

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Стахановский инженерно-педагогический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Луганский государственный университет имени
Владимира Даля»

Кафедра общеинженерных дисциплин

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине

«НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА»

для студентов направления подготовки

Профессиональное обучение (по отраслям),

профили: «Экономика и управление», «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Профессиональная психология», «Управление персоналом»

(в 2-х частях). Часть 2.

Луганск 2023

*Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом
ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля»
(протокол № от . .2023 г.)*

Конспект лекций по дисциплине **«Начертательная геометрия. Инженерная и компьютерная графика»** для студентов направления подготовки **Профессиональное обучение (по отраслям)**, профили: «Экономика и управление», «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Профессиональная психология», «Управление персоналом» » (в 2-х частях). Часть 2. / Сост.: В.Д Волкова. – **Стаханов: ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля»**, 2023. – 55 с.

Конспект лекций содержит 4 лекции, описание которых сопровождается теоретическими сведениями. К каждой теме приведены вопросы и задачи для самопроверки, список рекомендованной литературы.

Предназначен для студентов профилей: «Экономика и управление», «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Профессиональная психология», «Управление персоналом».

Составитель:	ст. преп. Волкова В.Д.
Ответственный за выпуск:	доц. Сафонов В.И.
Рецензент:	доц. Тугай В.В.

Содержание

Лекция 7. Построение линии пересечения поверхностей	4
7.1. Взаимное пересечение поверхностей	4
7.2. Схема решения второй позиционной задачи с использованием вспомогательных секущих плоскостей.	5
7.3. Пересечение двух многогранников	7
7.4. Пересечение многогранника и кривой поверхности	9
7.5. Построение линии пересечения поверхностей	11
7.6. Способ концентрических сфер	12
7.7. Примеры применения способа сфер	14
7.8. Особые случаи пересечения. Теорема Монжа	16
Вопросы для самоконтроля	18
Лекция 8. Преобразование комплексного чертежа. Метрические задачи	19
8.1. Способы преобразования чертежа	19
8.2. Способ замены плоскостей проекций	19
8.3. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекции	21
8.3.1. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую	22
8.3.2. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня	22
8.4. Способ плоскопараллельного движения	22
Вопросы для самоконтроля	25
Лекция 9. Развертки поверхностей	26
9.1. Общие сведения и определение	26
9.2. Типы разверток	27
9.3. Приближенная развертка поверхности прямого кругового конуса	27
9.4. Построение условных разверток не развёртывающихся поверхностей	29
Вопросы для самоконтроля	38
Лекция 10. Комбинирование задачи	39
10.1. Комбинированные задачи.	39
10.2. Геометрические места точек или прямых, удовлетворяющих заданным условиям... ..	40
10.3. Примеры решения комбинированных задач.....	41
Вопросы для самоконтроля	53

Лекция 7. Построение линии пересечения поверхностей

План лекции 7:

- 7.1. Взаимное пересечение поверхностей
- 7.2. Схема решения второй позиционной задачи с использованием вспомогательных секущих плоскостей.
- 7.3. Пересечение двух многогранников
- 7.4. Пересечение многогранника и кривой поверхности
- 7.5. Построение линии пересечения поверхностей
- 7.6. Способ концентрических сфер
- 7.7. Примеры применения способа сфер
- 7.8. Особые случаи пересечения. Теорема Монжа

7.1. Взаимное пересечение поверхностей

Две поверхности пересекаются по линии, которая одновременно принадлежит каждой из них. В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть прямой, ломаной или кривой (плоской или пространственной).

Напомним, что задача определения линии пересечения двух поверхностей называется *второй позиционной задачей*. Решение этой задачи сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, соединяющая эти точки, будет искомой.

Точки, образующие линию пересечения, разделяют на опорные и промежуточные. К опорным точкам относятся следующие виды точек.

1. Точки на ребрах многогранников.
2. Очерковые точки, то есть точки, лежащие на очерковых линиях данных фигур.
3. Точки смены видимости искомой линии пересечения относительно плоскостей проекций.
4. Экстремальные точки, то есть самая близкая и самая удаленная точки линии пересечения относительно той или иной плоскости проекций. Экстремальные точки относительно Π_i называют высшей и низшей.

Основным способом построения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, является *способ вспомогательных секущих поверхностей*. Сущность его заключается в том, что обе заданные поверхности “разрезаются” вспомогательной секущей поверхностью. Возникают две линии разреза, которые пересекаются между собой в точках, лежащих на обеих заданных поверхностях.

Чаще всего в качестве вспомогательных секущих поверхностей применяют плоскости (*способ вспомогательных плоскостей*) или сферы (*способ вспомогательных сфер*).

7.2. Схема решения второй позиционной задачи с использованием вспомогательных секущих плоскостей.

1. Проводят вспомогательную плоскость Σ , разрезающую заданные поверхности Θ и Γ (рис. 7.1).

2. Находят линии t, g разреза заданных поверхностей вспомогательной плоскостью Σ .

3. Отмечают точки 1 и 2 пересечения линий разреза t и g . Эти точки находятся на обеих поверхностях, то есть на искомой линии их пересечения.

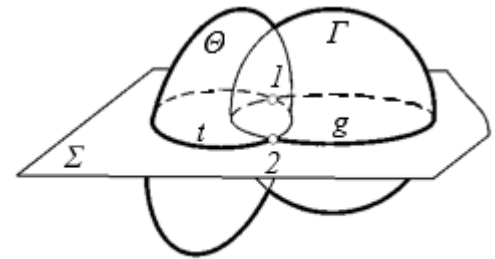


Рис. 7.1

Многочисленное повторение рассмотренной схемы позволяет определить достаточное количество точек (опорных и промежуточных), через которые проходит линия пересечения данных поверхностей.

Вспомогательные секущие плоскости могут быть выбраны вполне произвольно. Тем не менее, желательно выбирать секущие плоскости так, чтобы проекции линий пересечения ее с данными поверхностями были графически простыми линиями (прямыми или окружностями).

Задача 1. Построить линию пересечения прямого кругового конуса и сферы. Построение линии пересечения следует начинать с поиска опорных точек (экстремальных, очерковых и точек смены видимости). Для определения экстремальных точек

вводим в рассмотрение общую плоскость симметрии данных фигур (рис. 7.2). Общая плоскость симметрии Σ рассекает конус по треугольнику, а сферу – по окружности.

Фронтальные проекции этих линий называют фронтальными очерковыми линиями данных фигур.

Фронтальные очерковые линии конуса и сферы пересекаются в точках A и B (см. рис. 7.2). Точки A и B – экстремальные (верхняя и нижняя) относительно горизонтальной плоскости проекций. Таким образом, использование общей плоскости симметрии Σ позволяет определить экстремальные точки искомой линии пересечения.

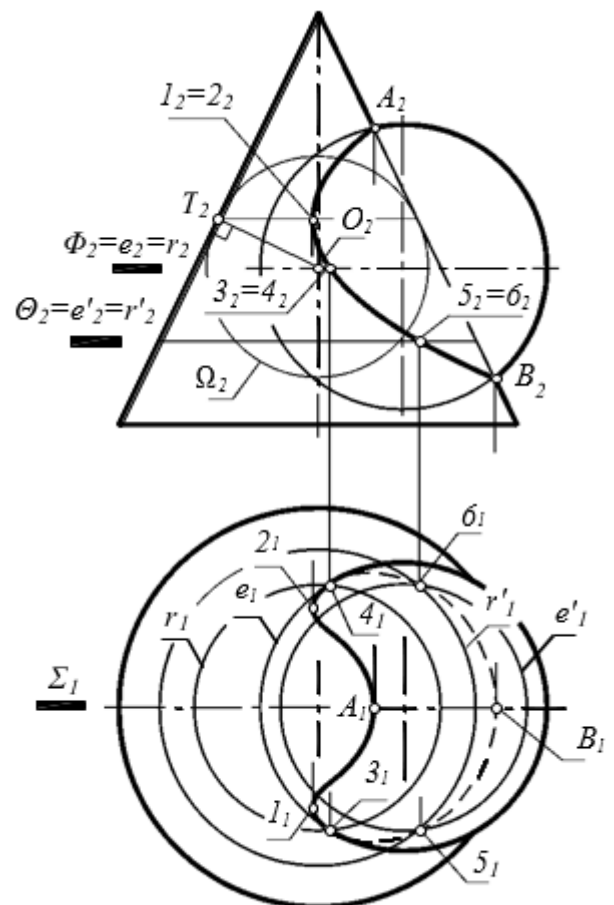


Рис. 7.2

Наиболее удаленные от Π_3 точки 1 и 2 являются экстремальными точками

относительно профильной плоскости проекций. Построение этих точек выполняется с помощью вписанной в конус вспомогательной сферы Ω радиусом OT , центр O которой находится в точке пересечения осей сферы и конуса.

Для дальнейших рассуждений целесообразно уподобить сферу земному шару. Верхнюю точку сферы будем считать “северным полюсом”, нижнюю точку – “южным полюсом”. Между полюсами расположен “экватор” (большой круг на сфере, лежащий в плоскости, отмеченной на рис. 7.2 буквой Φ).

Плоскость Φ является *плоскостью смены видимости* для горизонтальной проекции данных фигур. Действительно, точки на сфере, лежащие выше “экваториальной плоскости” Φ , при взгляде сверху будут видимыми. Точки на сфере, расположенные ниже плоскости Φ – невидимы, так как заслонены от наблюдателя верхней половиной сферы. Применение вспомогательной плоскости Φ позволяет определить *точки смены видимости* 3 и 4 на горизонтальной проекции данных поверхностей. Для определения точек 3 и 4 мысленно рассежем сферу и конус плоскостью Φ . Плоскость Φ пересекает сферу по “экватору” e , а конус – по окружности r . На пересечении горизонтальных проекций e_1 и r_1 отмечаем горизонтальные проекции 3_1 и 4_1 точек смены видимости. Точки 3 и 4 являются одновременно как точками смены видимости, так и *очерковыми* точками, поскольку они находятся на горизонтальном очерке сферы. При переходе из верхнего (“северного”) полушария в нижнее (“южное”) полушарие, линия пересечения сферы и конуса на плоскости Π_1 становится невидимой. Видимость линии меняется в точках 3 и 4 , лежащих в плоскости смены видимости Φ .

Напомним, что экстремальные точки, очерковые точки и точки смены видимости называют *опорными* точками. После определения опорных точек линии пересечения приступают к построению ее *промежуточных* точек. На рис. 7.2 показана вспомогательная горизонтальная плоскость Θ , разрезающая сферу и конус по окружностям e' и r' . На пересечении этих линий отмечаем пару точек 5 и 6 , симметрично расположенных относительно общей плоскости симметрии Σ .

Соединяя найденные точки плавной кривой, получаем искомую линию пересечения конуса и сферы. На горизонтальной плоскости проекций эта линия частично невидима, а на фронтальной проекции видимый участок линии пересечения совпадает с невидимым.

Полученная линия пересечения алгебраических поверхностей второго порядка (конуса и сферы) – алгебраическая кривая четвертого порядка. Эта кривая симметрична относительно фронтальной плоскости уровня Σ , поэтому ее фронтальная проекция вырождается в кривую второго порядка. В рассматриваемом примере фронтальная проекция линии пересечения вырождается в параболу с вершиной в точке $I_2=2_2$ и горизонтальной осью.

Задача 2. Построить линию пересечения поверхностей открытого тора и кругового цилиндра (рис. 7.3).

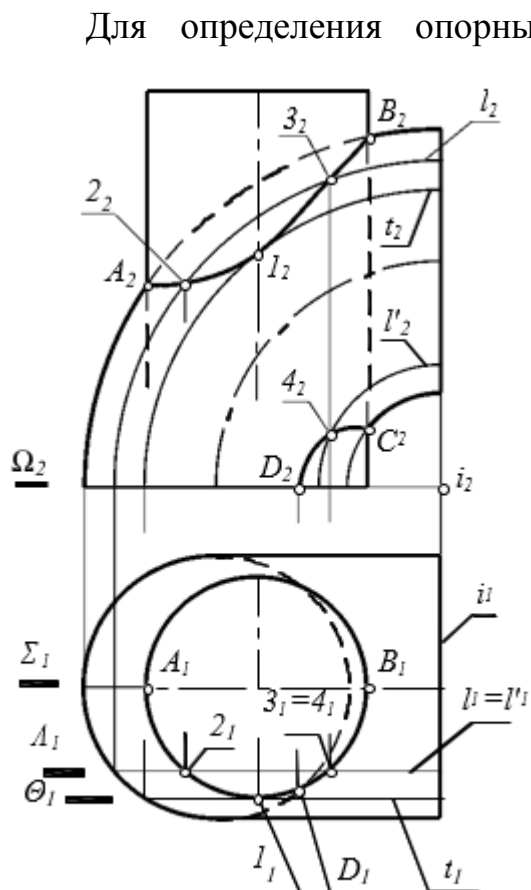


Рис. 7.3

Для определения опорных точек вводим в рассмотрение общую плоскость симметрии Σ данных фигур. Фронтальные проекции линий пересечения тора и цилиндра плоскостью Σ совпадают с их фронтальными очерками, поэтому точки A, B, C пересечения очерковых линий принадлежат искомой линии пересечения. Точка B – экстремальная относительно горизонтальной плоскости проекций, точка A – наиболее удалена от профильной плоскости (экстремальная относительно Π). Опорная точка D отмечается в плоскости Ω на пересечении линий основания тора и цилиндра.

Построение промежуточных точек упрощается тем, что одна из заданных поверхностей – проецирующая. В рассматриваемом примере цилиндрическая поверхность занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому на плоскости Π_1 проекция искомой линии пересечения совпадает с проекцией цилиндра.

Плоскость Θ , касающаяся цилиндра и перпендикулярная к оси тора, пересекает тор по параллели t . На этой параллели отмечаем опорную точку I (экстремальную относительно Π_2)

Проводим произвольную вспомогательную секущую плоскость A , перпендикулярную оси вращения i тора. Эта плоскость пересекает тор по окружностям (параллелям) l и l' . Начертив фронтальные проекции параллелей l и l' , отмечаем на них промежуточные точки $2, 3, 4$. Соединяя найденные опорные и промежуточные точки, получаем фронтальную проекцию искомой линии пересечения тора и цилиндра (ее горизонтальная проекция совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра). Линия пересечения тора и цилиндра симметрична относительно их общей плоскости симметрии Σ .

7.3. Пересечение двух многогранников

При пересечении двух многогранников возможны два случая: *врезка* или *проницание*.

При *врезке* в пересечении участвуют *частично* ребра одного и другого многогранника. При этом линия пересечения представляет собой одну замкнутую пространственную ломаную линию.

Проницанием называют такой вид пересечения многогранников, при котором в пересечении принимают участие *все* ребра одного из них и только *часть* ребер второго. Линия пересечения при проницании распадается на две замкнутые ломаные.

Как при врезке, так и при проницании вершинами ломаной линии являются точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого.

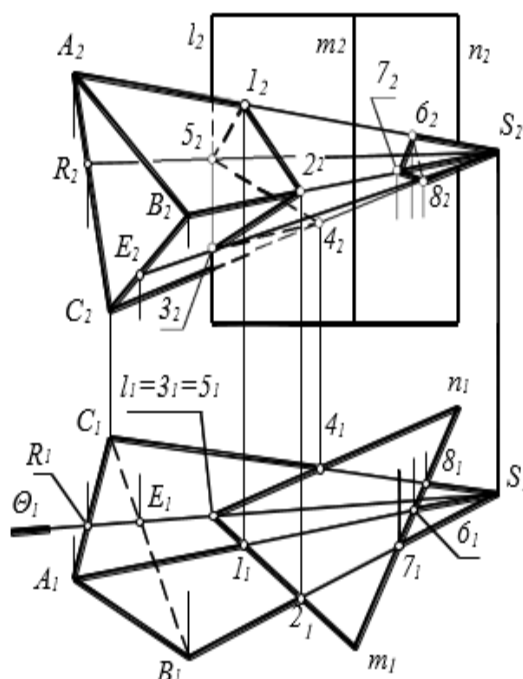


Рис. 7.4.

Правило. Построение линии пересечения многогранников заключается в нахождении точек пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого (то есть в многократном решении первой позиционной задачи).

На рис. 7.5 показан случай *проницания*: пирамида $ABCS$ “прокалывает” трехгранную призму. При этом линия пересечения распадается на две замкнутые ломаные: пространственную ломаную линию $1-2-3-4-5-1$ (границу “входного отверстия” в призме) и плоскую ломаную $6-7-8$ (границу “выходного отверстия”). В пересечении принимают участие все боковые ребра пирамиды и только одно ребро l вертикальной призмы. Ребра m и n призмы в пересечении с пирамидой не участвуют.

Боковые грани призмы (см. рис. 7.5) занимают горизонтально-проецирующее положение, поэтому точки $1, 2, 4, 6, 7, 8$ пересечения ребер пирамиды с гранями призмы отмечаются на горизонтальной плоскости проекций без вспомогательных построений.

Фронтальные проекции этих точек найдены с помощью линий связи.

Для построения точек 3 и 5 пересечения ребра l призмы с гранями пирамиды потребовалось провести через ребро l вспомогательную секущую плоскость Θ . Эта плоскость “разрезала” боковые грани пирамиды по прямым RS и ES . На пересечении прямой l с линиями RS и ES отмечены точки 3 и 5 , в которых ребро l призмы пересекается с гранями пирамиды.

Найденные точки пересечения ребер с гранями определяют вершины искомой ломаной линии пересечения многогранников.

При соединении точек пересечения удобно пользоваться схемой Ананова, представляющей собой наложенные друг на друга схематические

развертки многогранников. Соединять можно только точки, находящиеся в одной клетке схемы.

Видимые на данной плоскости поверхности проекций будут линии пересечения двух видимых граней многогранников.

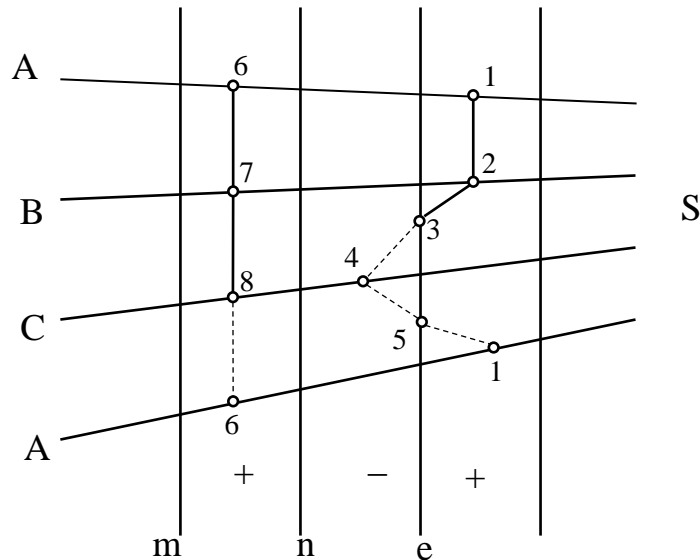


Рис. 7.5. – Схема проф. Ананова

7.4. Пересечение многогранника и кривой поверхности

Линия пересечения многогранной и кривой поверхностей в общем случае представляет собой совокупность плоских кривых линий, которые получаются в пересечении граней многогранника и кривой поверхности. Эти кривые линии пересекаются в точках, лежащих на ребрах многогранника.

