горловым сечением гиперболоида вращения. Горловое сечение g гиперболоида образовано движением точки A, где A – ближайшая к оси i точка образующей l.

Очерковая линия гиперболоида на плоскости $П_2$ – гипербола, мнимая ось которой совпадает с проекцией i_2 оси вращения поверхности.

5.2.5.2. Поверхности, образованные вращением кривых второго порядка вокруг своей оси

Напомним, что существуют три типа кривых второго порядка: эллипс, парабола и гипербола. Эллипс и гипербола имеют две взаимно перпендикулярные оси симметрии. У параболы одна ось симметрии. Если кривую второго порядка вращать вокруг оси симметрии, то получается эллипсоид вращения, параболоид вращения или гиперболоид вращения (рис.

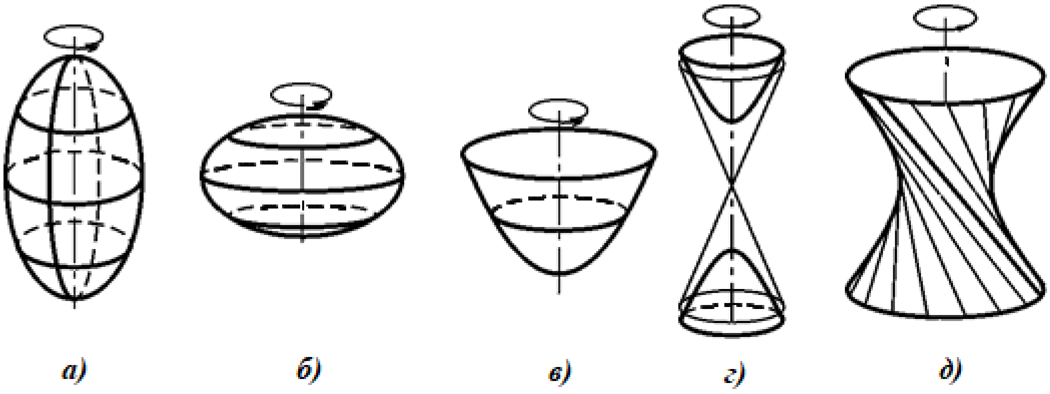


Рис. 5.16

5.16).

1. Вращая эллипс вокруг большой оси, получаем вытянутый эллипсоид вращения (рис. 5.16, *а*). При вращении эллипса вокруг малой оси возникает сжатый эллипсоид вращения (рис. 5.16, *б*). При вращении окружности вокруг диаметра получается сфера. Сфера – частный случай эллипсоида вращения.

2. Вращая параболу вокруг ее оси симметрии, получаем параболоид вращения (рис. 5.16, *в*).

3. При вращении гиперболы вокруг действительной оси получаем двуполостный гиперболоид вращения. Асимптоты гиперболы описывают асимптотический конус (рис. 5.16, *г*). При вращении гиперболы вокруг мнимой оси получаем однополостный гиперболоид вращения (рис. 5.16, *д*).

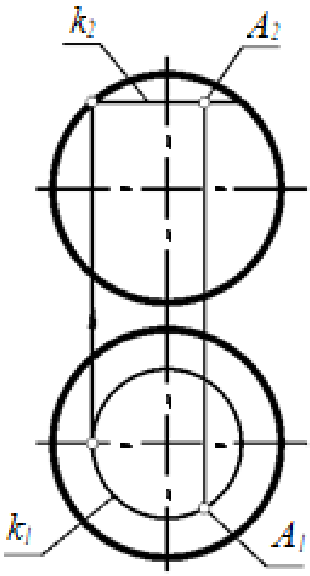


Рис. 5.17

Рассмотренные поверхности (сфера, эллипсоид, гиперболоид, параболоид) являются закономерными алгебраическими поверхностями второго порядка.

Построение точки на поверхности вращения можно выполнить с помощью окружности (параллели), проходящей через эту точку.

Пусть, например, дана горизонтальная проекция A_1 точки A, лежащей на сфере (рис. 5.17). Чтобы построить фронтальную проекцию этой точки, проведем через A_1 окружность k_1 (горизонтальную проекцию параллели k). С помощью линий связи найдем фронтальную проекцию k_2 параллели k и отметим на ней фронтальную проекцию $A2$ точки A (см. рис. 5.17).

5.2.5.3. Поверхность тора

Тор образуется вращением окружности вокруг оси i, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр. Поверхность тора – алгебраическая поверхность четвертого порядка.

Возможны три случая расположения оси вращения относительно образующей окружности.

Случай 1. Ось вращения i не пересекает образующую окружность l (рис. 5.18). Получаем поверхность в форме кольца. Такую поверхность называют *открытым тором* (“*кольцом*”).

