МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Стахановский инженерно-педагогический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Луганский государственный университет имени
Владимира Даля»

Кафедра информационных систем

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили «Экономика и управление», «Электроснабжение», «Информационные технологии и системы», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Профессиональная психология», «Управление персоналом», направления подготовки Электроэнергетика и электротехника, профиль «Электроснабжение»

Луганск 2023

УДК 004.9

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом
ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля»
(протокол № от .2023 г.)

Конспект лекций по дисциплине **«Математическая статистика и математическое моделирование»** для студентов направления подготовки **Профессиональное обучение (по отраслям)**, профили «Экономика и управление», «Электроснабжение», «Информационные технологии и системы», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Профессиональная психология», «Управление персоналом», направления подготовки **Электроэнергетика и электротехника**, профиль «Электроснабжение». / Сост.: А.П. Волков. – **Стаханов**: ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», 2023. – 66 с.

Конспект лекций содержит 17 лекций, описание которых сопровождается теоретическими сведениями. К каждой лекции приведены вопросы для самопроверки, список рекомендованной литературы.

Предназначен для студентов профилей «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Информационные технологии и системы», «Профессиональная психология», «Экономика и управление», «Управление персоналом», «Электроснабжение».

Составитель: доц. Волков А.П.

Ответственный за выпуск: доц. Карчевский В.П.

Рецензент: доц. Черникова С.А.

Содержание

Лекция №1.
Введение. Задачи математической статистики.

1) Введение.
2) Задачи математической статистики.
3) Основные понятия математической статистики.

Цель науки – описание, объяснение и предсказание явлений действительности на основе установленных законов, что позволяет находить решения в типичных ситуациях.

В основе научных знаний лежит наблюдение. Для обнаружения общей закономерности, которой подчиняется явление, необходимо многократно его наблюдать. Кроме того, многие явления окружающего мира взаимно связаны и влияют одно на другое. Проследить все связи и определить влияние каждой из них на явление не всегда представляется возможным. Поэтому ограничиваются изучением влияния лишь основных факторов, определяющих течение явления.

Сколько должно производиться наблюдений? Как обработать результаты наблюдений и сделать обоснованные практические выводы? Какие факторы и в какой мере учитывать при исследовании явлений? Получить ответы на эти и другие вопросы позволяет математическая статистика.

Для широкого круга явлений при сохранении постоянными основных условий испытаний отмечается неоднозначность полученных результатов. Примером таких случайных явлений служат погрешности измерений. Измеряя один и тот же параметр (предмет), получают близкие, но всё же различные результаты. Это объясняется тем, что результат каждого измерения содержит случайную погрешность. Предвидеть эту погрешность, а следовательно, и результат каждого конкретного измерения нельзя. Однако, если определённым образом систематизировать результаты измерений, то окажется, что в их изменении можно увидеть некоторую закономерность – статистическую устойчивость. Изучение этой закономерности позволяет, например, предвидеть в среднем результат серии измерений.

Математическая статистика – наука, изучающая методы обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью, закономерностью, с целью выявления этой закономерности. Для вынесения более определённого заключения о закономерностях явлений математическая статистика опирается на теорию вероятностей.

Обработав результаты наблюдений, исследователь выдвигает ряд гипотез, предположений о том, что рассматриваемое явление можно описать той или иной вероятностной теоретической моделью. Далее, используя математико-статистические методы, можно дать ответ на вопрос, какую из гипотез или моделей следует принять. Именно эта модель считается закономерностью изучаемого явления. Правомерен такой вывод или нет, покажет практика использования выбранной модели. Таков типичный путь математико-статистического исследования.

Каждая математическая теория становится более понятной и доступной, если её удаётся использовать для решения практических задач. Чтобы эти лекции способствовали каждому обучающемуся, изучающему начала математической статистики, приобретению навыков использования теоретических знаний на практике, мы попытались провести изложение практических примеров применительно к решению следующей профессиональной задачи.

На областном уровне анализируется урожайность одной из зерновых культур, что порождает следующие вопросы: какова средняя урожайность в настоящее время, насколько она неравномерна по районам области, отдельным хозяйствам, какие факторы значимы для повышения урожайности, какие перспективы для планирования на будущее.

Известно, что во всех районах области выращиванием зерновой культуры занимается более полутысячи хозяйств (индивидуальных и коллективных). Проанализировать работу такого большого количества объектов весьма трудоёмко и затратно. Поэтому возникает первая задача (математической статистики) – в каком количестве и каким образом выбирать «экспериментальную группу» хозяйств, чтобы результаты были приемлемы для характеристики работы всех хозяйств области?

Вторая задача – как оценить точность и надёжность результатов анализа показателей работы в экспериментальной группе.

Чтобы планировать повышение урожайности, управлять этим процессом, надо знать, от чего она зависит, от каких факторов. Если эти факторы просматриваются интуитивно (качество почвы, качество её обработки, полив, удобрения и т.д.), то их значимость определяется одним из методов математической статистики – дисперсионным анализом. Если же влияние каких-то неизвестных факторов проявляется неявно (квалификация агронома, опыт работы руководителя хозяйства), то это обстоятельство исследуется методами факторного анализа. Степень влияния факторов, её количественная оценка осуществляется методами корреляционного анализа. Регрессионный анализ делает возможным найти аналитические зависимости между значениями (неслучайными) факторных переменных (количество внесённых удобрений, объём полива, состав почвы, глубина заделки семян и др.) и средним значением анализируемой случайной величины (урожайности).