Построение линии пересечения произвольной поверхности с многогранником сводится к построению линии пересечения данной поверхности с каждой гранью многогранника.

Задача 2. Построить линию пересечения сферы и правильной трехгранной пирамиды (рис. 7.6).

Боковые грани правильной пирамиды равны и равно наклонены к горизонтальной плоскости проекций. В соответствии с условием задачи, боковые грани пирамиды пересекают сферу по одинаковым дугам окружностей. Следовательно, искомая линия пересечения представляет собой совокупность трех одинаковых дуг, пересекающихся между собой в точках на ребрах пирамиды.

Задача решается способом вспомогательных секущих плоскостей. Заметим, что заданные поверхности (сфера и пирамида) имеют общую плоскость симметрии Σ , параллельную плоскости проекций Π_3 . В плоскости Σ располагаются экстремальные (верхняя и нижняя) точки искомой линии пересечения. Мысленно “разрезая” данные поверхности плоскостью Σ , получаем на Π_3 линии разреза, которые совпадают с очерковыми линиями

сферы и пирамиды. Эти линии пересекаются в точках 1 и 2 (самой верхней и самой нижней точках искомой линии пересечения).

В точке 1 ребро BS пирамиды пересекается с поверхностью сферы. Согласно условию задачи, боковые ребра пирамиды симметрично расположены относительно сферы. Поэтому можно сразу отметить точки пересечения ребра CS (точка $1'$) и ребра AS (точка $1''$) со сферой. Точки 1 , $1'$ и $1''$ расположены на одной высоте. Это самые верхние точки составной линии пересечения данных фигур.

Точка 2 расположена на оси симметрии грани ACS . Все три боковые грани пирамиды симметричны относительно сферы, поэтому можно “перенести” точку 2 на ось симметрии грани BCS (точка $2'$) и ось симметрии грани ABS (точка $2''$). Точки 2 , $2'$ и $2''$ расположены на одной высоте. Это нижние точки искомой линии пересечения.

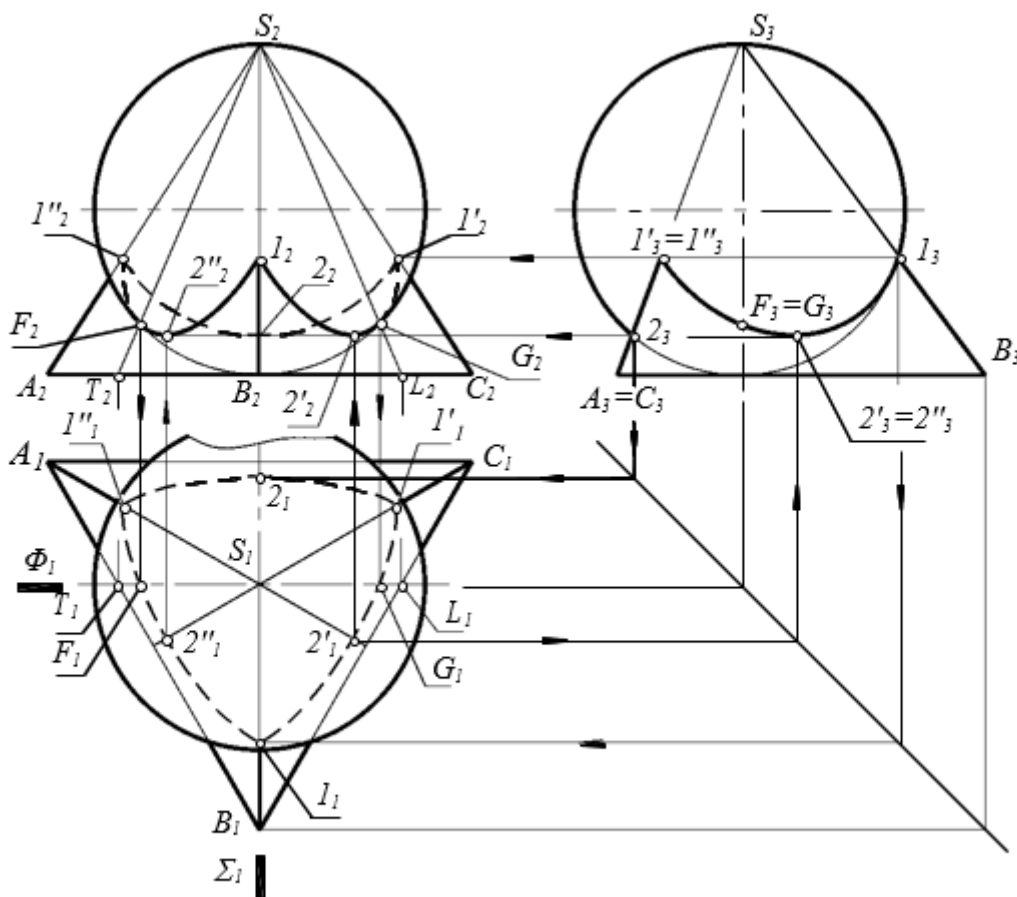


Рис. 7.6

В пересечении сферы с гранью ABS получаем дугу окружности $1-2''-1''$, в пересечении с гранью ACS – дугу $1'-2-1'$, в пересечении с гранью BCS – дугу $1-2'-1'$. Дуги окружностей на чертеже изображаются участками эллипсов.

Исследуем видимость линии пересечения.

1. На горизонтальной плоскости проекций вся линия полностью невидима, так как закрыта от наблюдателя верхней половиной сферы.

2. На профильной плоскости видимая проекция участка $1-2''-1''$ совпадает с невидимой проекцией участка $1-2'-1'$. Грань ACS – профильно-проецирующая, поэтому профильная проекция участка $1''-2-1'$ совпадает с профильной проекцией грани ACS .

3. Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций используем *плоскость смены видимости* Φ , пересекающую сферу по окружности, а пирамиду по треугольнику TSL . Эти линии (окружность и треугольник) пересекаются в *точках смены видимости* G и F . Точки G и F являются очерковыми, так как находятся на фронтальном очерке сферы.

После построения опорных точек (экстремальных, очерковых, точек смены видимости) приступают к построению промежуточных точек искомой линии пересечения поверхностей. Между экстремальными точками 1 и 2 проводят вспомогательную горизонтальную плоскость уровня, которая пересекает пирамиду по треугольнику, а сферу по окружности. Точки пересечения этих линий – дополнительные точки искомой линии пересечения данных поверхностей. На рис. 7.6 это построение не показано.

7.5. Построение линии пересечения поверхностей

В начертательной геометрии точки, принадлежащие линии пересечения двух поверхностей, находят с помощью *способа вспомогательных секущих поверхностей*. На выбор секущей поверхности накладывается требование: проекции линии пересечения вспомогательной поверхности с заданными поверхностями должны быть графически простыми линиями – прямыми или окружностями.

Чаще всего в качестве вспомогательной секущей поверхности используют *плоскость*. Но в некоторых случаях в качестве вспомогательной секущей поверхности может быть использована *сфера*.

Применение сфер основано на следующем свойстве поверхностей вращения: *соосные поверхности вращения пересекаются по окружности* (соосными называют поверхности вращения, имеющие общую ось).

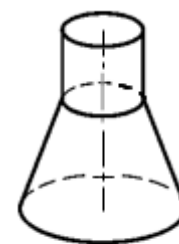


Рис. 7.7

Например, соосные конус вращения и круговой цилиндр пересекаются по

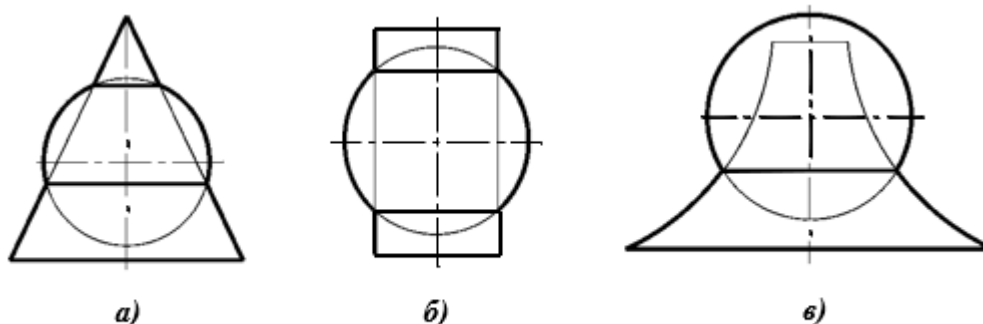


Рис. 7.8

окружности (рис. 7.7).

В частности, всякая сфера, центр которой находится на оси какой-нибудь поверхности вращения, пересекается с этой поверхностью по одной или нескольким окружностям.

Примеры. Соосные сфера и конус вращения (рис. 7.8, *a*) пересекаются по двум окружностям разного диаметра. Цилиндр вращения и сфера с центром на

оси цилиндра (рис. 7.8, б) пересекаются по двум одинаковым окружностям. Поверхность вращения и сфера (рис. 7.8, в), пересекаются по окружности.

Различают способ вспомогательных *концентрических* сфер и способ вспомогательных *эксцентрических* сфер. Концентрическими называют сферы с общим центром. Если центры сфер не совпадают, то такие сферы называют эксцентрическими.

7.6. Способ концентрических сфер

Способ концентрических сфер применяется для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций. Точка пересечения осей – общий центр всех вспомогательных сфер.

Рассмотрим сущность способа концентрических сфер на примере построения линии пересечения кругового конуса и цилиндра вращения (рис. 7.9, а). Пересекающиеся оси поверхностей лежат в их общей плоскости симметрии, параллельной фронтальной плоскости проекций.

Проведем сферу произвольного радиуса R с центром O в точке

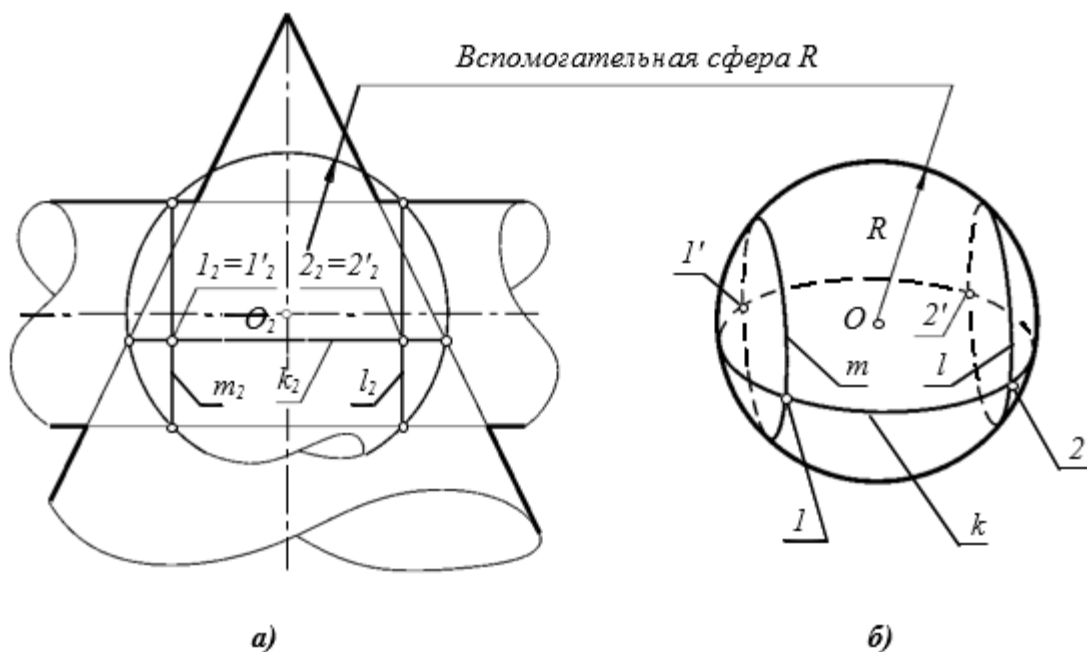


Рис. 7.9

пересечения осей конуса и цилиндра. Эта сфера пересечет конус по окружности k , а цилиндр – по окружностям m , l . На фронтальной плоскости проекций эти окружности изображаются отрезками k_2 , m_2 и l_2 (см. рис. 7.9, а).

Окружности m , l пересекаются с окружностью k , так как находятся на одной и той же сфере R (рис. 7.9, б). Точки пересечения 1 , $1'$ и 2 , $2'$ этих окружностей принадлежат линии пересечения заданных поверхностей.

Запишем схему решения второй позиционной задачи с использованием вспомогательных секущих сфер.

1. Проводим вспомогательную сферу R , пересекающую заданные поверхности вращения (см. рис. 7.9, а).

2. Находим линии пересечения заданных поверхностей и

вспомогательной сферы R (окружности k, m, l на рис. 7.9, а, б).

3. Отмечаем общие точки $1, 1'$ и $2, 2'$ окружностей k, m, l . Эти точки принадлежат как поверхности конуса, так и поверхности цилиндра, следовательно, находятся на линии пересечения этих поверхностей.

Многократное повторение рассмотренной схемы с использованием вспомогательных концентрических сфер разного радиуса позволяет определить достаточное количество точек, через которые проходит искомая линия пересечения поверхностей.

Вспомогательная сфера должна пересекать обе заданные поверхности, поэтому нет смысла использовать сферу, которая не пересекает какую-либо из данных поверхностей. На рис. 7.10 показана сфера R_{min} , вписанная в конус. Сфера с радиусом меньше, чем R_{min} , не пересечется с конусом. Сфера R_{min} – вспомогательная сфера минимального радиуса.

Правило. Минимальный радиус R_{min} вспомогательной сферы определяется как радиус наибольшей из сфер, вписанных в заданные поверхности.

В рассматриваемом примере минимальная сфера касается конуса по окружности t и пересекается с цилиндром по окружностям a, b (на рис. 7.10 эти окружности изображаются отрезками t_2, a_2, b_2). Окружности t, a, b пересекаются в четырех точках K, K', L, L' , лежащих на линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра.

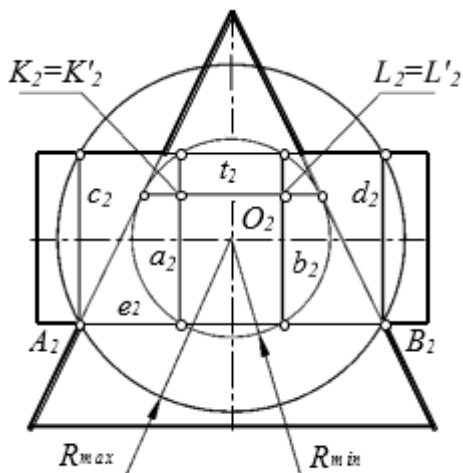
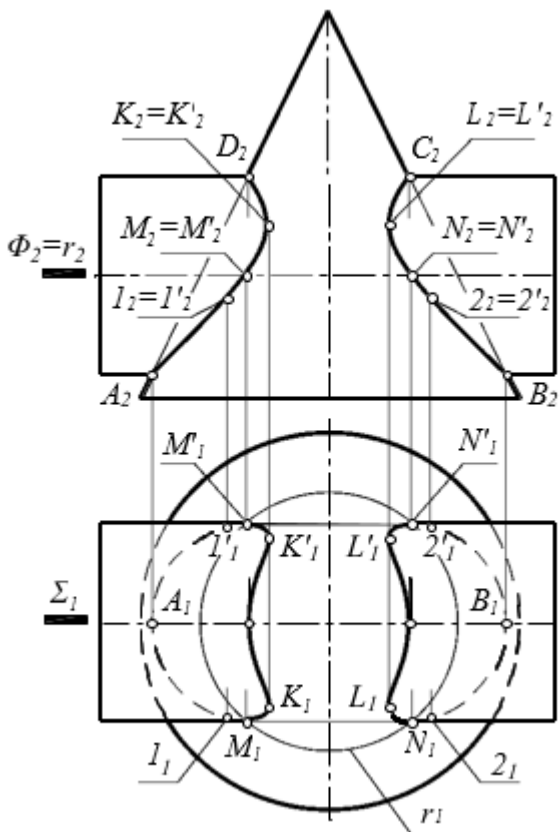


Рис. 7.10

Кроме “минимальной” вспомогательной сферы, существует и “максимальная” вспомогательная сфера. На рис. 7.10 показана сфера с радиусом R_{max} , пересекающая конус по окружности e , а цилиндр – по окружностям c и d (отрезки e_2, c_2, d_2 на рис. 7.10). Эти окружности имеют две общие точки A и B . Сфера с радиусом больше, чем R_{max} , “разрезает” заданные поверхности по окружностям, вообще не пересекающимся между собой. Сфера R_{max} – вспомогательная сфера максимального радиуса.

Правило. Максимальный радиус R_{max} вспомогательной сферы определяется как расстояние от проекции центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерковых линий.

Линия пересечения поверхностей конуса и цилиндра показана на рис. 7.11. Очерковые точки A, B, C, D найдены с помощью общей плоскости симметрии Σ рассекающей конус и цилиндр по фронтальным очерковым линиям; очерковые линии пересекаются между собой в точках A, B, C, D .



Точки K, K', L, L' определены с помощью “минимальной” сферы R_{min} (см. рис. 7.11). Промежуточные точки I, I' и $2, 2'$ найдены с помощью вспомогательной секущей сферы R с центром в точке пересечения осей и радиусом $R_{min} \leq R \leq R_{max}$ (см. рис. 7.9). Горизонтальные проекции этих точек построены с помощью линий связи из условия их принадлежности к поверхности вспомогательной сферы R или к одной из данных поверхностей.

Видимость горизонтальной проекции искомой линии пересечения меняется в точках M, M', N, N' , лежащих в плоскости смены видимости Φ . Плоскость Φ пересекает конус по окружности r , а цилиндр по горизонтальному

Рис. 7.11
 отмечены горизонтальные проекции M_1, M'_1, N_1, N'_1 точек смены видимости M, M', N, N' . Фронтальные проекции этих точек принадлежат вырожденной фронтальной проекции плоскости Φ (см. рис. 7.11).

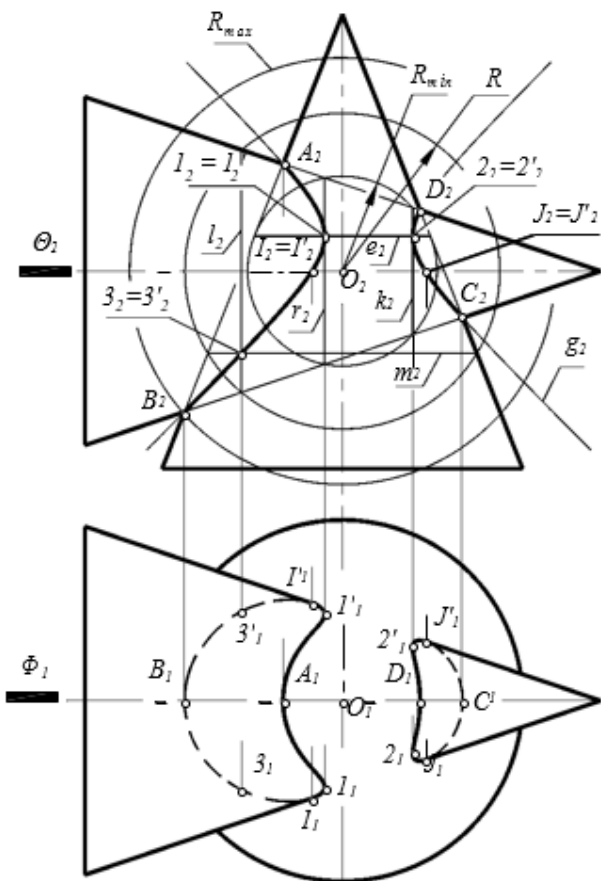


Рис. 7.12

7.7. Примеры применения способа сфер

Задача 1. Построить линию пересечения круговых конусов с общей фронтальной плоскостью симметрии (рис. 7.12).