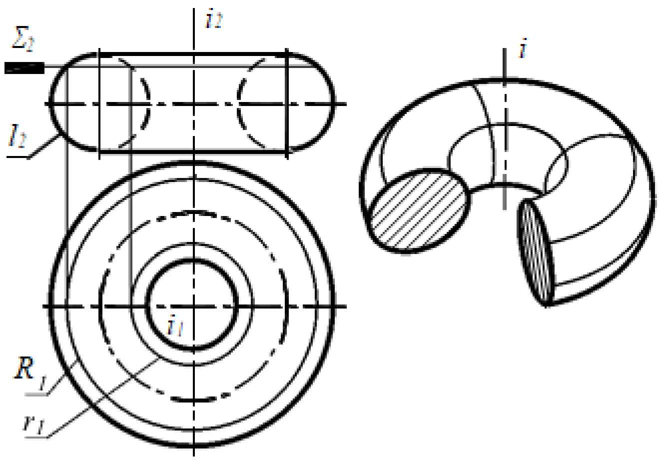


Рис. 5.18

В сечении тора плоскостью в общем случае получается кривая четвертого порядка. Если секущая плоскость Σ перпендикулярна оси вращения i тора, то в сечении получаем кривую четвертого порядка, распавшуюся на две окружности R и r (см. рис. 5.18). Одна окружность находится на “наружной” поверхности кольца, другая окружность – на “внутренней”. Если секущая плоскость проходит через ось открытого тора, то в сечении получаем кривую четвертого порядка, распавшуюся на две окружности одинакового радиуса.

Если секущая плоскость касается поверхности открытого тора в двух точках, то линия сечения распадается на две окружности (круги Виларсо). Таким образом, поверхность открытого тора содержит три семейства круговых сечений.

Случай 2. Ось вращения пересекается с образующей окружностью. При этом получается поверхность, напоминающая либо яблоко (рис. 5.19), либо “веретено” (рис. 5.20). Такой тор называют “закрытым”, так как у него нет внутреннего отверстия.

Случай 3. Ось может касаться окружности (рис. 5.21). Получаем предельный случай открытого тора, когда внутреннее отверстие открытого тора “стянулось в точку”.

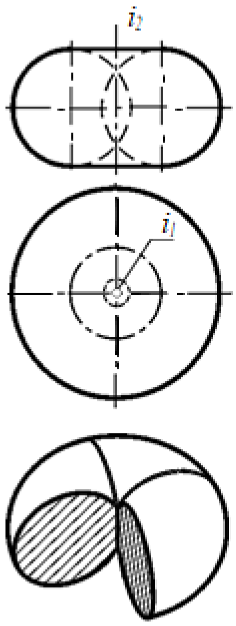


Рис. 5.19

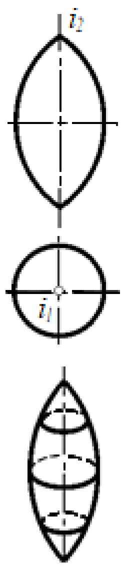


Рис. 5.20

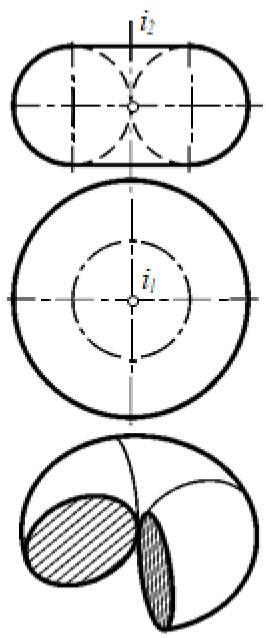


Рис. 5.21

5.2.6. Торсовые поверхности

Торсовой поверхностью (торсом) называют линейчатую поверхность, образованную движением касательной l к пространственной кривой m (рис. 5.22). Кривую m называют ребром возврата торса.

Торсовая поверхность может быть образована другим, более общим способом. Пусть даны две направляющие a и b, которые могут быть поверхностями или кривыми линиями (плоскими или пространственными). Представим себе плоскость Θ, которая “перекатывается” по данным криволинейным направляющим a и b (рис. 5.23).

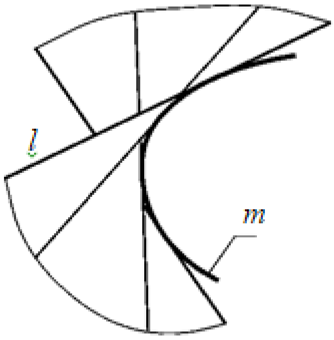


Рис. 5.22

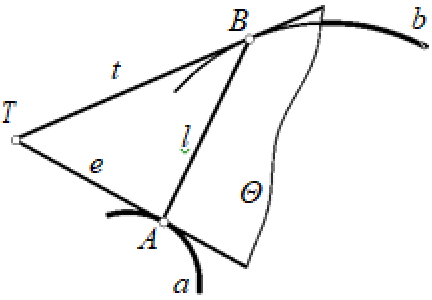


Рис. 5.23

В любом своем положении плоскость Θ касается направляющих в точках A и B (точка A – на направляющей a, точка B – на b). Прямая l=AB соединяет точки касания. Кроме прямой l=AB, на рис. 5.23 показаны касательные e и t к направляющим a и b. Эти касательные лежат в плоскости Θ и пересекаются в некоторой точке T.

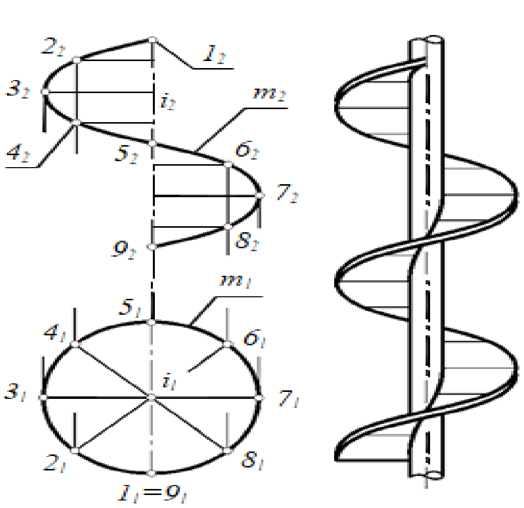
При "перекатывании" плоскости Θ по направляющим a, b положение прямой AB в пространстве непрерывно изменяется. Получается линейчатая поверхность, заметаемая движущейся прямой l=AB. Эта поверхность развертывающаяся, так как она всеми своими прямолинейными образующими l=AB поочередно совмещается с обкатывающей плоскостью Θ. Что это за поверхность?

Как известно, свойством развертываемости обладают, кроме многогранных поверхностей, только конические, цилиндрические и торсовые поверхности. Развертывающаяся поверхность, схематически представленная на рис. 5.23, не является ни конической, ни цилиндрической поверхностью (так как образующие l=AB не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке). Следовательно, это торсовая поверхность. Все образующие l=AB торсовой поверхности касаются некоторой пространственной кривой (ребра возврата). Ребро возврата на рис. 5.23 не показано.

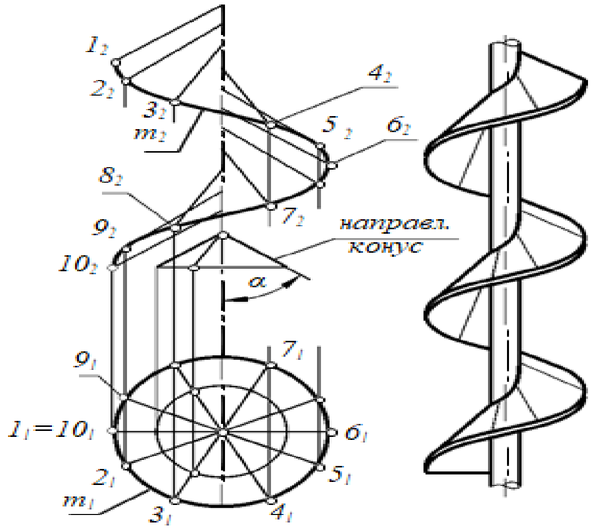
5.2.7. Винтовые поверхности

Пусть образующая линия вращается вокруг оси *i* и при этом поступательно перемещается вдоль этой оси. Такое сложное движение называют винтовым. Обычно рассматривают винтовое движение с постоянной угловой скоростью и равномерным поступательным перемещением образующей, то есть с постоянным винтовым шагом. Шаг винта – расстояние вдоль оси *i*, которое проходит произвольная точка образующей (не лежащая на оси i) за один полный оборот образующей.

Линейчатая винтовая поверхность, образованная винтовым движением прямой линии, называется геликоидом. Геликоид образуется движением прямолинейной образующей, пересекающей цилиндрическую винтовую линию m и ее ось *i*.



5.24



5.25

Если образующая перпендикулярна оси винтовой линии, то винтовая поверхность называется прямым геликоидом (рис. 5.24). Образующие прямого геликоида параллельны горизонтальной плоскости проекций, следовательно, это поверхность с плоскостью параллелизма (винтовой коноид).

Наклонный геликоид образуется движением прямой линии, скользящей по цилиндрической винтовой линии m и пересекающей ось i винтовой линии под постоянным углом $\alpha \neq 90^o$ (рис. 5.25). Прямолинейная образующая наклонного геликоида остается во всех своих положениях параллельна соответствующей образующей прямого кругового конуса, соосного с винтовой линией m. Этот конус называется направляющим.

Винтовые поверхности широко применяются в технике (резьбовые пары, винтовые лестницы и пандусы, шнековые механизмы, муфты сцепления и др.).