Даны поверхности вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии Φ , параллельной плоскости Π_2 . Следовательно,

для решения задачи может быть использован способ вспомогательных концентрических сфер. Общая плоскость симметрии Φ разрезает конусы по фронтальным очерковым линиям, которые пересекаются между со бой в

точках A, B, C, D . Это экстремальные относительно точки искомой линии пересечения.

Плоскость Θ – плоскость смены видимости на горизонтальной проекции. При взгляде сверху точки, лежащие *выше* плоскости Θ , *видимы*. Точки, расположенные *ниже* плоскости Θ – *невидимы* (закрываются от наблюдателя верхней частью горизонтального конуса). В плоскости Θ располагаются точки смены видимости $I-I'$ и $J-J'$.

Промежуточные точки искомой линии пересечения определяются с помощью вспомогательных концентрических сфер с центром в точке O пересечения осей конусов. Минимальная сфера R_{min} , вписанная в вертикальный конус, касается его по окружности e , пересекая при этом горизонтальный конус по окружностям r, k . Фронтальные проекции этих окружностей изображаются отрезками e_2, r_2 и k_2 , которые пересекаются между собой в точках $I_2=I'_2$ и $2_2=2'_2$.

На рис. 9.8, кроме минимальной сферы, показана вспомогательная сфера R произвольного радиуса ($R_{max} \geq R \geq R_{min}$), пересекающаяся с данными конусами по окружностям l и m . На пересечении фронтальных проекций l_2, m_2 этих окружностей отмечены фронтальные проекции точек $3_2=3'_2$ искомой линии пересечения. Горизонтальные проекции найденных точек определяются по принадлежности их либо поверхности вертикального конуса, либо поверхности вспомогательной сферы.

В рассматриваемом примере реализован случай *проницания*. Линия пересечения конусов представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка, распавшуюся на две замкнутые пространственные кривые (линию “входа” и линию “выхода”). Обе поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии, поэтому на фронтальной плоскости кривая четвертого порядка изображается кривой второго порядка, в данном случае – гиперболой g_2 . Горизонтальная ось гиперболы проходит через вершины гиперболы – точки $I_2=I'_2$ и $2_2=2'_2$, найденные с помощью минимальной сферы R_{min} .

Задача 2. Построить линию пересечения кругового конуса и сферы (рис. 7.13). Линия пересечения сферы и конуса может быть определена с помощью вспомогательных секущих плоскостей, но этим способом не удастся найти экстремальные относительно Π_3 точки 1 и 2 . Для построения этих точек используется вспомогательная сфера. Отметим точку O пересечения осей конуса и сферы Ω и проведем минимальную вспомогательную сферу R_{min} с центром в точке O , касающуюся конуса по окружности k и разрезающую данную сферу Ω по окружности r (см. рис. 7.13). Окружности k и r пересекаются в точках 1 и 2 , фронтальные проекции которых совпадают. Точки $1, 2$ наиболее удалены от плоскости Π_3 , то есть являются экстремальными. Действительно, любая

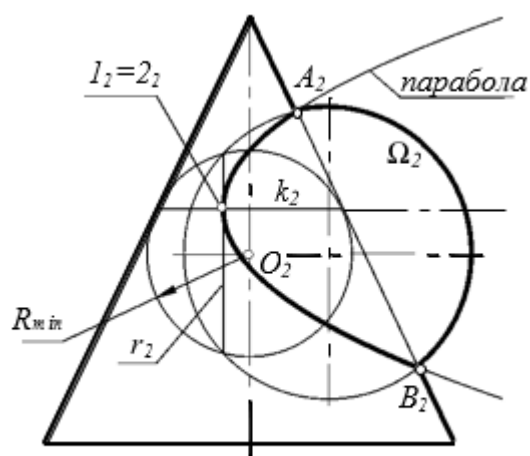


Рис. 7.13

вспомогательная сфера с центром в точке O и радиусом больше R_{min} , пересекает сферу Ω по окружности, расположенной ближе к Π_3 , чем окружность r .

7.8. Особые случаи пересечения. Теорема Монжа

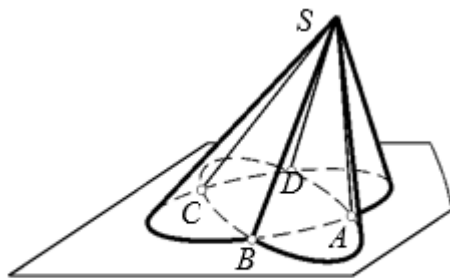


Рис. 7.14

Поскольку поверхности второго порядка являются алгебраическими, то и линия их пересечения есть алгебраическая кривая (в общем случае - пространственная). Так как порядок линии пересечения равен произведению порядков поверхностей, то эта линия – всегда кривая четвертого порядка. В отличие от других алгебраических кривых четвертого порядка, ее называют *биквадратной кривой*.

Эта кривая может распадаться на несколько алгебраических линий более низких порядков: на четыре прямые ($4=1+1+1+1$), на две кривые второго порядка ($4=2+2$), на кривую второго порядка и две прямые ($4=2+1+1$), на кривую третьего порядка и прямую ($4=3+1$). Например, два эллиптических конуса с общей вершиной S пересекаются по четырем прямым SA, SB, SC, SD (рис. 7.14).

В прикладных геометрических задачах чаще всего встречается случай распада биквадратной кривой на две кривые второго порядка. Условия, при которых возможно такое распадение, формулируются в виде трех теорем: теоремы о пересечении поверхностей второго порядка по плоской кривой, теоремы о двойном прикосновении, теоремы Монжа.

Поверхности второго порядка могут соприкасаться между собой не только в отдельных точках, но и по плоской кривой (второго порядка). В этом случае говорят, что одна из поверхностей “вписана” (плотно вложена) в другую поверхность или одна из поверхностей “описана” (плотно облегает) другую поверхность.

Определение. Поверхность второго порядка вписана в другую поверхность второго порядка (или описана около нее), если эти поверхности касаются друг друга по плоской кривой.

Например, в круговой цилиндр радиусом R можно вложить сферу такого же радиуса R . Цилиндр и сфера будут соприкасаться по окружности. При этом говорят, что сфера *вписана* в цилиндр, а цилиндр *описан* около сферы.

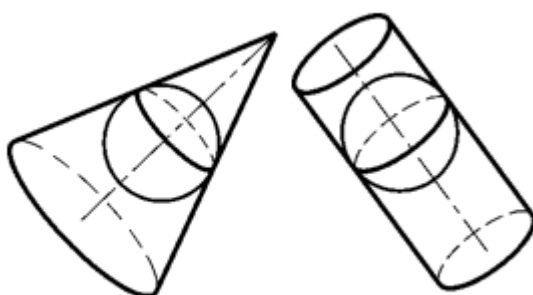


Рис. 7.15



Рис. 7.16

Сфера может быть вписана не только в цилиндр, но и в круговой конус. В этом случае сфера и конус также соприкасаются по окружности.

На рис. 7.15 показаны две сферы. Одна из них вписана (плотно вложена) в круговой конус, другая сфера вписана (плотно вложена) в цилиндр вращения. И наоборот: конус и цилиндр, показанные на рис. 7.15, описаны около вложенных в них сфер.

Пусть конус и цилиндр описаны около одной сферы (рис. 7.16). Как выглядит линия их пересечения? Ответ на этот вопрос дает теорема 3 (теорема Монжа).

Теорема Монжа. *Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.*

В практических задачах теорема Монжа применяется чаще всего в тех случаях, когда пересекаются поверхности вращения второго порядка, описанные около общей сферы или вписанные в нее. Рассмотрим несколько задач на построение линии пересечения поверхностей второго порядка для особых случаев их взаимного расположения, удовлетворяющих условиям теоремы Монжа.

Задача 1. *Построить линию пересечения поверхностей кругового конуса и цилиндра вращения, описанных около сферы (рис. 7.17).*

Конус и цилиндр касаются сферы по окружностям t и g , которые пересекаются между собой в точках T и G . Согласно теореме Монжа, в этом случае линиями пересечения данных поверхностей будут два эллипса, плоскости которых проходят через прямую TG , соединяющую точки T , G пересечения линий касания t, g .

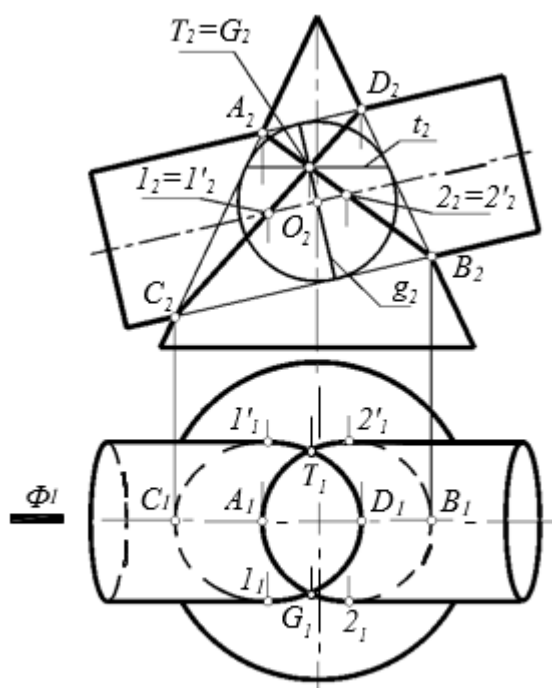


Рис. 7.17

Данные поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ , параллельную плоскости проекций Π_2 . Следовательно, прямая TG занимает фронтально-проецирующее положение. Искомые линии пересечения конуса и цилиндра проецируются на Π_2 отрезками A_2B_2 и C_2D_2 , где A, B, C, D – точки пересечения фронтальных очерковых линий конуса и цилиндра (см. рис. 7.17).

На горизонтальной проекции видимость линии пересечения, распавшейся на два эллипса, меняется в точках $1, 1'$ и $2, 2'$, лежащих на горизонтальном очерке цилиндра. Любое количество точек линии пересечения конуса и цилиндра можно построить по их принадлежности к поверхности конуса.

конуса.

Задача 2. *Построить линию пересечения поверхностей двух цилиндров*

одинакового диаметра с пересекающимися осями.

На рис. 7.18–7.20 показаны фронтальные проекции круговых цилиндров одинакового диаметра. Пересекающиеся оси цилиндров параллельны фронтальной плоскости проекций.

Во всех трех случаях цилиндры описаны около сферы (с центром в точке

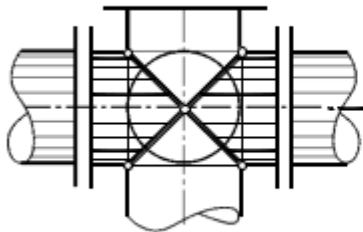


Рис. 7.18

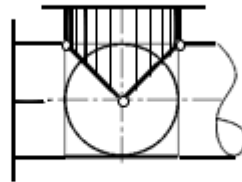


Рис. 7.19

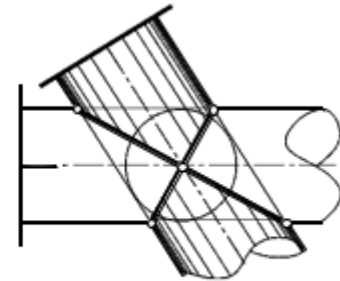


Рис. 7.20

пересечения осей). В соответствии с теоремой Монжа, линия их пересечения распадается на две плоские кривые (эллипсы), фронтальные проекции которых вырождаются в отрезки прямых линий.

Задача 3. *Спроектировать угловое соединение двух трубопроводов одинакового диаметра.*

На рис. 7.21 показан простой угловой переходник, предназначенный для

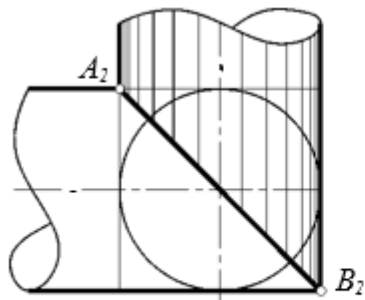


Рис. 7.21

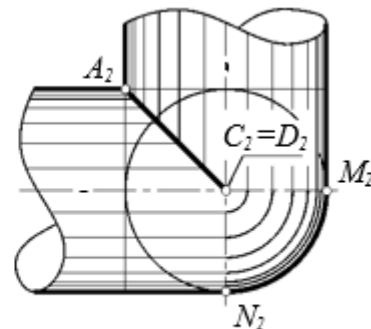


Рис. 7.22

соединения цилиндрических трубопроводов с взаимно перпендикулярными осями. Линия AB пересечения соединяемых трубопроводов, в соответствии с теоремой Монжа – эллипс.

Вопросы для самоконтроля

1. Какую геометрическую задачу называют второй позиционной задачей?
2. В чем состоит сущность способа вспомогательных секущих плоскостей?
3. Как определяется порядок линии пересечения двух алгебраических поверхностей? Может ли пространственная алгебраическая кривая восьмого порядка изображаться на одной из плоскостей проекций окружностью? Дать пример.
4. По какой линии пересекаются соосные поверхности вращения?
5. Назвать условия применения способа концентрических сфер.
6. В каком диапазоне следует выбирать радиус вспомогательной секущей сферы при применении способа концентрических сфер?

Лекция 8. Преобразование комплексного чертежа. Метрические задачи

План лекции 8:

- 8.1. Способы преобразования чертежа
- 8.2. Способ замены плоскостей проекций
- 8.3. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций
 - 8.3.1. Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую
 - 8.3.2. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня
- 8.4. Способ плоскопараллельного движения
- 8.5. Основные задачи, решаемые способом плоскопараллельного движения

8.1. Способы преобразования чертежа

Решение многих геометрических задач (как метрических, так и позиционных) упрощается, если исходные фигуры занимают частное положение относительно плоскостей проекций.

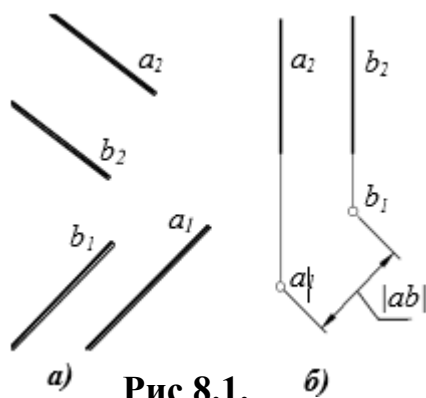


Рис 8.1.

проекциями a_1, b_1 данных прямых a, b .

Чертеж пространственных геометрических фигур

можно преобразовать двумя способами: либо меняя положение системы координат относительно заданных неподвижных геометрических фигур, либо меняя положение фигур относительно заданной неподвижной системы координат. В обоих случаях цель преобразования состоит в том, чтобы какая-либо из заданных фигур заняла частное положение по отношению к одной из плоскостей проекций.

В настоящей лекции рассмотрены следующие способы.

1. *Способ замены плоскостей проекций*, основанный на изменении положения системы координат относительно заданных неподвижных геометрических фигур.

2. *Способ плоскопараллельного движения*, основанный на перемещении фигур относительно неподвижной системы координат.

8.2. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций состоит в том, что одна из двух плоскостей проекций (Π_1 или Π_2) заменяется новой плоскостью проекций Π_4 , которая располагается перпендикулярно к незаменяемой плоскости проекций и при этом располагается частным образом

относительно заданной фигуры. Образуется новая прямоугольная система плоскостей проекций, в которой заданная геометрическая фигура располагается частным образом относительно новой плоскости проекций.

Замена плоскости Π_2

Даны плоскости проекций Π_1/Π_2 и построены проекции A_1, A_2 точки A (рис. 8.2). Плоскость Π_2 перпендикулярна к плоскости Π_1 . Вместо плоскости Π_2 введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , также перпендикулярную к плоскости Π_1 . Построим ортогональную проекцию A_4 точки A на плоскость проекций Π_4 . Сравним чертежи в исходной системе координат Π_1/Π_2 и в “новой” системе координат Π_1/Π_4 .

При переходе от системы координатных плоскостей Π_1/Π_2 к системе Π_1/Π_4 остались неизменными (инвариантными):

- положение точки A ;
- положение плоскости проекций Π_1 ;
- горизонтальная проекция A_1 точки A ;
- высота z_A точки A (расстояние от точки A до плоскости Π_1).

Выявленные инварианты позволяют на основании чертежа точки A в исходной системе координат Π_1/Π_2 построить чертёж точки A в новой системе координат Π_1/Π_4 .

На рис. 8.3 дан чертеж точки A как в исходной системе Π_1/Π_2 , так и в

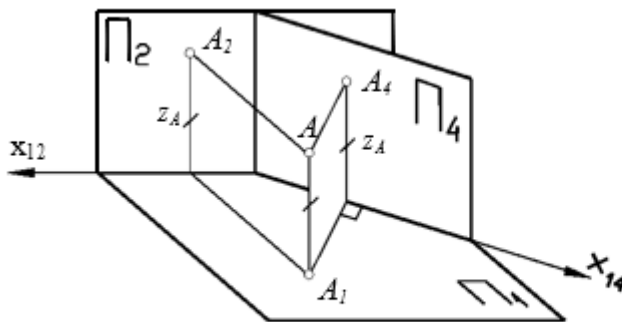


Рисунок 8.2

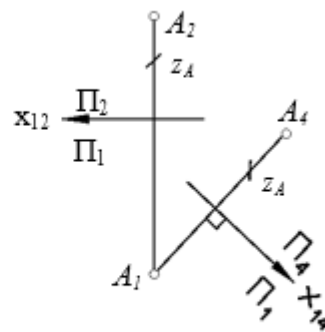


Рисунок 8.3

новой системе координат Π_1/Π_4 . Особо отмечено, что высота z_A точки A не изменилась при переходе от системы координат Π_1/Π_2 к системе Π_1/Π_4 : $|A_2 - x_{12}| = |A_4 - x_{14}|$ (почему?).

Новая ось координат x_{14} определяется как линия пересечения незаменяемой плоскости проекций Π_1 с новой плоскостью проекций Π_4 . Линия связи A_1A_4 на новом чертеже (в системе координат Π_1/Π_4) перпендикулярна новой оси координат x_{14} .

Чтобы на новой плоскости проекций Π_4 найти проекцию A_4 точки A , надо измерить расстояние от A_2 до x_{12} на плоскости Π_2 (высоту z_A точки A) и отложить это расстояние вдоль линии связи от новой оси координат x_{14} до искомой проекции A_4 точки A .