5.2.8. Каркасные поверхности

Каркасной называют поверхность, задаваемую совокупностью лежащих на ней линий – каркасом поверхности.

Каркасную поверхность задают на чертеже проекциями линий каркаса. Полученный чертеж отличается от чертежа кинематической поверхности тем, что точки поверхности, не лежащие на линиях каркаса, могут быть построены только приближенно. Поэтому

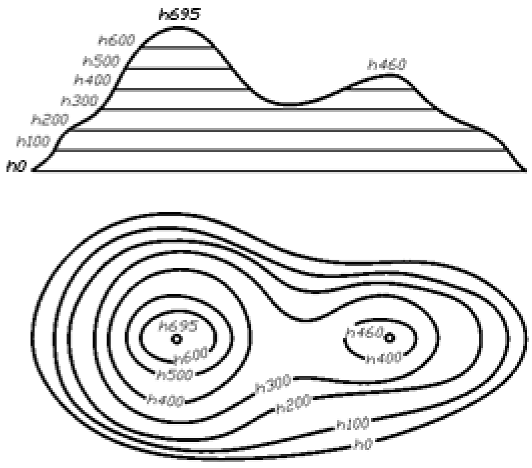


Рис. 5.26

поверхность, заданная каркасом, не вполне определена.
Существуют поверхности с одним и тем же каркасом, но несколько отличающиеся одна от другой.

Примером поверхности, задаваемой каркасом, может служить земная поверхность. При изображении рельефа земной поверхности в качестве линий каркаса берут горизонтали. Поверхности, заданные каркасом горизонталей, в геодезии и картографии называют топографическими (рис. 5.26). Топографическая карта – это горизонтальная проекция рельефа (*“план местности”*). Фронтальная проекция, показанная на рис. 5.26, на карте отсутствует. Отсутствующую фронтальную проекцию заменяют числовыми отметками на плане, нанесенными рядом с каждой горизонталью. Например, отметка *h300* означает, что соответствующая горизонталь расположена на высоте 300 метров.

Вопросы для самоконтроля

1. Какую линию называют алгебраической кривой?
2. Перечислить все типы кривых второго порядка и их частные случаи.
3. Дать пример закономерной пространственной кривой линии.
4. Каким способом задается поверхность на чертеже? Что такое определитель поверхности? Какую линию на чертеже называют очерком (очерковой линией) поверхности?
5. Дать определение линейчатой поверхности.
6. Перечислить все поверхности вращения второго порядка.
7. Каков критерий полноты чертежа поверхности?
8. Можно ли считать чертеж каркасной поверхности полным? Если нельзя, то почему?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А.** Курс начертательной геометрии. – М.: Выс-шая школа, 2012.
2. **Фролов С.А.** Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 2012.
3. **Тарасов Б.Ф. и др.** Начертательная геометрия. Санкт - Петербург: Издательство «Лань», 2012.
4. **Чекмарев А.А.** Начертательная геометрия и черчение: Учебник.-2-е изд. перераб. и доп.- М.: ВЛАДОС, 2012.

Дополнительная

1. **Балягин С.Н.** Черчение. – М.: Астрель, 2005. – 420 с.
2. **Виницкий И.Г.** Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1975. – 358 с. 3. **Кириллов А. Ф.** Черчение и рисование. – М.: Высшая школа, 1987.

Лекция 6. Проецирование поверхностей с плоскостью

План лекции 6:

6.1. Пересечение многогранника с плоскостью.
6.2. Пересечение кривой поверхности с плоскостью.
6.3. Конические сечения.

6.1. Пересечение многогранника с плоскостью

Напомним, что многогранник – пространственная геометрическая фигура, со всех сторон ограниченная отсеками плоскостей (гранями). Элементы многогранника – грани, ребра (прямые линии, по которым пересекаются грани) и вершины (точки пересечения ребер). Совокупность вершин и ребер называют сеткой многогранника.

В пересечении многогранника с плоскостью получается плоская замкнутая ломаная линия, вершинами которой являются точки пересечения ребер многогранника с плоскостью.

Построение линии пересечения многогранника с плоскостью сводится к определению точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, то есть к многократному решению первой позиционной задачи.

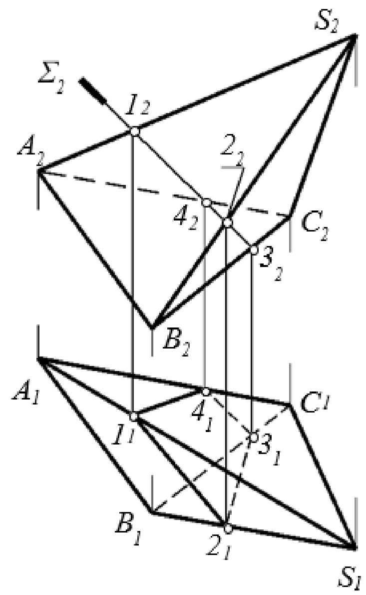


Рис. 6.1

Задача 1. *Построить линию пересечения многогранника с проецирующей плоскостью*. На рис. 6.1 показан тетраэдр, рассеченный проецирующей плоскостью Σ. Отмечаем точки *1, 2, 3, 4* пересечения плоскости Σ с ребрами многогранника и соединяем найденные точки отрезками прямой линии. Получаем плоскую замкнутую ломаную линию *1-2-3-4*. При построении этой линии обязательно следует учитывать следующее правило.

Правило. *Отрезками прямой соединяются только те точки, которые лежат на одной и той же грани многогранника.*

Например, на рис. 6.1 соединены точки *1* и *2*, потому что они лежат на одной и той же грани *ABS*. Точки *1* и *3* соединять нельзя, так как они принадлежат разным граням тетраэдра: линия *1-3* проходит не по поверхности, а *внутри* тетраэдра.

6.2. Пересечение кривой поверхности с плоскостью

В пересечении кривой поверхности с плоскостью получается плоская кривая линия. Точки линии пересечения условно разделяют на *опорные* и *промежуточные*.

К опорным точкам относятся:

– *экстремальные точки*, то есть наиболее близкие и наиболее удаленные точки от той или иной плоскости проекций: низшая и высшая точки (относительно горизонтальной плоскости проекций), ближняя и дальняя точки (относительно фронтальной плоскости проекций), левая и правая точки (относительно профильной плоскости проекций);

–*очерковые точки*, то есть точки, проекции которых принадлежат очерку проекции поверхности;

–*точки смены видимости*, то есть очерковые точки, в которых меняется видимость проекции линии пересечения.

Все остальные точки линии пересечения поверхностей называют промежуточными. При построении линии пересечения в первую очередь определяют опорные точки искомой линии пересечения, а затем – промежуточные.

Как опорные, так и промежуточные точки линии пересечения любых поверхностей определяются по следующей схеме.

1. Данные поверхности пересекаются *вспомогательной поверхностью* (например, плоскостью или сферой).

2. Определяются линии пересечения вспомогательной поверхности с каждой из заданных поверхностей.

3. Отмечаются точки пересечения полученных линий. Эти точки принадлежат искомой линии пересечения данных поверхностей.

Многократно повторяя указанную схему, можно получить любое количество точек линии пересечения.

Задача 1. *Построить линию m разреза сферы проецирующей плоскостью Σ.* Заданные поверхности (сфера и плоскость *Σ*) имеют *общую плоскость симметрии*, обозначенную на чертеже буквой *Ф* (рис. 6.3). Плоскость *Ф* делит обе заданные поверхности на две одинаковые “половинки”, зеркально симметричные относительно плоскости *Ф*. В силу этого линия разреза сферы плоскостью *Σ* симметрична относительно *Ф*.

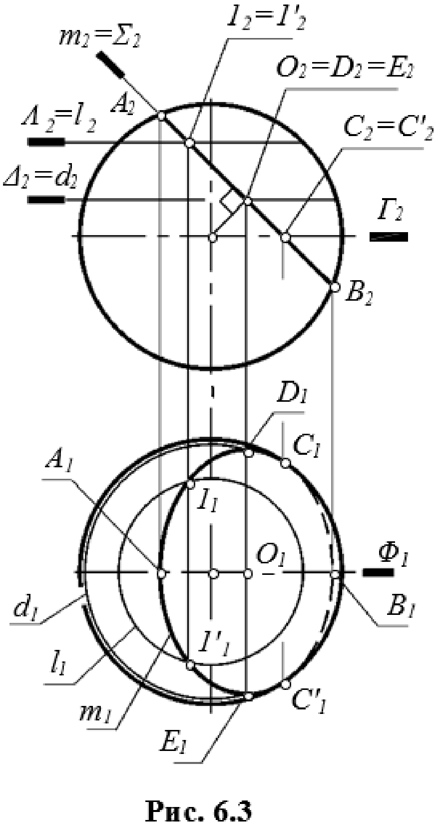


Рис. 6.3

Истинная форма линии *m* – окружность, так как любая плоскость пересекает сферу по окружности.

Фронтальная проекция m_2 окружности m совпадает с фронтальной проекцией плоскости Σ. Горизонтальная проекция m_1 окружности m – эллипс с центром O и главными осями A_1B1 и D_1E_1, где A, B, D, E – экстремальные точки. Экстремальные относительно Π_1 точки A и B

(высшая и низшая) лежат в общей плоскости симметрии Φ. Экстремальные относительно Π_2 точки D и E (ближняя и дальняя) построены с помощью горизонтальной секущей плоскости Δ, проведенной через центр O окружности m (см. рис. 6.3).