В результате выполненных построений получен чертеж точки A в “новой” системе координат Π_1/Π_4 (см. рис. 8.3).

Сформулируем основное правило преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций.

Правило. Если фронтальная плоскость проекций Π_2 заменяется на новую плоскость проекций Π_4 , то высота z_A точки A (то есть расстояние от точки A до плоскости Π_1) в новой системе координат Π_1/Π_4 не меняется, так как горизонтальная плоскость проекций Π_1 остается неизменной.

Если горизонтальная плоскость проекций Π_1 заменяется на новую плоскость проекций Π_4 , то глубина y_A точки A (то есть расстояние от точки A до плоскости Π_2) в новой системе координат Π_2/Π_4 не меняется, так как фронтальная плоскость проекций Π_2 остается неизменной.

Это правило можно не вполне строго, но более кратко сформулировать следующим образом, более удобным для запоминания: *координата точки на новой плоскости проекций равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций.* Здесь под координатой точки следует понимать расстояние от ее проекции до оси координат (как на новой, так и на заменяемой плоскостях проекций).

8.3. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекции

Метрические задачи в начертательной геометрии называются задачи, связанные с измерением расстояний и углов. Если измерения производятся между точками, прямыми и плоскостями, то такие задачи называются элементарными.

Для выполнения измерений необходимо, чтобы измеряемые элементы изображались на чертеже без искажения. Во многих случаях для этого нужно фигуру из общего положения перевести в частное относительно плоскостей проекций.

Задача 1. Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций заняла положение линии уровня.

Задача 2. Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы прямая уровня в новой системе плоскостей проекций заняла положение проецирующей прямой.

Задача 3. Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций заняла положение проецирующей плоскости.

Задача 4. Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы проецирующая плоскость в новой системе плоскостей проекций заняла положение плоскости уровня.

– Для того, чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую прямую, нужно последовательно решать первую и вторую основную задачу преобразования комплексного чертежа т.е. выполнить две замены плоскостей проекций.

– Для того, чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня, нужно последовательно решить третью и четвертую основную задачу преобразования комплексного чертежа, т.е. выполнить две замены плоскостей проекций.

8.3.1. Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую

Примечание. Для преобразования прямой общего положения в проецирующую прямую необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены прямая общего положения преобразуется в прямую уровня. В результате второй замены прямая уровня преобразуется в проецирующую прямую.

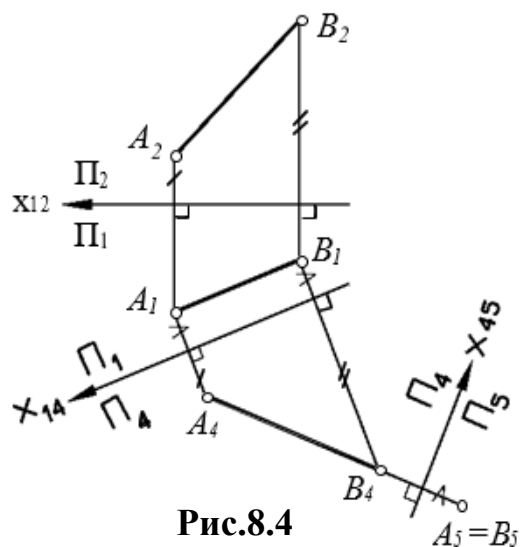


Рис.8.4

Например, на рис. 8.4 прямая общего положения AB преобразована в проецирующую прямую.

Для этого потребовалось выполнить две последовательные замены плоскостей проекций.

8.3.2. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня

Примечание. Для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены плоскость общего положения преобразуется в проецирующую плоскость. В результате второй замены проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

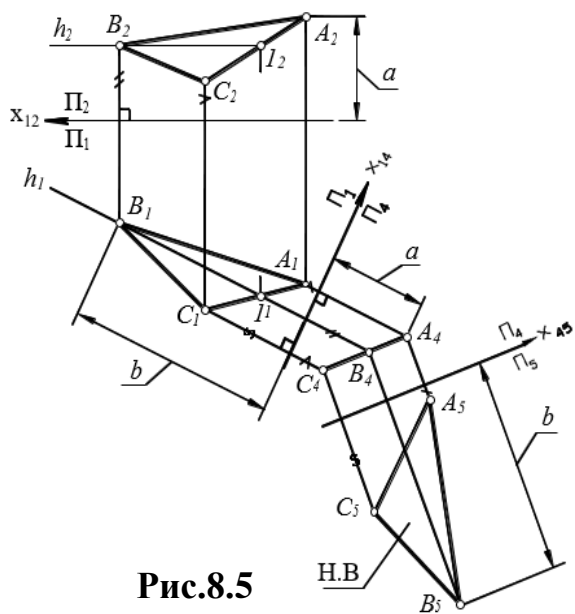


Рис.8.5

Например, на рис. 8.5 показано преобразование плоскости общего положения $\Sigma(ABC)$ в плоскость уровня. Для этого потребовалось выполнить две последовательные замены плоскостей проекций.

Таким образом, способ замены плоскостей проекций может быть использован для определения истинной формы геометрической фигуры, лежащей в плоскости общего положения.

8.4. Способ плоскопараллельного движения

Способом плоскопараллельного движения данная геометрическая фигура приводится в частное положение в результате ее перемещения в пространстве относительно неподвижной системы плоскостей проекций.

Определение. Движение фигуры в пространстве называется плоскопараллельным, если все ее точки перемещаются в параллельных плоскостях.

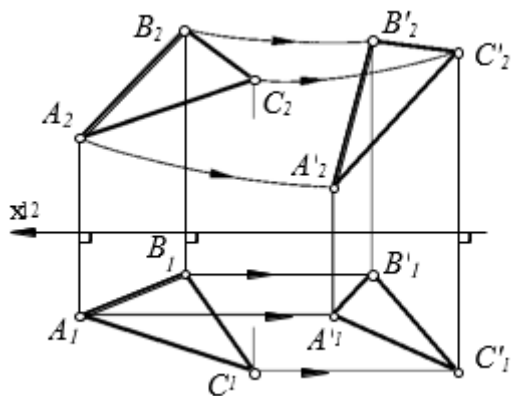


Рис.8.6

Будем рассматривать только такие плоскопараллельные движения фигуры относительно плоскостей проекций, когда все точки данной фигуры перемещаются либо параллельно плоскости Π_1 , либо параллельно плоскости Π_2 .

Пусть, например, треугольник ABC совершает плоскопараллельное движение относительно фронтальной плоскости проекций Π (рис. 8.6).

Его вершины перемещаются во фронтальных плоскостях уровня, следовательно, горизонтальные проекции вершин перемещаются по горизонтальным прямым. При таком движении угол наклона плоскости треугольника к плоскости Π_2 не меняется, поэтому фронтальная проекция треугольника не меняет свою форму. Отсюда следует теорема.

Теорема. При плоскопараллельном движении фигуры относительно плоскости Π_2 горизонтальные проекции ее точек перемещаются по прямым, перпендикулярным вертикальным линиям связи, а фронтальная проекция фигуры остается конгруэнтной самой себе.

Взаимно перпендикулярные плоскости проекций Π_1 и Π_2 вполне “равноправны”, поэтому теорема справедлива и для случая плоскопараллельного перемещения относительно плоскости Π_1 : при плоскопараллельном движении фигуры относительно плоскости Π_1 фронтальные проекции ее точек перемещаются по прямым, перпендикулярным вертикальным линиям связи, а горизонтальная проекция фигуры остается конгруэнтной самой себе.

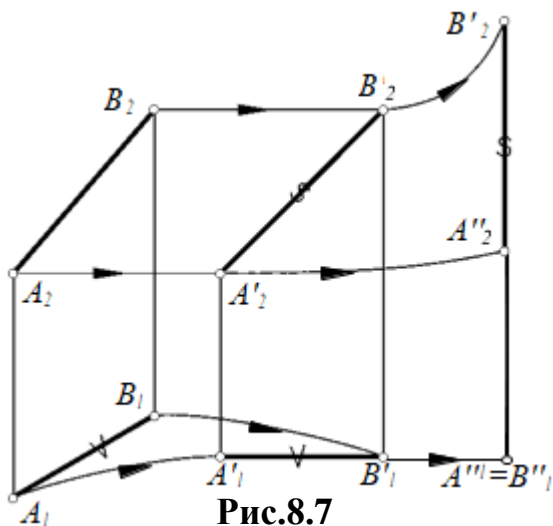
Примечание. Плоскопараллельное движение данной фигуры из своего исходного положения в конечное положение может происходить по произвольной криволинейной траектории. Существенное значение имеет только конечное положение перемещаемой фигуры, а не траектория плоскопараллельного перемещения.

8.5. Основные задачи, решаемые способом плоскопараллельного движения

Перемещая данную геометрическую фигуру, можно разместить ее частным образом относительно плоскостей проекций: прямую общего положения можно передвинуть в положение прямой уровня или проецирующей прямой (рис. 8.7), а плоскость общего положения – переместить в положение проецирующей плоскости или плоскости уровня (рис. 8.8).

Напомним, что в п. 8.2 рассматривался способ замены плоскостей проекций, когда перемещались плоскости проекций, а данная фигура оставалась неподвижной. Сейчас будет рассмотрен “обратный” способ: будем перемещать данные фигуры относительно неподвижных плоскостей проекций.

Задача 1. Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня.



Пусть требуется прямую АВ общего положения преобразовать в прямую уровня, например, во фронталь (рис.8.7). Иначе говоря, надо так передвинуть отрезок АВ, чтобы он стал располагаться параллельно фронтальной плоскости проекций.

Выполним плоскопараллельное перемещение отрезка АВ относительно плоскости Π_1 (по произвольной траектории). В соответствии со сформулированной выше теоремой, фронтальные проекции точек А, В

будут при этом перемещаться по горизонтальным прямым A_2-A_2' , B_2-B_2' . Длина горизонтальной проекции отрезка при таком движении не изменяется: $A_1B_1=A_1'B_1'$. Перемещение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет требуемое в задаче положение фронтали: $A'B' \parallel \Pi_2$.

Задача 2. Преобразовать прямую уровня в проецирующую прямую.

Пусть требуется преобразовать прямую уровня $A'B'$ (фронталь) в горизонтально-проецирующую прямую (см. рис. 8.7). Иначе говоря, надо так передвинуть отрезок $A'B'$, параллельный фронтальной плоскости проекций, чтобы он расположился перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций.

Перемещаем отрезок $A'B'$ по произвольной траектории в новое положение $A''B''$, сохраняя параллельность отрезка плоскости Π_2 (то есть выполняем плоскопараллельное перемещение отрезка $A'B'$ относительно плоскости проекций Π). Перемещение заканчивается, когда отрезок становится горизонтально-проецирующей прямой: $A''B'' \perp \Pi_1$. Чертеж, представленный на рис. 8.7, можно рассматривать как решение задачи преобразования прямой общего положения АВ в проецирующую прямую $A''B''$ посредством двух последовательных плоскопараллельных перемещений.

Задача 3. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость.

Дана плоскость ABC общего положения (рис. 8.8). Проведем в плоскости какую-нибудь линию уровня (например, фронталь f). Выполним плоскопараллельное перемещение треугольника $ABC \rightarrow A'B'C'$ относительно фронтальной плоскости проекций (по произвольной траектории). Закончим перемещение, когда фронталь f займет горизонтально-проецирующее положение f' . При этом вся плоскость $A'B'C'$ становится горизонтально-проецирующей плоскостью (почему?).

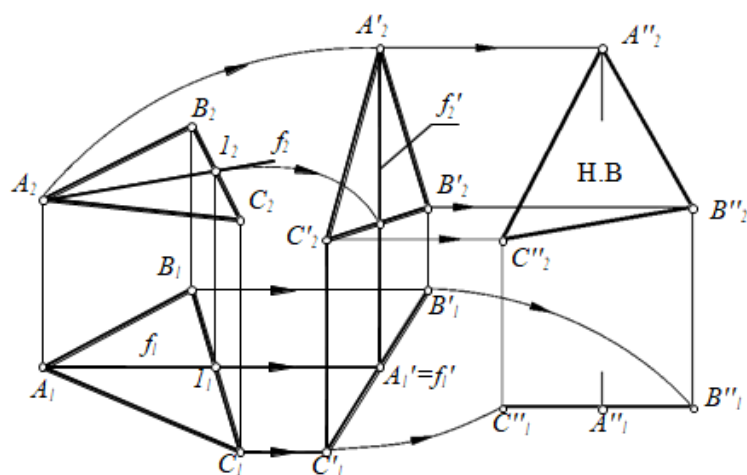


Рис.8.8

Фронтальные проекции треугольников ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны. Горизонтальные проекции криволинейных траекторий $A-A'$, $B-B'$, $C-C'$ – прямые линии (см. рис. 8.8).

Задача 4. Проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.

Плоскость $A'B'C'$, занимающую горизонтально-проецирующее положение, требуется преобразовать в плоскость уровня (см. рис. 8.17). Для решения задачи надо переместить плоскость $A'B'C'$ в положение $A''B''C''$, параллельное плоскости Π_2 . В процессе движения сохраняется перпендикулярность плоскости $A'B'C'$ к плоскости проекций Π_1 . Любая точка плоскости $A'B'C'$ перемещается в горизонтальной плоскости уровня, поэтому фронтальные проекции криволинейных траекторий $A'-A''$, $B'-B''$, $C'-C''$ изображаются на чертеже горизонтальными прямыми линиями (см. рис. 8.17).

Примечание. Чертеж, представленный на рис. 8.8, можно рассматривать как решение задачи определения истинной формы фигуры, лежащей в плоскости общего положения. Действительно, треугольник ABC в своем новом положении $A''B''C''$ параллелен фронтальной плоскости проекций, поэтому $A_2''B_2''C_2''$ – натуральная величина треугольника ABC , лежащего в плоскости общего положения. Для решения задачи потребовалось выполнить два последовательных плоскопараллельных перемещения данной плоской фигуры.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие способы преобразования чертежа применяют при решении задач?
2. В чем заключается сущность способа перемены плоскостей проекций?
3. Как располагают дополнительную плоскость проекций по отношению к основным плоскостям проекций?
4. Какова последовательность введения дополнительных плоскостей для определения натуральной величины фигуры, плоскость которой есть плоскость общего положения?
5. Как определить расстояние от точки до прямой общего положения?
6. Как определить расстояние от точки до плоскости общего положения?
7. Как определить расстояние между двумя параллельными плоскостями?
8. Как найти натуральную величину угла, образованного двумя плоскостями?

Лекция 9. Развертки поверхностей

План лекции 9:

- 9.1. Общие сведения и определение.
- 9.2. Типы разверток.
- 9.3. Приближенная развертка поверхности прямого кругового конуса.
- 9.4. Построение условных разверток не развёртывающихся поверхностей.
- 9.5. Построение условных разверток способом триангуляции
 - 9.5.1. Построение разверток поверхностей многогранников
 - 9.5.2. Развертка пирамиды
 - 9.5.3. Построение разверток кривых развёртывающихся поверхностей
 - 9.5.4. Точная развертка поверхности прямого кругового конуса
 - 9.5.5. Приближенная развертка поверхности прямого кругового конуса
 - 9.5.6. Построение условных разверток способом триангуляции

9.1. Общие сведения и определение

Построение разверток представляет важную техническую задачу, так как в промышленности широко применяются конструкции и изделия из листового материала, выполненные способом изгибания. Если поверхность представить в виде тонкой, гибкой и нерастяжимой пленки, то некоторые поверхности путем изгибания можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Такие поверхности называются развёртывающимися, а фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой.

Определение. *Поверхности, которые путем изгибания можно совместить с плоскостью без складок и разрывов, называются развёртывающимися. Фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой этой поверхности.*

Поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие. При развёртывании поверхности взаимно однозначное соответствие между поверхностью и ее разверткой не нарушается: каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развертке. Из физической модели процесса развёртывания поверхности на плоскость (изгибание предварительно разрезанной поверхности без ее растяжения) следуют инвариантные метрические свойства поверхности и ее развертки.

Инвариантные метрические свойства. *На поверхности и на ее развертке сохраняются равными: расстояние между точками поверхности, углы между пересекающимися линиями в точках их пересечения и величины площадей фигур на поверхностях.*

Свойством развёртываемости обладают многогранные поверхности и некоторые криволинейные поверхности.

9.2. Типы разверток

Различают точные и приближенные развертки развертываемых поверхностей. Для любой многогранной поверхности может быть построена ее точная развертка. Действительно, если дан двухпроекционный чертеж некоторого многогранника (например, пирамиды), то на основе чертежа графическими приемами, пользуясь линейкой и циркулем, можно определить истинные длины всех ребер и построить точную развертку всех граней пирамиды.

Если же на чертеже дана какая-либо криволинейная развертываемая поверхность (например, поверхность эллиптического конуса), то с помощью линейки и циркуля может быть построена только ее приближенная развертка.

Конечно, в некоторых случаях можно построить точную развертку поверхности, используя уравнение поверхности или числа, определяющие ее размеры. Так, если дан прямой конус вращения высотой h и диаметром основания d , то этими двумя числами поверхность определена. По ним можно вычислить размеры развертки, представляющей собой круговой сектор. Рассчитав с любой желаемой степенью точности радиус сектора и его центральный угол, можно построить точную развертку конуса. Однако на практике таким “графоаналитическим” приемом пользуются редко.

В начертательной геометрии поверхность задают с помощью чертежа, а развертку строят на основе чертежа графическими способами. Поэтому развертка любой развертываемой криволинейной поверхности (конической, цилиндрической, торсовой), которая строится графически, является приближенной.

Общий способ приближенного построения развертки произвольной развертываемой поверхности заключается в следующем. Заданную развертываемую поверхность Φ заменяют (аппроксимируют) вписанной или описанной многогранной поверхностью Φ' . Затем строят точную развертку аппроксимирующей многогранной поверхности Φ' и принимают ее за приближенную развертку данной поверхности Φ .

Хотя все остальные поверхности (не относящиеся к многогранным, цилиндрическим, коническим, торсовым) теоретически не развертываются на плоскость, инженерная практика, тем не менее, требует построения их “разверток”. Для неразвертываемых поверхностей строят так называемые условные развертки.

9.3. Приближенная развертка поверхности прямого кругового конуса

Напомним, что для построения приближенной развертки развертываемой поверхности надо ее аппроксимировать (приблизительно заменить) многогранной поверхностью. Заменяем поверхность конуса поверхностью, вписанной в него пирамиды.

На рис. 9.1, *a* показана правильная 12-угольная пирамида, вписанная в прямой круговой конус. Основание пирамиды – правильный 12-угольник,

вписанный в круговое основание конуса. Поверхность конуса приближенно заменена двенадцатью одинаковыми треугольниками (гранями пирамиды, вписанной в конус). Это геометрическое действие (аппроксимация криволинейной поверхности сеткой треугольников) называют триангуляцией.

Определение. *Триангуляция – замена (аппроксимация) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней.*

После аппроксимации поверхности конуса поверхностью, вписанной в него пирамиды надо построить точную развертку пирамиды. Размеры всех боковых ребер пирамиды равны между собой и равны длине l очерковой образующей конуса.

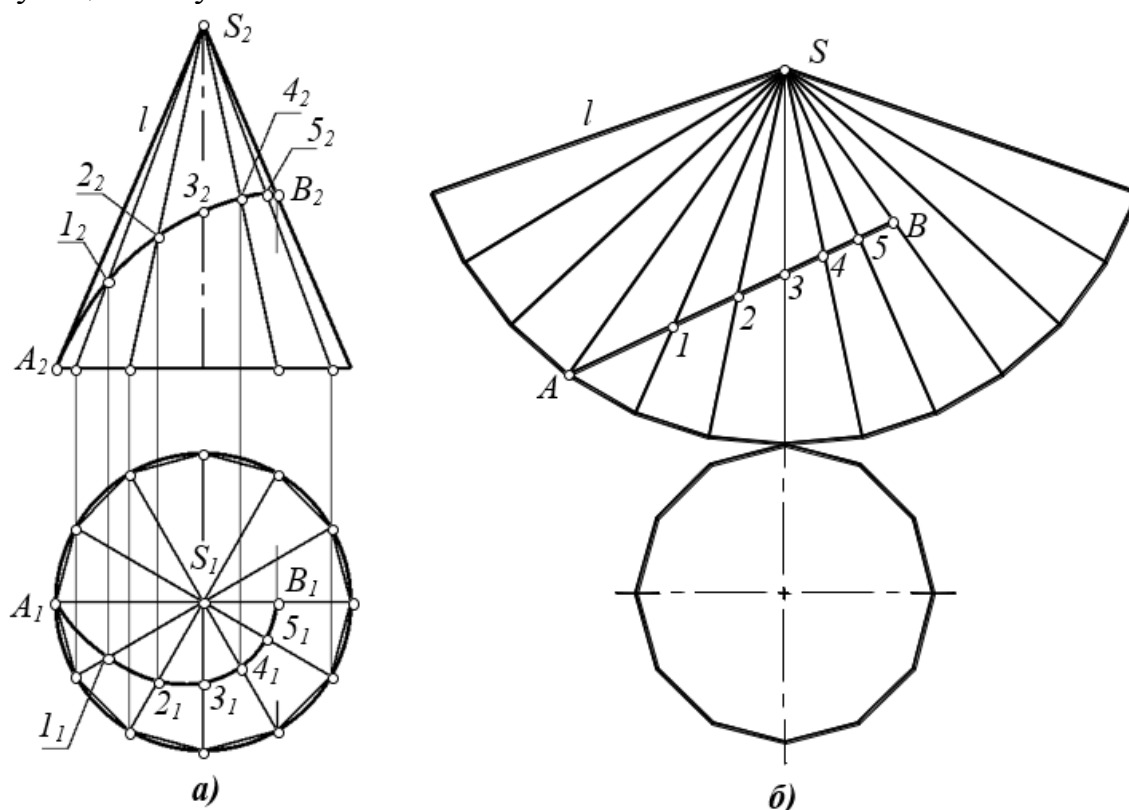


Рис. 9.1

Чтобы построить развертку пирамиды, на свободном месте чертежа произвольно выбираем положение вершины развертки – точку S , и строим 12 одинаковых треугольников с общей вершиной S . Боковые стороны каждого треугольника равны длине l очерковой образующей конуса. Основание каждого треугольника равно длине стороны правильного многоугольника, вписанного в круговое основание конуса. Получаем развертку вписанной в конус пирамиды в виде 12 треугольников со смежными сторонами. Построенная таким образом точная развертка пирамиды принимается за приближенную развертку боковой поверхности конуса. Основание пирамиды (правильный 12-угольник) принимается за развертку основания конуса (рис. 9.1, б).

Отметим на поверхности конуса две точки A и B (см. рис. 9.1, а). Кратчайший путь между двумя точками, проложенный по данной поверхности, называют *геодезической линией*.

Задача. *На поверхности конуса построить кратчайший путь (геодезическую линию) между точками A и B (см. рис. 9.1, а).*

Построение геодезической линии AB на поверхности выполняется с помощью развертки. Прямой линии на развертке соответствует кратчайший путь на поверхности (почему?). Переносим точки A, B с чертежа конуса на развертку и соединяем A и B отрезком прямой (см. рис. 9.1, б). Затем на отрезке AB отмечаем промежуточные точки $1, 2, \dots, 5$ и “возвращаем” эти точки на чертеж конуса.

Соединяя плавной кривой фронтальные проекции точек $A, 1, 2, 3, 4, 5, B$, получаем фронтальную проекцию геодезической линии AB . Соединяя плавной кривой горизонтальные проекции точек $A, 1, 2, 3, 4, 5, B$, получаем горизонтальную проекцию геодезической линии AB . Задача решена приближенно, так как для решения использована приближенная развертка конической поверхности.

9.4. Построение условных разверток не развёртываемых поверхностей

Многие сооружения часто ограничены не развёртываемыми поверхностями. Между тем условия их постройки заставляют изготавливать эти поверхности из листового материала. Поэтому составление условных разверток не развёртываемых поверхностей представляет собой важную техническую задачу. Например, поверхность корпуса морского судна состоит из отсеков криволинейных поверхностей, которые выкраивают из металлических листов, а затем склепывают друг с другом. Образуется кривая (а в сущности – многогранная) поверхность корпуса.

Пусть требуется построить условную развертку некоторой не развёртываемой поверхности Φ . Разбиваем поверхность Φ на отдельные участки (отсеки). Каждый отсек аппроксимируем (приближенно заменяем) отсеком какой-либо развёртываемой поверхности – многогранником, цилиндром или конусом (в зависимости от формы данной поверхности Φ). В результате вместо исходной не развёртываемой поверхности получаем поверхность Φ' , состоящую из участков развёртываемых поверхностей. Выполняем построение разверток всех участков составной поверхности Φ' . Совокупность полученных разверток принимаем за условную развертку поверхности Φ .

9.5. Построение условных разверток способом триангуляции

Напомним, что триангуляцией называют замену (аппроксимацию) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней. Произвольная не развёртываемая поверхность Φ может быть аппроксимирована многогранной поверхностью Φ' с треугольными гранями. Развертка полученной многогранной поверхности Φ' принимается за условную развертку данной поверхности Φ .

Построение разверток представляет важную техническую задачу, так как в промышленности широко применяются конструкции и изделия из листового материала, выполненные способом изгибания. Если поверхность представить в виде тонкой, гибкой и нерастяжимой пленки, то некоторые поверхности путем

изгибания можно со-вместить с плоскостью без разрывов и складок. Такие поверхности называются развертывающимися, а фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой.

Определение. Поверхности, которые путем изгибания можно совместить с плоскостью без складок и разрывов, называются развертывающимися. Фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой этой поверхности.

Поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие. При развертывании поверхности взаимно однозначное соответствие между поверхностью и ее разверткой не нарушается: каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развертке. Из физической модели процесса развертывания поверхности на плоскость (изгибание предварительно разрезанной поверхности без ее растяжения) следуют инвариантные метрические свойства поверхности и ее развертки.

Инвариантные метрические свойства. На поверхности и на ее развертке сохраняются равными: расстояние между точками поверхности, углы между пересекающимися линиями в точках их пересечения и величины площадей фигур на поверхностях.

Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и некоторые криволинейные поверхности. В дифференциальной геометрии доказывается, что к раз-вертывающимся криволинейным поверхностям относятся только линейчатые поверхности, состоящие исключительно из параболических точек. Касательная плоскость к такой поверхности касается ее не в одной точке, а вдоль прямолинейной образующей, проходящей через эту точку (см. п. 11.2). Отсюда следует признак развертываемости: у линейчатой развертывающейся поверхности касательные плоскости, проведенные во всех точках одной прямолинейной образующей, совпадают.

Среди криволинейных поверхностей указанным признаком развертываемости на плоскость обладают только торсовые поверхности. Действительно, физическая модель образования торсовой поверхности общего вида (“перекатывание” плоскости по криво-линейным направляющим a , b и соединение точек касания прямолинейной образую-щей, см. п. 6.2.6) предполагает существование плоскости, касающейся поверхности вдоль прямолинейной образующей. Иными словами, наличие признака развертываемости “заложено” в самом определении торсовой поверхности.

Конические и цилиндрические поверхности являются частным случаем торсовой поверхности, когда одна из криволинейных направляющих a , b вырождается в собст-венную или несобственную точку (см. рис. 6.26). Например, если направляющая a вы-родилась в собственную точку A , то получаем коническую поверхность с вершиной A и направляющей b . Если точка A – несобственная (бесконечно удалена по заданному на-правлению a), то получается цилиндрическая поверхность с направляющей b , обра-зующие которой параллельны направлению a .

Таким образом, поскольку конические и цилиндрические поверхности являются ча-стным случаем торсовой поверхности, то они так же, как и

торсовые поверхности общего вида, обладают свойством развертываемости.

Вывод. Свойством развертываемости на плоскость обладают, кроме многогранных поверхностей, лишь торсовые поверхности (в частности – конические и цилиндр-рические поверхности).

Различают точные и приближенные развертки развертываемых поверхностей. Для любой многогранной поверхности может быть построена ее точная развертка. Действительно, если дан двухпроекционный чертеж некоторого многогранника (например, пирамиды), то на основе чертежа графическими приемами, пользуясь линейкой и циркулем, можно определить истинные длины всех ребер и построить точную развертку всех граней пирамиды.

Если же на чертеже дана какая-либо криволинейная развертываемая поверхность (например, поверхность эллиптического конуса), то с помощью линейки и циркуля может быть построена только ее приближенная развертка.

Конечно, в некоторых случаях можно построить точную развертку поверхности, используя уравнение поверхности или числа, определяющие ее размеры. Так, если дан прямой конус вращения высотой h и диаметром основания d , то этими двумя числами поверхность определена. По ним можно вычислить размеры развертки, представляющей собой круговой сектор. Рассчитав с любой желаемой степенью точности радиус сектора и его центральный угол, можно построить точную развертку конуса. Однако на практике таким “графоаналитическим” приемом пользуются редко.

В начертательной геометрии поверхность задают с помощью чертежа, а развертку строят на основе чертежа графическими способами. Поэтому развертка любой развертываемой криволинейной поверхности (конической, цилиндрической, торсовой), которая строится графически, является приближенной.

Общий способ приближенного построения развертки произвольной развертываемой поверхности заключается в следующем. Заданную развертываемую поверхность Φ заменяют (аппроксимируют) вписанной или описанной многогранной поверхностью Φ' . Затем строят точную развертку аппроксимирующей многогранной поверхности Φ' и принимают ее за приближенную развертку данной поверхности Φ .

Хотя все остальные поверхности (не относящиеся к многогранным, цилиндрическим, коническим, торсовым) теоретически не развертываются на плоскость, инженерная практика, тем не менее, требует построения их “разверток”. Для неразвертываемых поверхностей строят так называемые условные развертки.

9.5.1. Построение разверток поверхностей многогранников

Напомним, что многогранником называют пространственную геометрическую фигуру, со всех сторон ограниченную плоскими многоугольниками (гранями). Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, которая получается при совмещении граней многогранника с

плоскостью. Процесс построения развертки поверхности многогранника сводится к построению истинных величин его граней, что непосредственно связано с определением натуральной (истинной) длины каждого ребра многогранника. Рассмотрим построение разверток наиболее распространенных многогранных поверхностей – поверхностей пирамид и призм.

9.5.2. Развертка пирамиды

Поверхность n -угольной пирамиды включает в себя основание (плоский n -угольник) и боковую поверхность, состоящую из n треугольников. Для построения развертки пирамиды необходимо определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания. На рис. 9.2, а изображена треугольная пирамида $ABCS$. Основанием пирамиды является треугольник ABC , расположенный в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций, поэтому стороны основания AB , BC , AC проецируются на Π_1 в натуральную величину.

Длины боковых ребер пирамиды определяются с помощью вспомогательных прямоугольных треугольников. Вспомогательные треугольники имеют общий катет S_2O_0 (разность высот концов боковых ребер пирамиды). Другой катет равен длине горизонтальной проекции соответствующего ребра. Например, в треугольнике $S_2O_0A_0$ катет S_2O_0 равен разности высот точек S и A . Другой катет O_0A_0 равен горизонтальной проекции ребра SA : $O_0A_0=S_1A_1$. Истинная длина ребра SA равна величине гипотенузы S_2A_0 . Аналогично длина ребра SB равна S_2B_0 , а длина ребра SC равна S_2C_0 .

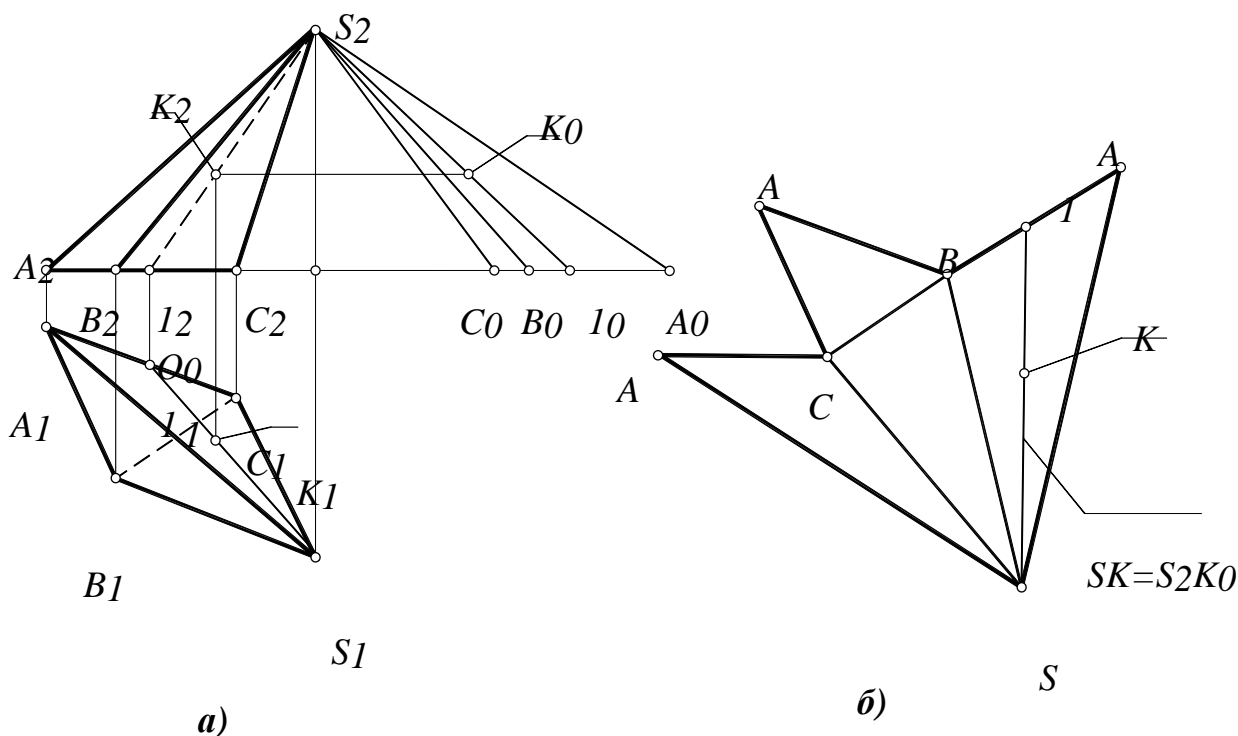


Рис. 9.2

Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из трех примыкающих друг к другу треугольников (рис. 9.2, б), конгруэнтных соответствующим граням пирамиды. Например, треугольник ACS (развертка соответствующей грани пирамиды) построен по известной длине стороны AC и найденным на рис. 9.2, а длинам боковых ребер пирамиды AS и CS . К развертке боковых граней пирамиды пристраиваем ее основание ABC .

Пусть на поверхности пирамиды отмечена точка K . Чтобы найти положение этой точки на развертке, проводим через K вспомогательную прямую $S-K-I$, отмечаем на развертке точку I и с помощью прямоугольного треугольника $S_2O_0I_0$ находим истинную длину отрезка $SK=S_2K_0$. Откладывая этот отрезок на развертке от точки S вдоль прямой $S-I$, находим точку K .

9.5.3. Построение разверток кривых развертывающихся поверхностей

Напомним, что различают точные и приближенные развертки развертывающихся поверхностей. Точная развертка строится графоаналитическим способом по известным размерам поверхности с использованием ее уравнения. Например, точная развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра высотой H и радиусом основания r имеет форму прямоугольника с размерами сторон H и $2\pi r$.

Приближенная развертка строится графическим способом с использованием чертежа поверхности. Чтобы построить приближенную развертку какой-либо развертывающейся поверхности, надо ее заменить (аппроксимировать) многогранной поверхностью. Точную развертку этой многогранной поверхности принимают за приближенную развертку данной развертывающейся поверхности.

9.5.4. Точная развертка поверхности прямого кругового конуса

Точная развертка поверхности прямого кругового конуса, образующая которого равна l и радиус основания r (рис. 9.3, а), имеет форму кругового сектора с радиусом l и центральным углом $\alpha=360^\circ r/l$ (рис. 9.3, б).

Задача. На поверхности конуса отмечена точка K . Построить точку K на раз-вертке конуса.

Через точку K на поверхности конуса проведем его образующую $S-3$ (см. рис.9.3, а). Найдем положение образующей $S-3$ на развертке конуса. Для этого дугу 1-3 кругового основания конуса заменяем ломаной линией 123. Участки этой ломаной линии откладываем от точки 1 на развертке конуса (вдоль дуги кругового сектора). Получаем на развертке точку 3 , через которую проходит образующая $S-3$.

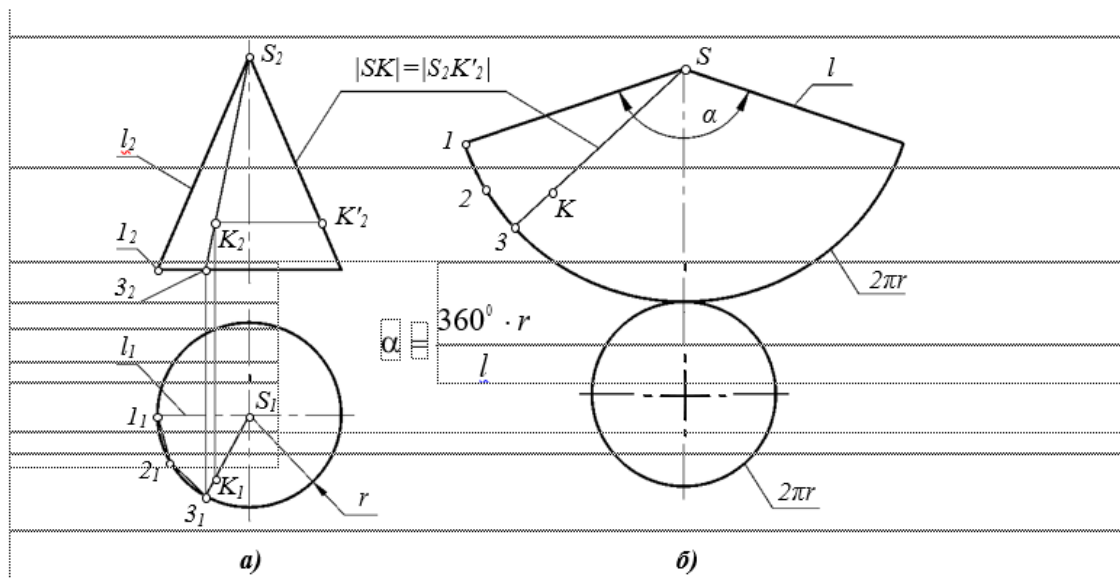


Рис. 9.3

Расстояние SK от вершины S до искомой точки K определено на рис. 9.3, а способом вращения вокруг проецирующей прямой: мысленно вращаем отрезок SK вокруг горизонтально-проецирующей оси конуса (см. п. 5.5). Вращение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет положение фронтали (совместится с фронтальной проекцией очерковой образующей конуса). Фронтальная проекция S_2K_2' повернутого отрезка определяет натуральную величину отрезка SK . Расстояние SK на развертке равно расстоянию S_2K_2' на фронтальной проекции конуса.