Точки смены видимости C и C' относительно горизонтальной плоскости проекций лежат в горизонтальной плоскости, обозначенной на чертеже буквой Γ. Все точки на сфере, лежащие *выше* плоскости Γ, видны на горизонтальной проекции. Точки на нижней половине сферы (ниже плоскости Γ) будут на горизонтальной проекции невидимыми (закрыты от наблюдателя верхней половиной сферы). Поэтому плоскость Γ, отделяющую верхнюю часть сферы от нижней, называют *плоскостью смены видимости относительно горизонтальной плоскости проекций.*

Точки смены видимости C и C' одновременно являются *очерковыми точками*, так как они лежат на горизонтальном очерке сферы. В этих точках меняется видимость горизонтальной проекции искомой линии m.

После определения опорных точек (экстремальных, очерковых, точек смены видимости) переходим к построению промежуточных точек. На фронтальной проекции линии m отмечаем произвольную промежуточную точку 1. Линия m симметрична относительно общей плоскости симметрии Φ, поэтому точка 1 – “двойная”. Вторую точку, симметричную точке 1, обозначаем той же цифрой 1, но с добавлением штриха: $1_2=1'_2$.

Точки 1 и $1'$ находятся на сфере. Чтобы найти их горизонтальные проекции, проводим через них вспомогательную горизонтальную плоскость Λ. Плоскость Λ рассекает сферу по окружности l (параллели). Начертив горизонтальную проекцию l_1 параллели l, отмечаем на ней горизонтальные проекции точек 1 и $1'$.

Через найденные точки $A, B, C, C', D, E, 1, 1'$ проходит искомая линия m пересечения сферы с плоскостью Σ. Горизонтальная проекция m_1 линии m – эллипс с главными осями A_1B_1 и D_1E_1. Истинная форма линии m – окружность с диаметром A_2B_2.

Задача 2. *Построить линию пересечения поверхности конуса вращения и плоскости общего положения* Σ (рис. 6.4).

Предварительно преобразуем чертеж так, чтобы плоскость Σ, заданная параллельными прямыми a, b, заняла проецирующее положение. Для этого начертим в плоскости $\Sigma(a||b)$ горизонталь $h=AB$ и заменим плоскость Π_2 плоскостью Π_4, расположенной перпендикулярно к горизонтали h. В новой системе координат Π_1/Π_4 плоскость $\Sigma(a||b)$ становится проецирующей: $\Sigma\perp\Pi_4$.

Проекция Σ_4 этой плоскости “выродилась” в прямую линию $\Sigma_4=a_4=b_4$.

На плоскости проекций Π_4 отмечаем экстремальные (верхнюю и нижнюю) точки N и M искомой линии пересечения плоскости Σ с конусом. Экстремальные точки N и M находятся в *общей плоскости симметрии*

заданных поверхностей. Эта плоскость обозначена на рис. 6.4 буквой Φ. Плоскости Φ и Π_4 параллельны.

С помощью линий связи “возвращаем” верхнюю и нижнюю точки M, N в исходную систему координат Π_1/Π_2. Плоскости проекций Π_2 и Π_4

перпендикулярны горизонтальной плоскости *П1*, поэтому высотные отметки (координаты по оси *z*) точек *M*, *N* без изменений переносятся с плоскости $П_4$ на плоскость $П_2$.

Линия пересечения конуса с плоскостью Σ полностью видима на горизонтальной плоскости проекций. На фронтальной плоскости проекций эта линия видна только частично. Чтобы построить точки смены видимости на $П_2$, отмечаем на чертеже *плоскость смены видимости* Θ, отделяющую “переднюю” часть поверхности конуса, видимую на фронтальной плоскости проекций $П_2$, от “задней” (невидимой).