Заметим, что построение точки K на развертке выполнено приближенным графическим способом: дуга 1-3 кругового основания конуса заменена ломаной линией 123. Хотя развертка конуса была построена точно, но точка K на развертке найдена приближенно, поэтому решение задачи в целом следует считать приближенным.

9.5.5. Приближенная развертка поверхности прямого кругового конуса

Напомним, что для построения приближенной развертки развертываемой поверхности надо ее аппроксимировать (приближенно заменить) многогранной поверхностью. Заменим поверхность конуса поверхностью вписанной в него пирамиды.

На рис.9.4, а показана правильная 12-угольная пирамида, вписанная в прямой круговой конус. Основание пирамиды – правильный 12-угольник, вписанный в круговое основание конуса. Поверхность конуса приближенно заменена двенадцатью одинаковыми треугольниками (гранями пирамиды, вписанной в конус). Это геометрическое действие (аппроксимация криволинейной поверхности сеткой треугольников) называют *триангуляцией*.

Определение. Триангуляция – замена (аппроксимация) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней.

После аппроксимации поверхности конуса поверхностью вписанной в него пирамиды надо построить точную развертку пирамиды. Размеры всех боковых ребер пирамиды равны между собой и равны длине l очерковой образующей конуса.

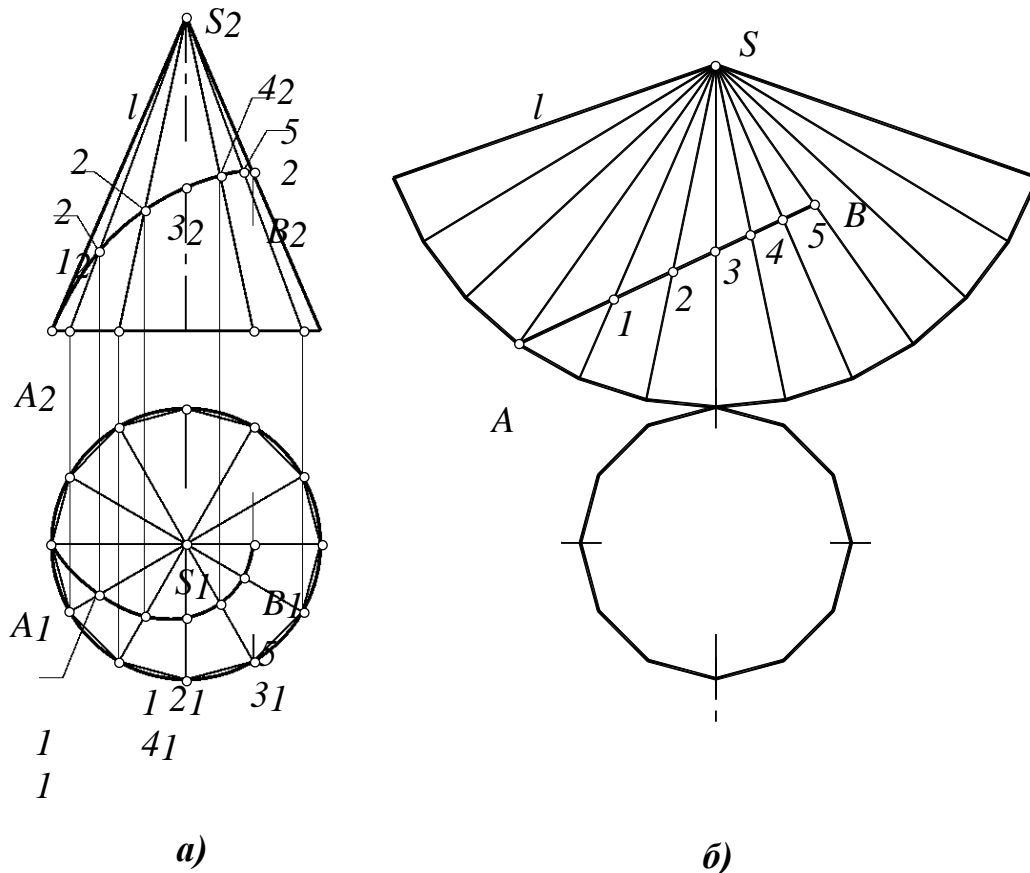


Рис. 9.4

Чтобы построить развертку пирамиды, на свободном месте чертежа произвольно выбираем положение вершины развертки – точку S , и строим 12 одинаковых треугольников с общей вершиной S . Боковые стороны каждого треугольника равны длине l очерковой образующей конуса. Основание каждого треугольника равно длине стороны правильного многоугольника, вписанного в круговое основание конуса. Получаем развертку вписанной в конус пирамиды в виде 12 треугольников со смежными сторонами. Построенная таким образом точная развертка пирамиды принимается за приближенную развертку боковой поверхности конуса. Основание пирамиды (правильный 12-угольник) принимается за развертку основания конуса (рис. 9.4, б).

Отметим на поверхности конуса две точки A и B (см. рис. 9.4, а). Кратчайший путь между двумя точками, проложенный по данной поверхности, называют геодезической линией.

Задача. На поверхности конуса построить кратчайший путь (геодезическую линию) между точками A и B (см. рис. 9.4 а).

Построение геодезической линии AB на поверхности выполняется с помощью развертки. Прямой линии на развертке соответствует кратчайший путь на поверхности (почему?). Переносим точки A , B с чертежа конуса на

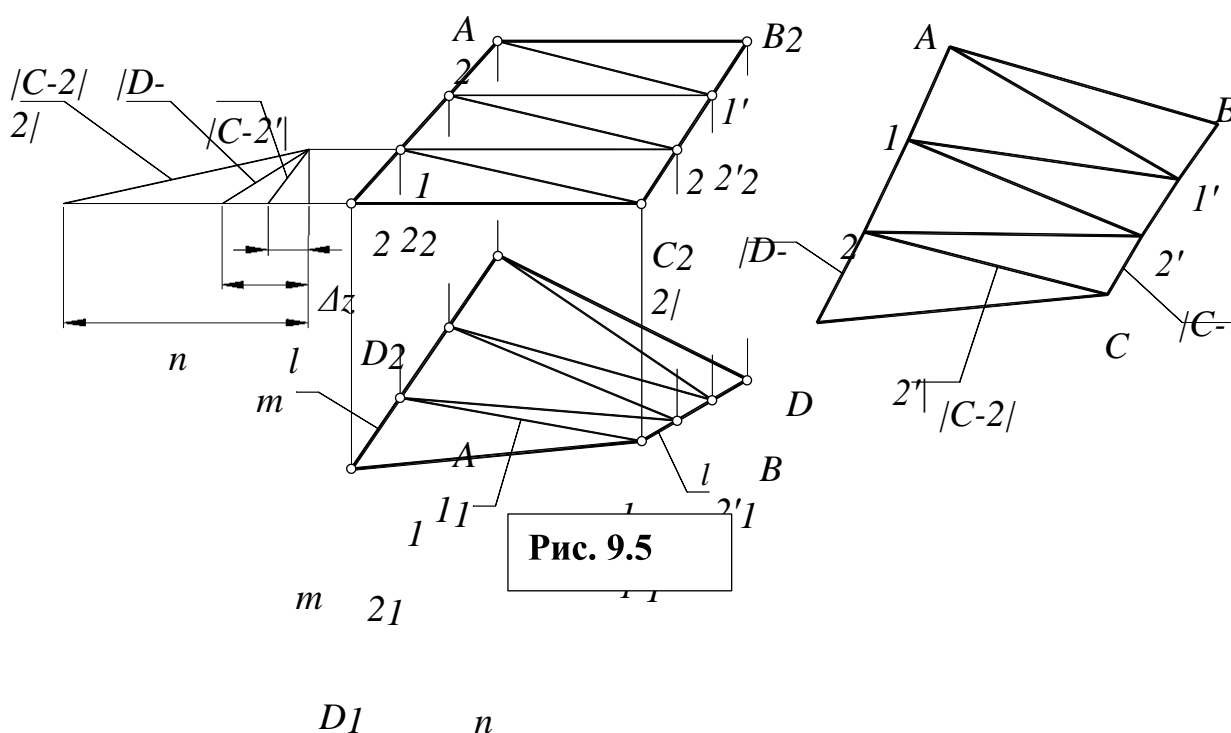
развертку и соединяем А и В отрезком прямой (см. рис. 9.4, б). Затем на отрезке АВ отмечаем промежуточные точки 1, 2,...5 и “возвращаем” эти точки на чертеж конуса.

Соединяя плавной кривой фронтальные проекции точек А, 1, 2, 3, 4, 5, В, получаем фронтальную проекцию геодезической линии АВ. Соединяя плавной кривой горизонтальные проекции точек А, 1, 2, 3, 4, 5, В, получаем горизонтальную проекцию геодезической линии АВ. Задача решена приближенно, так как для решения использована приближенная развертка конической поверхности.

9.5.6. Построение условных разверток способом триангуляции

Напомним, что триангуляцией называют замену (аппроксимацию) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней. Произвольная неразвертывающаяся поверхность Φ может быть аппроксимирована многогранной поверхностью Φ' с треугольными гранями. Развертка полученной многогранной поверхности Φ' принимается за условную развертку данной поверхности Φ .

Пусть требуется построить условную развертку косоугольной плоскости, “натянутой” на пространственный (неплоский) четырехугольник $ABCD$ (рис. 9.5). Косая плоскость (гиперболический параболоид) – неразвертывающаяся поверхность, образованная прямолинейной образующей, движущейся параллельно заданной плоскости параллелизма и пересекающей прямолинейные направляющие (см. п. 6.2.4). В рассматриваемом примере направляющие прямые – скрещивающиеся стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$, а плоскость Π_1 – плоскость параллелизма. Горизонтальная образующая скользит по направляющим AD и BC , последовательно занимая положения $AB, 1-1', 2-2', DC$.



Чтобы выполнить триангуляцию, предварительно разбиваем отсек $ABCD$ косо́й плоскости на части с помощью образующих. Для упрощения построений поверхность разбита образующими AB , $1-1'$, $2-2'$, DC только на три части, каждая из которых ограничена пространственным четырехугольником.

Проводя диагонали полученных неплоских четырехугольников, заменяем каждую часть поверхности двумя треугольниками. Например, нижний участок, ограниченный пространственным четырехугольником $D-2-2'-C$, заменен двумя треугольниками $D2C$ и $C22'$. В результате заданный отсек $ABCD$ косо́й плоскости заменен (аппроксимирован) многогранной поверхностью, состоящей из шести треугольников. При увеличении числа разбиений точность аппроксимации возрастает.

Для построения развертки полученной шестигранной поверхности надо определить истинные размеры сторон ее треугольных граней. На рис. 9.5 показано определение (способом прямоугольного треугольника) истинной величины отрезков $D-2$, $C-2'$ и $C-2$. Для определения $|D-2/$ построен вспомогательный прямоугольный треугольник с кате-

тами Δz и m , где Δz – разность высот концов отрезка $D-2$, а $m=D121$ – длина его горизонтальной проекции. Для определения $|C-2'|$ построен прямоугольный треугольник с катетами Δz и l , где $l=C12'1$. Для определения $|C-2/$ построен прямоугольный треугольник с катетами Δz и n , где $n=C121$. Гипотенузы вспомогательных прямоугольных треугольников равны истинным величинам соответствующих отрезков.

Истинные размеры остальных ребер аппроксимирующей многогранной поверхности определяются аналогично (с учетом того, что горизонтальные отрезки AB , $1-1'$, $2-2'$, DC изображаются на Π_1 в натуральную величину). После определения истинных размеров всех ребер выполняем построение развертки, состоящей из примыкающих друг к другу треугольников. Каждый из треугольников строится “по трем сторонам”. Полученную точную развертку многогранной поверхности, состоящей из треугольных граней, принимаем за условную развертку исходной неразвертываемой поверхности.

Примечание. Практически вся земная поверхность “покрыта” триангуляционной сетью опорных геодезических пунктов с таким расчетом, чтобы они являлись вершинами треугольников, по возможности близких к равносторонним. В результате истинная поверхность земли аппроксимируется сетью треугольников (с размерами сторон на территории России 4...25 км). Геодезические пункты отмечаются заложенными в землю бетонными пилонами, над которыми сооружаются вышки. Координаты каждого геодезического пункта (широта, долгота, высота над уровнем моря) определены с большой точностью. Сеть геодезических пунктов используется как для

геодезических работ, так и в системах глобального позиционирования (GPS, ГЛОНАСС).

Вопросы для самоконтроля

1. Какие поверхности называют развертывающимися? Что называют разверткой поверхности?

2. Какие поверхности являются развертывающимися?

3. Какие свойства развертывающейся поверхности сохраняются на ее развертке?

4. Какая развертка называется точной и какая – приближенной? Для каких поверхностей составляют условные развертки?

5. Что представляют собой развертки боковых поверхностей: а) прямой призмы; б) прямого кругового цилиндра; в) прямого кругового конуса?

6. Что называют геодезической линией на поверхности? Каким способом построить геодезическую линию между указанными на чертеже точками развертывающейся поверхности?

7. В чем заключается способ триангуляции?

Лекция 10. Комбинирование задачи

План лекции 10:

10.1. Комбинированные задачи.

10.2. Геометрические места точек или прямых, удовлетворяющих заданным условиям.

10.3. Примеры решения комбинированных задач

Многие задачи начертательной геометрии сводятся к построению фигур (точек, линий, поверхностей), удовлетворяющих определенным позиционным или метрическим условиям. Каждому условию соответствует некоторое множество элементов (точек, линий), которое называют геометрическим местом этих элементов. Например, сфера – геометрическое место точек, удаленных от данной точки (центра сферы) на заданное расстояние.

Задачи, в которых на искомый элемент наложены два или более условий, называются комбинированными. Иногда такие задачи называют “комплексными”, имея при этом в виду, что на искомый элемент наложен комплекс (два или более) условий.

Перед тем, как приступить к решению комбинированных задач, необходимо овладеть навыками решения типовых геометрических задач, рассмотренных в предыдущих лекциях. Напомним эти задачи.

1. Построение точки пересечения прямой линии и поверхности (первая позиционная задача).

2. Построение линии пересечения двух поверхностей (вторая позиционная задача).

3. Построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.

4. Определение длины отрезка прямой общего положения.

5. Преобразование фигуры общего положения в фигуру частного положения способом замены плоскостей проекций.

10.1. Последовательность решения комбинированной задачи

Геометрическая задача, в которой на искомый элемент наложено несколько (два и более) условий, решается по следующей схеме.

1. Вводятся вспомогательные геометрические фигуры (множества), каждое из которых удовлетворяет одному из условий или группе условий, наложенных на искомый элемент.

2. Искомый элемент определяется как результат пересечения вспомогательных фигур (множеств).

Эта схема реализуется в следующем порядке.

Анализ – выявление условий, наложенных на искомый элемент, и тех фигур (множеств), которые удовлетворяют этим условиям.

Исследование – определение количества решений задачи.

Составление алгоритма (алгоритм – символическая запись последовательности решения задачи).

Построение – графическая реализация алгоритма на чертеже.

Построение – это запись (фиксация) решения на чертеже. Перед тем, как выполнять построение, задачу надо мысленно решить в трехмерном пространстве. Пусть, например, надо через данную точку A провести прямую, параллельную двум данным плоскостям. Представим заданные плоскости, произвольно “висящие” в пространстве. Они пересекаются по некоторой линии m . Любая прямая m' , параллельная линии m , будет параллельна обеим плоскостям. Следовательно, для решения задачи достаточно найти линию m пересечения данных плоскостей и через точку A провести искомую прямую параллельно найденной линии.

Задача мысленно решена. Теперь можно приступить к графическим построениям: начертить линию m пересечения данных плоскостей и через точку A провести прямую, параллельную найденной прямой m .

10.2. Геометрические места точек или прямых, удовлетворяющих заданным условиям

Перечислим определения некоторых геометрических мест, встречающихся при решении комбинированных задач.

1. Геометрическое место точек, удаленных от данной точки O на расстояние R , есть поверхность сферы с центром O и радиусом R .

2. Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой j на расстояние R , есть поверхность цилиндра вращения с осью j и радиусом R .

3. Геометрическое место точек, удаленных от данной плоскости на заданное расстояние – две плоскости, параллельные данной.

4. Геометрическое место прямых, проходящих через точку S на прямой j и наклоненных к j под постоянным углом – прямолинейные образующие конуса вращения с вершиной S и осью j .

5. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку S и равно наклоненных к данной плоскости Σ – образующие конуса вращения с вершиной S и осью, перпендикулярной к плоскости Σ .

6. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B , есть плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (срединная плоскость).

7. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек A , B и C , есть перпендикуляр к плоскости этих точек, проходящий через центр окружности ABC .

8. Геометрическое место точек, равноудаленных от четырех точек A , B , C , D , не лежащих в одной плоскости – точка (центр сферы, проходящей через данные точки A , B , C , D).

9. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух

пересекающихся плоскостей Σ и Δ – бисекторная плоскость двугранного угла $\Sigma \cap \Delta$.

10.3. Примеры решения комбинированных задач

Задача 1. Опустить перпендикуляр t из точки M на прямую m . Требование “опустить перпендикуляр на прямую” означает, что перпендикуляр к прямой должен с ней пересечься. Решим ее как комбинированную задачу, выполнив анализ, исследование и составив алгоритм.

Анализ

Искомая прямая t должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая t должна проходить через точку M и быть перпендикулярна к прямой m . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Σ , проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой m . Это условие записывается в символической форме:

$$\{t: (M \in t \perp m)\} = \Sigma.$$

Требования, наложенные на искомый элемент t , отмечены в круглых скобках. Фигурными скобками обозначают множество каких-либо элементов. Поэтому символическая запись читается следующим образом: плоскость Σ образована множеством прямых t , проходящих через точку M и перпендикулярных к прямой m .

Условие 2. Искомая прямая t должна проходить через точку M и пересекать прямую m . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Δ , проходящую через точку M и прямую m :

$$\{t: (M \in t \cap m)\} = \Delta.$$

Таким образом, искомая прямая t должна одновременно находиться в плоскости Σ (первое условие) и в плоскости Δ (второе условие). Следовательно, прямая t есть линия пересечения плоскостей Σ и Δ : $t = \Sigma \cap \Delta$.

Исследование

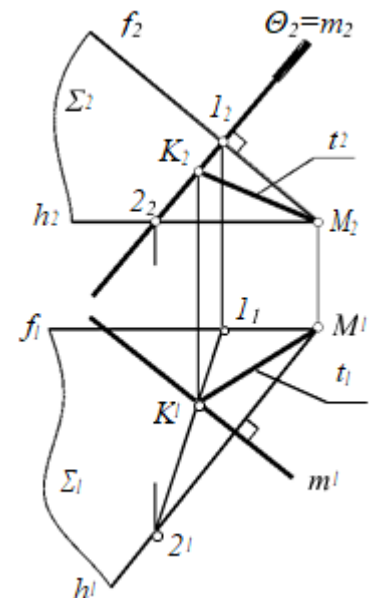
Искомая прямая – результат пересечения двух плоскостей. Плоскости общего положения пересекаются по прямой. В общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Σ . Через точку M проводим

плоскость Σ , перпендикулярную к данной прямой m . Зададим плоскость Σ горизонталью и фронталью таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости. Краткая запись этого действия имеет вид: $M \in \Sigma (h \cap f) \perp m$.

2. Построение плоскости Δ выполнять не надо,



так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой M и прямой m : $\Delta(m, M)$ – задана.

3. Построение искомой прямой: $t = \Sigma \cap \Delta$.

Графическая реализация

Рис. 10.1

Графическая реализация алгоритма показана на рис.10.1. Через точку M проведена плоскость $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярная к прямой m . Точка M – общая точка плоскостей Σ и Δ , поэтому для построения линии t их пересечения достаточно найти еще одну общую точку этих плоскостей. Например, на рис. 10.1 найдена точка K пересечения прямой m с плоскостью Σ (по схеме решения первой позиционной задачи). Точка K – общая точка плоскостей Σ и Δ , поэтому прямая $t = MK$ – искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую m . Задача решена.

Задача 2. Через точку M провести прямую m , пересекающую данные скрещивающиеся прямые a и b (рис. 10.2).

Анализ

Искомая прямая m должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая m должна проходить через точку M и пересекать прямую a . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Delta(M, a)$. Символическая запись этого условия имеет вид:

$$\{m: (M \ m \cap a)\} = \Delta.$$

Условие 2. Прямая m должна проходить через точку M и пересекать прямую b . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Sigma(M, b)$. Символическая запись этого условия имеет вид:

$$\{m: (M \ m \cap b)\} = \Sigma.$$

Прямая m должна одновременно находиться в плоскости Δ (первое условие) и в плоскости Σ (второе условие). Следовательно, искомая прямая m – линия пересечения плоскостей Δ и Σ : $m = \Delta \cap \Sigma$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости общего положения пересекаются по одной прямой. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой M и прямой a :

$\Delta(M, a)$ – задана.

2. Построение плоскости Σ выполнять не надо, так как плоскость Σ уже задана на чертеже точкой M и прямой b :

$\Sigma(M, b)$ – задана.

3. Выполняем построение искомой прямой как линии пересечения двух плоскостей: $m = \Delta \cap \Sigma$.

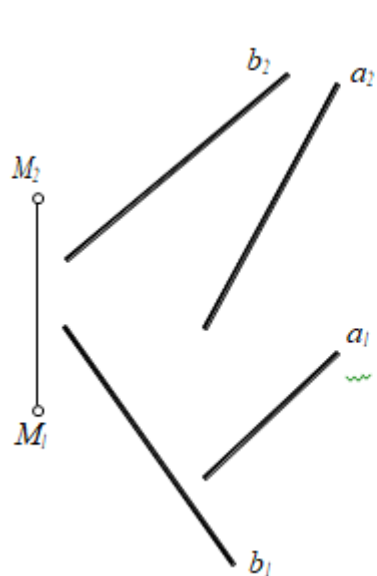


Рис 10.2

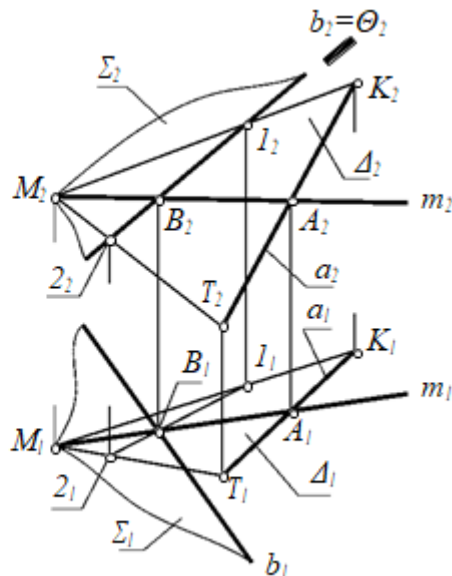


Рис 10.3

Графическое решение (рис. 10.3)

Поскольку плоскости $\Delta(M, a)$ и $\Sigma(M, b)$ уже заданы, то для решения задачи достаточно построить линию их пересечения. Одна точка этой линии известна: точка M общая точка плоскостей Δ и Σ .

В качестве еще одной общей точки плоскостей Δ и Σ можно взять, например, точку B пересечения прямой b с плоскостью Δ . Точка B определяется по алгоритму решения первой позиционной задачи: через b проводим вспомогательную плоскость Θ , строим линию разреза $(1-2)=\Theta \cap \Delta$ и на пересечении линии разреза с прямой b отмечаем точку B . Искомая прямая m проходит через точку M и пересекает данные прямые a и b в точках A и B (см. рис. 10.3). Для построения линии $1-2$ потребовалось начертить в плоскости Δ вспомогательные прямые MT и MK , где T, K – произвольные точки прямой a .

Задача 3. Построить прямую m , параллельную данной прямой l и пересекающую данные скрещивающиеся прямые a и b (рис. 10.4).

Условие параллельности прямых m и l означает, что m должна проходить через не-собственную точку L_∞ прямой l . Следовательно, задача 3 отличается от ранее рассмотренной задачи 2 только тем, что в задаче 3 искомая прямая должна проходить не через “обычную” точку L , а через несобственную L_∞ , заданную на чертеже направлением l .

Анализ

Искомая прямая m должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая m должна проходить через несобственную точку L_∞ прямой l и пересекать прямую a . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Delta(L_\infty, a) = \Delta(l' \cap a)$, где l' – прямая, параллельная l и пересекающая прямую a (в произвольной точке). Символическая запись этого условия: $\{m: (L_\infty \square m \cap a)\} = \Delta$.

Условие 2. Прямая m должна проходить через точку L_∞ и пересекать прямую b . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Sigma(L_\infty, b)$. Символическая запись этого условия имеет вид:

$$\{m:(L\infty m \cap b)\}=\Sigma.$$

Искомая прямая m должна одновременно находиться в плоскости Δ (первое условие) и в плоскости Σ (второе условие). Следовательно, прямая m линия пересечения плоскостей Δ и Σ : $m=\Delta \cap \Sigma$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости общего положения пересекаются по одной прямой. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой $L\infty$ и прямой a :

$\Delta(L\infty, a)$ – задана.

2. Построение плоскости Σ выполнять не надо, так как плоскость Σ уже задана на чертеже точкой $L\infty$ и прямой b :

$\Sigma(L\infty, b)$ – задана.

3. Искомая прямая определяется как линия пересечения плоскостей Δ и Σ : $m=\Delta \cap \Sigma$.

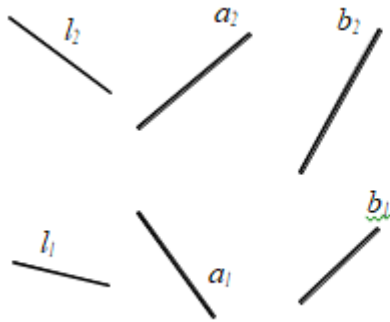


Рис 10.4

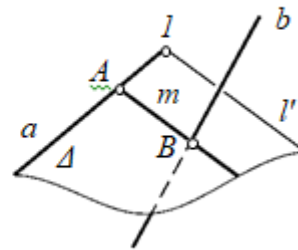


Рис 10.5

Графическое решение

Поскольку плоскости $\Delta(L\infty, a)$ и $\Sigma(L\infty, b)$ заданы, то для решения задачи достаточно построить линию их пересечения. Одна точка этой линии известна – это несобственная точка $L\infty$ прямой l , общая для плоскостей Δ и Σ . В качестве еще одной общей точки плоскостей Δ и Σ можно взять, например, точку B пересечения прямой b с плоскостью $\Delta(L\infty, a)=\Delta(l' \cap a)$. Здесь l' – прямая, параллельная l и пересекающая прямую a в произвольно отмеченной на a точке 1 . Искомая прямая m параллельна l , проходит через B и пересекает прямую a в точке A . На рис. 10.5 дано схематическое решение задачи.

Задача 4. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми a и b . Расстояние между скрещивающимися прямыми a, b (см. рис. 10.4) определяется как длина отрезка AB , перпендикулярного к прямым a, b и пересекающего их в точках A и B соответственно.

Схема решения

1. Находим направление l общего перпендикуляра к данным скрещивающимся прямым a, b (это направление определяется как перпендикуляр к плоскости $a \cap b'$, где $b' \parallel b$).

2. Строим прямую m , параллельную прямой l и пересекающую прямые

а, b в точках А, В (точно так же, как это было сделано при решении задачи 3).

3. Каким-либо из известных способов (например, способом прямоугольного треугольника) определяем истинную длину отрезка АВ. Задача решена.

Примечание. Задачи 2, 3, 4 несущественно отличаются друг от друга. Во всех этих задачах требуется найти прямую, проходящую через данную точку (собственную или несобственную) и пересекающую две данные прямые. Как известно, условие прохождения прямой через фиксированную точку отнимает у четырех параметрического (∞^4) множества прямых две степени свободы. Условия пересечения с каждой из данных прямых “связывают” еще две степени свободы. Следовательно, прямая, удовлетворяющая наложенным на нее условиям (инцидентность данной точке и пересечение с двумя данными прямыми), вовсе не имеет степеней свободы: $\infty^4 - \infty^2 - \infty^2 = \infty^0$. Это означает, что множество таких прямых не бесконечно. Например, в каждой из задач 2, 3, 4 получено единственное решение.

Задача 5. Через точку М провести прямую l, параллельную плоскости $\Delta(a \cap b)$ и пересекающую прямую m (рис. 10.6).

Анализ

Искомая прямая l должна удовлетворять двум условиям.

1. Множество прямых l, проходящих через точку М и параллельных плоскости Δ , образует плоскость Δ' , параллельную Δ : $\{l: (M \in l \parallel \Delta)\} = \Delta'$.
 2. Множество прямых l, проходящих через точку М и пересекающих прямую m, образует плоскость $\Theta(M, m)$: $\{l: (M \in l \cap m)\} = \Theta$.

Искомая прямая определяется как пересечение выявленных множеств: $l = \Delta' \cap \Theta$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения плоскостей Θ и Δ' . Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку М проводим плоскость Δ' , параллельную Δ : $M \in \Delta' \parallel \Delta$.
 2. Плоскость $\Theta(M, m)$ – задана.

3. Искомая прямая: $l = \Delta' \cap \Theta$.

Графическая реализация (см. рис. 10.6)

Плоскость Δ' , проходящая через М и параллельная плоскости Δ , задана прямыми a' и b' , параллельными прямым а и b. Определяем линию пересечения плоскостей Δ' и Θ . Точка М – общая точка этих плоскостей. Еще одна общая точка (точка N) найдена по схеме решения первой позиционной задачи как точка пересечения прямой m с плоскостью Δ' (с помощью

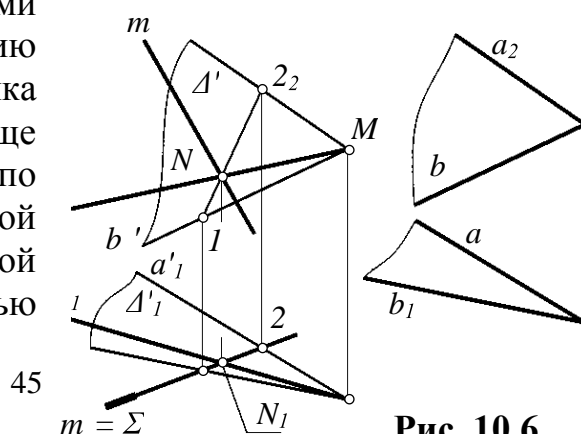


Рис. 10.6

вспомогательной секущей плоскости Σ , см. рис. 10.4). Прямая $l=MN$ – искомая.

Примечание. Условие параллельности прямой l и плоскости Δ означает, что прямая l пересекается с несобственной прямой плоскости Δ . Иначе говоря, в задаче 5 требуется найти прямую, проходящую через данную точку и пересекающую две данные прямые, одна из которых несобственная. Следовательно, задача 5 по существу ничем не отличается от ранее рассмотренных задач 2, 3, 4.

Задача 6. Через точку A провести прямую l , параллельную плоскостям $\Sigma(m \cap n)$ и $\Delta(c \cap d)$ (рис. 10.7).

Анализ

1. Множество прямых l , проходящих через точку A параллельно плоскости Σ , образует плоскость Σ' , параллельную Σ : $\{l: (A \parallel \Sigma)\} = \Sigma'$.

2. Множество прямых l , проходящих через точку A и параллельных плоскости Δ , образует плоскость Δ' , параллельную Δ : $\{l: (A \parallel \Delta)\} = \Delta'$. Искомая прямая $l: l = \Sigma' \cap \Delta'$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через A проводим плоскость Σ' , параллельную Σ : $A \Sigma' \parallel \Sigma$.
2. Через A проводим плоскость Δ' , параллельную Δ : $A \Delta' \parallel \Delta$.
3. Искомая прямая: $l = \Sigma' \cap \Delta'$.

Графическая реализация

Для решения задачи надо через точку A провести плоскости Σ' и Δ' , параллельные плоскостям Σ и Δ , затем построить линию l пересечения плоскостей Σ' и Δ' . Точка A – общая точка этих плоскостей. Еще одна общая точка (точка B) найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (см. рис. 10.7). Прямая $l=AB$ – искомая.

Задача 7. На чертеже задан отрезок BC и прямая m . Построить равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и вершиной A на прямой m (рис. 10.8).

Анализ

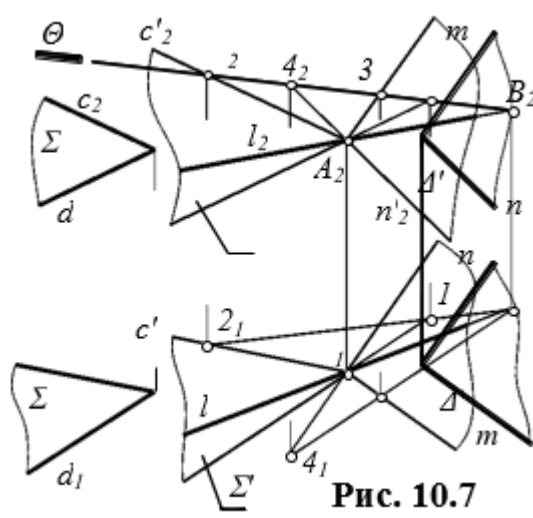


Рис. 10.7

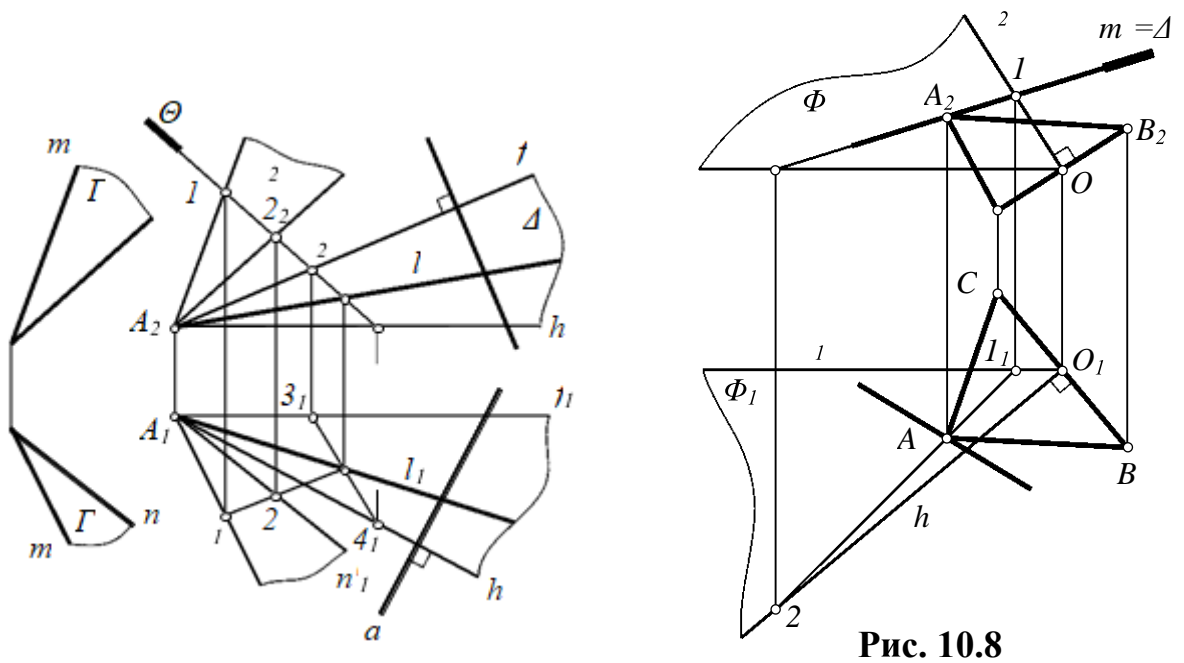


Рис. 10.8

На положение искомой точки A наложены два условия.

1. Точка A должна располагаться на прямой m . Этому условию отвечают все точки на этой прямой: $\{A:(A m)\}=m$.

2. Точка A должна быть равноудалена от точек B и C , так как A – вершина равнобедренного треугольника с основанием BC . Этому условию удовлетворяют точки срединной плоскости Φ , перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину: $\{A:(|A-B|=|A-C|)\}=\Phi$. Искомая точка: $A=m\cap\Phi$.

Исследование

Искомая точка является результатом пересечения прямой линии с плоскостью. Произвольная прямая и плоскость общего положения пересекаются в одной точке. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через середину O отрезка BC проводим плоскость Φ , перпендикулярную BC : $O\in\Phi\perp BC$.

2. Прямая m – задана.

3. Искомая точка: $A=m\cap\Phi$.

Графическая реализация (см. рис. 10.8)

Через середину O отрезка BC проводим плоскость $\Phi(h\cap f)$, перпендикулярную прямой BC . Затем определяем искомую точку A пересечения прямой m и плоскости Φ (по схеме решения первой позиционной задачи). Задача решена.

Задача 8. Через точку A провести прямую l , параллельную плоскости $\Gamma(m\cap n)$ и перпендикулярную прямой a (рис. 10.9).

Анализ

На положение искомой прямой l наложены два условия.