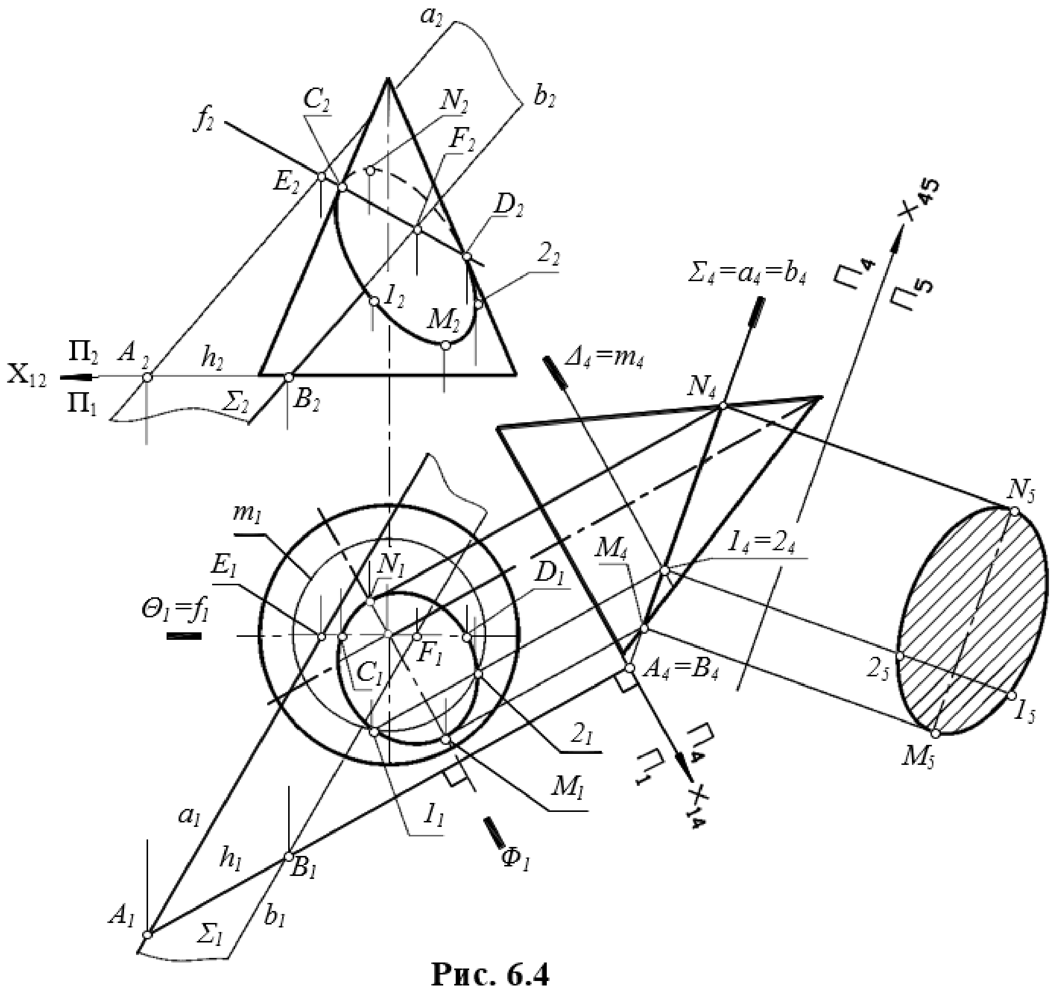


Рис. 6.4

Плоскость Θ пересекает конус по фронтальному очерку (фронтальный очерк конуса – треугольник), а заданную плоскость Σ – по фронтали *f=EF*. Фронтальный очерк конуса и фронтальная проекция фронтали f_2 пересекаются в точках смены видимости *C* и *D*. В этих точках линия пересечения “переходит” с передней (видимой на $П_2$) части конуса на его заднюю (невидимую) часть.

Найденные точки смены видимости *C* и *D* одновременно являются очерковыми, так как они находятся на фронтальном очерке конуса.

После определения *опорных точек* (экстремальных точек *M*, *N* и точек смены видимости *C*, *D*) находят *промежуточные точки* линии пересечения. Промежуточные точки нужны для увеличения точности построения искомой линии. Любое количество промежуточных точек можно определить с помощью вспомогательных секущих плоскостей. Например, промежуточные точки *1* и *2* найдены с помощью вспомогательной плоскости Δ, пересекающей конус по окружности m (см. рис. 6.4).

Для построения истинной формы сечения конуса плоскостью Σ введена в рассмотрение новая плоскость проекций Π_5, параллельная плоскости Σ. Ширина сечения относительно его оси симметрии MN одинакова как на Π_1, так и на Π_5, поэтому расстояние между проекциями промежуточных точек 1_5 и 2_5 на плоскости Π_5 равно расстоянию между проекциями 1_1 и 2_1 этих же точек на плоскости Π_1.

6.3. Конические сечения

При пересечении произвольной конической поверхности второго порядка плоскостями могут быть получены все виды кривых второго порядка: *эллипс* (либо *окружность* как частный случай эллипса), *парабола* и *гипербола*. Эти линии называются *коническими сечениями*.

Эллипс. Если плоскость Σ пересекает *все образующие* конуса, то в сечении получается замкнутая кривая второго порядка, не имеющая несобственных точек – *эллипс* (рис. 6.5, *а*). Если секущая плоскость Σ перпендикулярна оси конуса – получаем окружность (частный случай эллипса).

Парабола. Если секущая плоскость Σ параллельна какой-нибудь *одной* образующей l конуса (пересекает ее в несобственной точке), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая одну бесконечно удаленную (несобственную) точку – *пара-бола* (рис. 6.5, *б*). В частности, если секущая плоскость касается конуса вдоль какой-либо образующей l – получаем параболу, выродившуюся в двойную прямую l.

Напомним, что *все параболы подобны друг другу.* Параболы отличаются друг от друга только своим параметром p. Аналогичным образом, все окружности подобны, так как отличаются друг от друга только одним размером: радиусом R. Поэтому две произвольные параболы всегда можно совместить друг с другом, используя преобразования подобия и перемещения.

Гипербола. Если секущая плоскость Σ параллельна *двум образующим* конуса l и m (пересекает их в несобственных точках), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая две несобственные точки – *гипербола* (рис. 6.5, *в*). В частности, если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то гипербола вырождается в две пересекающиеся прямые (действительные или мнимые).

Учитывая, что конус – двуполостная поверхность, можно классифицировать конические сечения по следующему признаку.

Если секущая плоскость пересекает только одну из двух полостей конуса – получаем замкнутую кривую (эллипс).

Если секущая плоскость пересекает обе полости конуса – получаем кривую с двумя “ветками” (гиперболу).

Парабола – предельный случай как эллипса, так и гиперболы. Секущая плоскость располагается так, что при бесконечно малом повороте этой плоскости в ту или другую сторону получается либо эллипс, либо гипербола. Например, на рис. 6.5, *б* малый поворот секущей плоскости Σ по часовой стрелке приводит к появлению эллипса, против часовой стрелки – гиперболы.

Примечание. На рис. 6.5 показаны конические сечения, полученные на

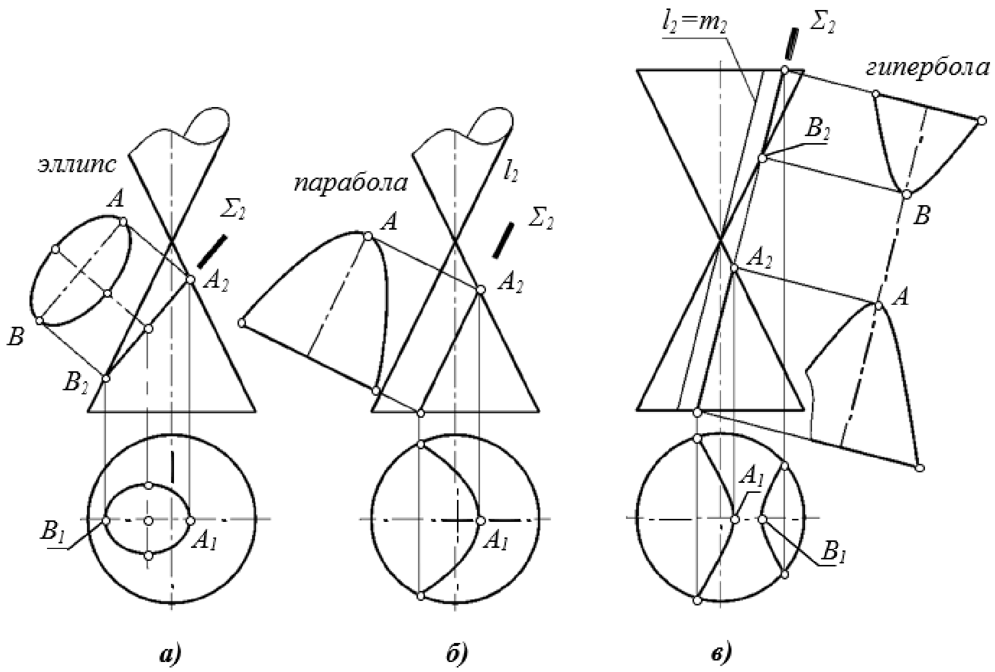


Рис. 6.5

поверхности прямого кругового конуса. Но все виды конических сечений (эллипс, окружность, парабола, гипербола) могут быть найдены на конической поверхности второго порядка общего вида, заданной направляющей кривой второго порядка и вершиной.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая линия получается в пересечении многогранника с плоскостью?
2. Какая линия получается в пересечении сферы с плоскостью общего положения? Как изображается эта линия на плоскостях проекций?
3. Дать классификацию конических сечений. Как располагается секущая плоскость, пересекающая прямой круговой конус по эллипсу? По гиперболе? По параболе?

Учебное издание

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине
«НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА»
для студентов направления подготовки
Профессиональное обучение (по отраслям),
профили: «Экономика и управление», «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Профессиональная психология», «Управление персоналом»
(в 2-х частях). Часть 1.

С о с т а в и т е л ь:
Валентина Даниловна Волкова

Печатается в авторской редакции.
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать ______________
Формат 60x84$^{1}/_{16}$. Бумага типограф. Гарнитура Times
Печать офсетная. Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _______
Тираж 100 экз. Изд. №______. Заказ №______. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного
университета имени Владимира Даля

Свидетельство о государственной регистрации издательства
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015г.

Адрес издательства: 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60
E-mail: izdat.lguv.dal@gmail.com **http:** //izdat.dahluniver.ru/