1. Прямая l должна проходить через точку A параллельно плоскости $\Gamma(m\cap n)$. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует

плоскость Γ' , проходящую через точку A и параллельную плоскости Γ : $\{l: (A \in l \parallel \Gamma)\} = \Gamma'$.

2. Прямая l должна проходить через точку A и располагаться перпендикулярно к данной прямой a . Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Δ , проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой a : $\{l: (A \in l \perp a)\} = \Delta$. Искомая прямая находится на пересечении выявленных множеств: $l = \Gamma' \cap \Delta$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку A проводим плоскость Γ' , параллельную Γ : $A \in \Gamma' \parallel \Gamma$

2. Через точку A проводим плоскость Δ , перпендикулярную a : $A \in \Delta \perp a$.

Искомая прямая: $l = \Gamma' \cap \Delta$.

Графическая реализация (см. рис. 10.9)

Проведем через точку A плоскость Γ' , параллельную плоскости Γ , задав ее прямыми m' , n' , параллельными прямым m , n . Проведем через A еще одну плоскость Δ , перпендикулярную к прямой a , задав ее горизонталью и фронталью в соответствии с условием теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости. Точка A – общая точка плоскостей Γ' и Δ . Еще одна общая точка (точка B) найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (по схеме решения второй позиционной задачи). Прямая $l = AB$ – искомая. Задача решена.

Задача 9. В треугольнике ABC построить геометрическое место точек, равноудаленных от данных точек D и E (рис. 10.10).

Анализ

На искомое множество точек наложены два условия.

1. Искомое множество X_i должно принадлежать плоскости треугольника $\Gamma(ABC)$.

2. Точки множества X_i должны быть равноудалены от точек D и E . Этому условию удовлетворяют все точки срединной плоскости Θ , проходящей через середину O отрезка DE перпендикулярно к этому отрезку: $\{X_i: (|X_i - D| = |X_i - E|)\} = \Theta$.

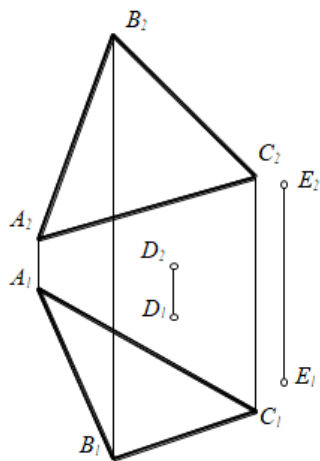


Рис. 10.10

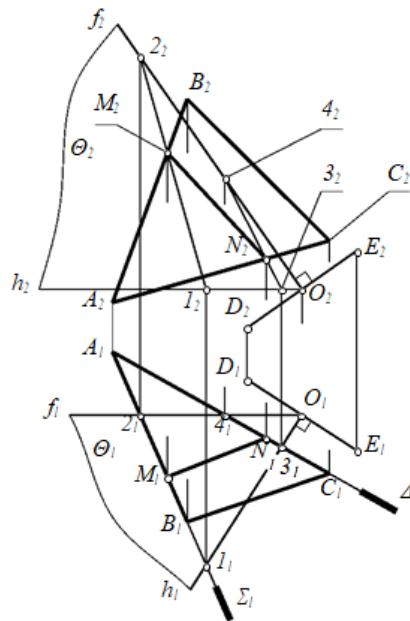


Рис. 10.11

Графическая реализация (рис. 10.11)

Через середину O отрезка DE проводим плоскость Θ , перпендикулярную этому отрезку. Плоскость Θ задана на рис. 10.11 горизонталью и фронталью, перпендикулярными к DE (см. теорему 2 о перпендикулярности прямой и плоскости).

Затем с помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ и Δ определяем точки M и N пересечения сторон AB и AC треугольника ABC со срединной плоскостью Θ (по схеме решения первой позиционной задачи). Отрезок MN содержит множество точек, равноудаленных от данных точек D и E , и при этом принадлежит плоскости треугольника. Следовательно, MN – искомое геометрическое место точек. Задача решена.

Задача 10. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от данных точек A, B, C (рис. 10.12).

Анализ

На искомое множество точек X_i наложены три условия (условия равно удалённости от пар точек $A-B, B-C$ и $A-C$).

1. Условию равно удалённости от точек A и B удовлетворяют все точки плоскости Θ , проходящей через середину O отрезка AB перпендикулярно к этому отрезку: $\{X_i : (|X_i - A| = |X_i - B|)\} = \Theta$.

2. Условию равно удаленности от точек B и C удовлетворяют все точки плоскости Θ' , проходящей через середину O' отрезка BC перпендикулярно к

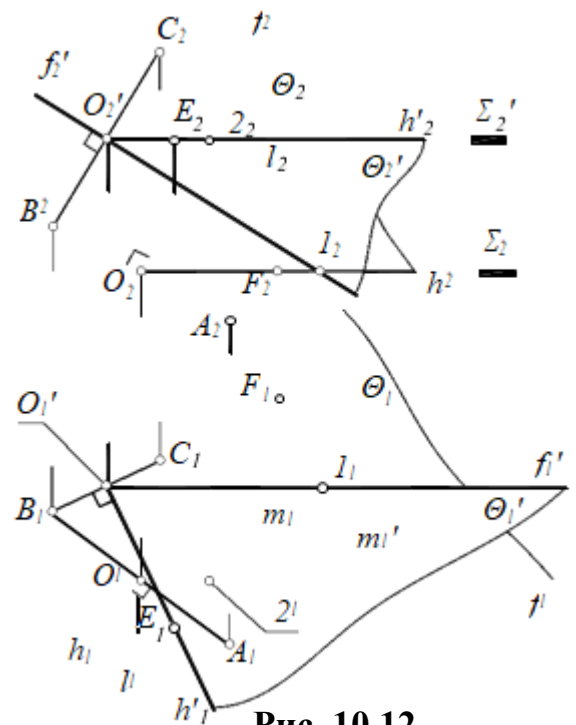


Рис. 10.12

этому отрезку: $\{Xi : (|Xi - B| = |Xi - C|)\} = \Theta'$.

3. Условие равно удаленности от точек А и С есть следствие первых двух условий. Действительно, в соответствии с условиями 1 и 2 получаем: $|Xi - A| = |Xi - B|$ и $|Xi - B| = |Xi - C|$. Отсюда следует, что $|Xi - A| = |Xi - C|$. Поэтому для решения задачи достаточно найти множество точек, удовлетворяющих только первым двум условиям, то есть найти линию пересечения плоскостей Θ и Θ' .

Исследование

Искомое множество является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости пересекаются по одной прямой. Задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через середину О отрезка АВ проводим плоскость Θ , перпендикулярную отрезку АВ: $O \in \Theta \perp AB$.

2. Через середину О' отрезка ВС проводим плоскость Θ' , перпендикулярную отрезку ВС: $O' \in \Theta' \perp BC$.

3. Искомое множество – линия пересечения плоскостей Θ и Θ' : $l = \Theta \cap \Theta'$.

Графическая реализация (см. рис. 10.12)

Через середину О отрезка АВ проводим плоскость Θ , перпендикулярную отрезку АВ. Плоскость Θ задана на рис. 10.12 горизонталью h и фронталью f, перпендикулярными к АВ (см. теорему 2 о перпендикулярности прямой и плоскости). Затем через середину О' отрезка ВС проводим плоскость Θ' ,

перпендикулярную отрезку ВС. Плоскость Θ' задана на рис. 10.12 горизонталью h' и фронталью f'. Требуется построить линию пересечения плоскостей Θ и Θ' (решить вторую позиционную задачу). С помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ и Σ' находим общие точки F и E срединных плоскостей Θ и Θ' . Точка F найдена как точка пересечения горизонтали плоскостью Θ' . Для этого через h проведена секущая плоскость Σ и построена линия разреза $m' = \Sigma \cap \Theta'$, параллельная горизонтали h'.

На пересечении линии разреза m' с горизонталью h отмечена точка F. Аналогичным образом, с помощью вспомогательной секущей плоскости Σ' найдена точка $E = h' \cap \Theta$. Для этого построена линия разреза $m = \Sigma' \cap \Theta$ (линия m параллельна горизонтали h). Затем на пересечении линии разреза m с горизонталью h' отмечена точка E. Через точки E и F проходит искомая прямая l, несущая множество точек,

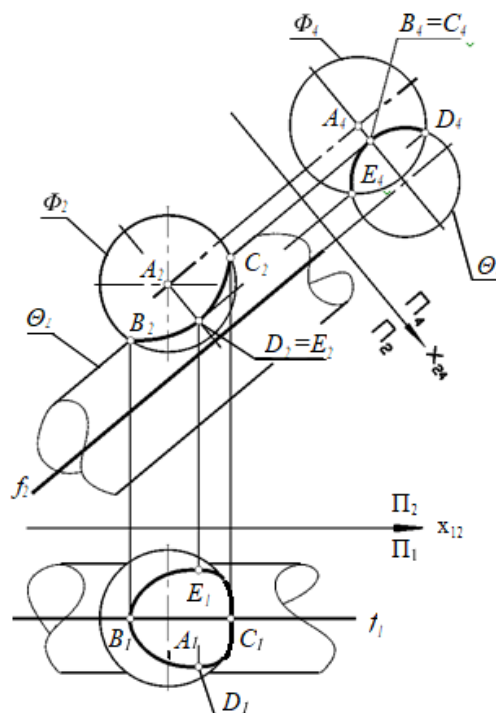


Рис. 10.13

равноудаленных от заданных точек А, В, С.

Примечание. Задача может быть решена способом замены плоскостей проекций. Двумя последовательными заменами плоскостей проекций плоскость АВС преобразуется в плоскость уровня. Через центр окружности, проходящей через А, В, С, проводим перпендикуляр l к плоскости АВС. Прямая l – искомая, так как содержит множество точек, равноудаленных от данных точек А, В, С.

Задача 11. Найти множество точек, удаленных от фронтали f на расстояние 20 мм и от точки А – на 25 мм (рис. 10.13).

Анализ

На искомое множество точек X_i наложены два условия.

1. Условию удаленности от прямой f на расстояние 20 мм удовлетворяют все точки цилиндрической поверхности вращения Θ с осью f и радиусом 20 мм:

$$\{X_i : (|X_i - f| = 20 \text{ мм})\} = \Theta.$$

2. Условию удаленности от точки А на 25 мм удовлетворяют все точки сферы Φ с центром А и радиусом 25 мм: $\{X_i : (|X_i - A| = 25 \text{ мм})\} = \Phi$.

Искомое множество точек X_i находится на пересечении поверхностей цилиндра и сферы.

Исследование

Искомое множество является результатом пересечения двух алгебраических поверхностей второго порядка – цилиндра и сферы. Линия пересечения алгебраических поверхностей второго порядка есть алгебраическая кривая четвертого порядка. Любая точка, принадлежащая этой кривой, удовлетворяет условию задачи.

Алгоритм

Определяем линию пересечения поверхностей сферы и цилиндра, используя схему решения второй позиционной задачи.

Графическая реализация

Преобразуем чертеж так, чтобы цилиндр Θ занял проецирующее положение. С этой целью вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение плоскость проекций Π , перпендикулярную оси f цилиндра. Новой системе координат Π_2/Π_4 находим линию ВDCE пересечения поверхностей Θ и Φ . Проекция этой линии на плоскости Π_4 совпадает с очерком цилиндра Θ , так как поверхность этого цилиндра занимает проецирующее положение относительно Π_4 . “Возвращаем” линию ВDCE в исходную систему координат Π_2/Π_1 , используя основной инвариант преобразования системы координат: расстояние любой точки до новой плоскости проекций Π_4 равно расстоянию этой же точки до заменяемой плоскости проекций Π_1 . Дополнительные (промежуточные) точки линии ВDCE могут быть найдены с помощью вспомогательных секущих плоскостей, параллельных Π_2 . Построение промежуточных точек на рис. 10.13 условно

Задача 12. Построить недостающую проекцию прямой l , параллельной прямой ВС, если расстояние между l и ВС равно 20 мм (рис. 10.14).

Анализ

На искомую прямую l наложены два условия.

1. Множество прямых l , фронтальные проекции которых совпадают с заданной проекцией l_2 , образуют фронтально-проецирующую плоскость Σ , проекция Σ_2 которой совпадает с фронтальной проекцией прямой l : $\{l: (l \rightarrow l_2)\} = \Sigma$.

2. Множество прямых l , параллельных прямой BC и удаленных от нее на 20 мм, образуют цилиндр вращения Θ с осью BC и радиусом 20 мм:

$$\{l: (l \parallel BC, |l-BC|=20 \text{ мм})\} = \Theta.$$

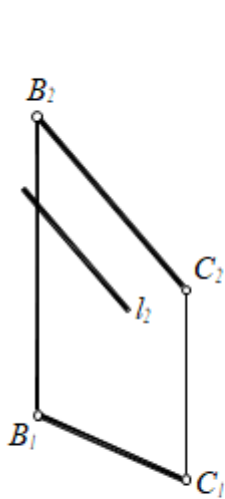


Рис. 10.14

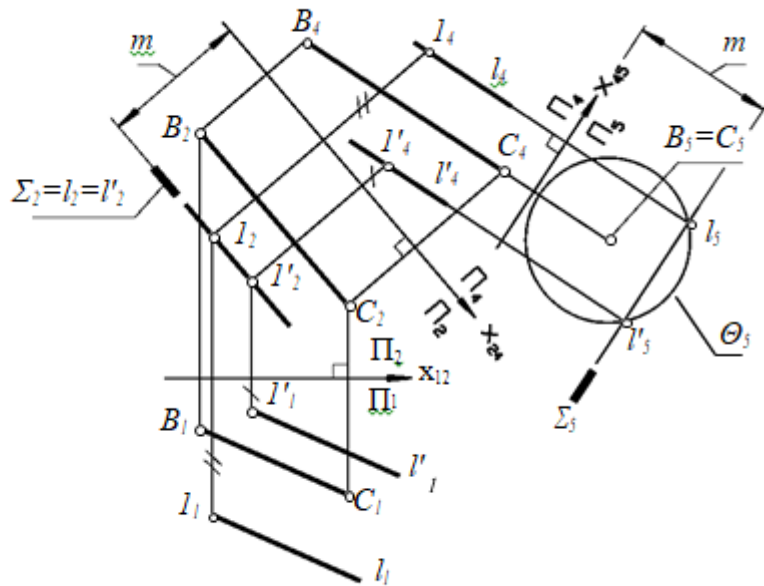


Рис. 10.15

Искомая прямая l находится на пересечении цилиндра Θ и плоскости Σ .

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения цилиндра вращения и плоскости Σ , параллельной оси цилиндра.

Возможны три случая.

1. Плоскость Σ не пересекается с цилиндром – нет действительных решений.
2. Плоскость Σ пересекает цилиндр – получаем два различных решения.
3. Плоскость Σ касается цилиндра – получаем два совпадающих решения.

Алгоритм

Находим линию l пересечения поверхностей Θ и Σ : $l = \Theta \cap \Sigma$.

Графическая реализация (рис. 10.15)

Предварительно преобразуем чертеж так, чтобы ось BC цилиндра Θ заняла проецирующее положение. С этой целью выполняем две последовательные замены плоскостей проекций. Предварительно преобразуем чертеж так, чтобы ось BC цилиндра Θ заняла проецирующее

положение. С этой целью выполняем две последовательные замены плоскостей проекций.

Первая замена плоскостей проекций. Вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4 , параллельную прямой BC и перпендикулярную плоскости Π_2 . Получаем новую систему координат Π_2/Π_4 , в которой прямая BC стала прямой уровня (BC параллельна Π_4). Плоскость Σ также параллельна плоскости Π_4 .

Вторая замена плоскостей проекций. В системе координат Π_2/Π_4 сохраняем плоскость Π_4 , а плоскость Π_2 заменяем плоскостью Π_5 , расположенной перпендикулярно к прямой BC . Получаем систему координат Π_4/Π_5 , в которой цилиндр Θ занимает проецирующее положение.

В системе координат Π_4/Π_5 плоскость Σ по-прежнему параллельна плоскости Π_4 , поэтому проекция Σ_5 плоскости Σ параллельна оси x_{45} , причем расстояние от Σ_5 до x_{45} на плоскости Π_5 равно расстоянию от Σ_2 до x_{24} на плоскости Π_2 (это расстояние обозначено на рис. 12.15 буквой m).

В пересечении цилиндра и плоскости Σ получаем две прямые l и l' , которые удовлетворяют условиям задачи: они параллельны прямой BC и удалены от нее на 20 мм. Таким образом, в системе координат Π_4/Π_5 задача решена.

Найденные решения l и l' необходимо “возвратить” в исходную систему координат Π_1/Π_2 . Для этого в системе координат Π_4/Π_5 отмечаем на прямых l и l' произвольные точки 1 и $1'$. На плоскости Π_2 проекции этих точек принадлежат проекции l_2 прямой l .

Горизонтальные проекции 1_1 и $1'_1$ точек 1 и 2 определяются с учетом основного инварианта преобразования системы координат: расстояние от любой точки до новой плоскости проекций равно расстоянию от этой же точки до заменяемой плоскости проекций. Отсюда следует, что расстояние от 1_4 до x_{24} на плоскости Π_4 равно расстоянию от 1_1 до x_{12} на плоскости Π_1 . Расстояния $|1'_4 - x_{24}|$ и $|1'_1 - x_{12}|$ также равны между собой. Это позволяет отметить горизонтальные проекции 1_1 и $1'_1$ точек 1 , $1'$ и провести через них горизонтальные проекции l_1 и l'_1 искомых прямых (параллельно горизонтальной проекции прямой BC). Задача решена в исходной системе координат.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие геометрические задачи называют комбинированными (комплексными)?

2. Какие элементарные построения надо уметь выполнять на чертеже для успешного решения типовых комплексных задач? Перечислить типовые позиционные и метрические задачи, встречающиеся в процессе решения различных комбинированных задач.

3. Что означает словосочетание “геометрическое место точек”? Приведите примеры геометрических мест точек.

4. Геометрическое место точек, удаленных от точки A на расстояние R ,

есть сфера с центром A и радиусом R . Что представляет собой множество прямых, удаленных от точки A на расстояние R ?

5. Геометрическое место точек, удаленных от прямой a на расстояние R , есть цилиндр вращения с осью a и радиусом R . Что представляет собой множество прямых, удаленных от прямой a на расстояние R ?

6. В какой последовательности следует решать комбинированную геометрическую задачу? С чего начинается решение?

Учебное издание

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине

«НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА»

для студентов направления подготовки

Профессиональное обучение (по отраслям),

профили: «Экономика и управление», «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Профессиональная психология», «Управление персоналом»
(в 2-х частях). Часть 2.

С о с т а в и т е л ь:

Валентина Даниловна Волкова

Печатается в авторской редакции.

Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать _____

Формат 60x84¹/₁₆. Бумага типограф. Гарнитура Times

Печать офсетная. Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____

Тираж 100 экз. Изд. № _____. Заказ № _____. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного
университета имени Владимира Даля

*Свидетельство о государственной регистрации издательства
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015г.*

Адрес издательства: 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а

Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60

E-mail: izdat.lguv.dal@gmail.com **http:** //izdat.dahluniver.ru/