I. **Учебные цели.** Познакомить студентов с основными понятиями математической статистики, задачами, которые решаются в изучаемом курсе.

В результате изучения материала студенты должны иметь представление о способах сбора статистических данных, о способах их представления в удобной для статистической обработки форме (вариационный ряд, статистическое распределение выборки, полигон, гистограмма, эмпирическая функция распределения), уметь осуществлять наглядное представление статистического распределения, находить числовые характеристики вариационных рядов.

II. **Формирование компетенций.** Развитие математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, развитие способностей применять методы математической статистики в профессиональной деятельности, умение лаконично и точно формулировать определения, давать графическую интерпретацию математических зависимостей.

3) Введение в тему. Математическая статистика является частью общей прикладной математической дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», однако задачи, решаемые ею, носят специфический характер. Если теория вероятностей исследует явления, полностью заданные их моделью, то в математической статистике вероятностная модель определена с точностью до неизвестных параметров. Отсутствие сведений о параметрах компенсируется «пробными» испытаниями, на основе которых и восстанавливается недостающая информация. Цель математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Контрольные вопросы

1. Что является предметом изучения математической статистики?
2. Что такое статистические данные?
3. Какие основные задачи решает математическая статистика?
4. Что такое генеральная и выборочная совокупности?
5. Какие существуют способы образования выборки?

Рекомендованная литература [1,2,3,4,5,6].

Лекция №2.
Предмет математической статистики.

1) Предмет математической статистики.
2) Статистическая совокупность.
3) Генеральная выборочная совокупности.

Предметом математической статистики является изучение случайных событий и случайных величин по результатам наблюдения. В основе этой дисциплины лежит понятие статистической совокупности.

Статистической совокупностью называется совокупность предметов или явлений, объединённых каким-либо признаком. Результатом наблюдений над статистической совокупностью являются статистические данные – данные о количестве элементов в какой-либо совокупности, обладающих определённым свойством.

Например:

− количество центнеров зерна, собранного с различных полей;
− количество дождливых дней в году;
− количество жителей города в возрасте 20 лет;
− количество дубов на территории Тамбовской области.

Обработка статистических данных методами математической статистики приводит к установлению определённых закономерностей, присущих массовым явлениям.

Статистические данные, как правило, представляют собой ряд значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ некоторой случайной величины X. Её исследование начинается с обработки этого ряда значений. Затем строятся функции, характеризующие случайную величину X. Эти функции сопоставляют по некоторому правилу набору значений случайной величины некоторое число (своего рода характеристику) и называются статистиками.

Генеральная и выборочная совокупности

Генеральной совокупностью (ГС) называется совокупность объектов или наблюдений, все элементы которой подлежат изучению при статистическом анализе.

Генеральная совокупность может быть конечной или бесконечной. Число объектов в генеральной совокупности называется её объёмом.

Изучение всего набора элементов генеральной совокупности не всегда бывает возможным, в этом случае рассматривают некоторую часть генеральной совокупности, которую называют выборочной совокупностью (или выборкой).

Задача математической статистики – по результатам изучения свойств выборки «спроектировать» свойства генеральной совокупности. Для того чтобы по выборке можно было адекватно судить об изучаемой величине, она должна быть представительной (репрезентативной), т.е. представлять основные соотношения в генеральной совокупности; это условие обеспечивается случайностью её элементов: все элементы генеральной совокупности должны иметь одинаковую вероятность попадания в выборку.

Поэтому первой задачей математической статистики является поиск способов сбора и группировки статистических данных.

Различают такие способы образования выборки, как:

1) повторная выборка, когда каждый элемент, случайно отобранный и исследованный, возвращается в генеральную совокупность и может быть отобран повторно;
2) бесповторная выборка, когда отобранный элемент не возвращается в генеральную совокупность.

Повторная выборка более приемлемая, так как не нарушает исходное состояние генеральной совокупности, но не всегда возможна по той, например, причине, что может измениться сам элемент после осуществления его выборки.

Каждый из этих способов, в свою очередь, может осуществляться в виде:

- чисто случайная выборка – элемент генеральной совокупности (ГС) попадает в выборку чисто случайно (например, с помощью генератора случайных чисел);
- механическая выборка – ГС делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, из каждой берут по одному объекту;
- типическая выборка – выборка не из всей ГС, а из каждой её типической части (при заметном отличии исследуемого признака в различных типических частях);
- серийная выборка – ГС делится на серии и сплошное обследование всей серии (при отсутствии заметного отличия исследуемого признака в различныхсериях).

III. **Формирование компетенций.** Развитие математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, развитие способностей применять методы математической статистики в профессиональной деятельности, умение лаконично и точно формулировать определения, давать графическую интерпретацию математических зависимостей.

3) Введение в тему. Математическая статистика является частью общей прикладной математической дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», однако задачи, решаемые ею, носят специфический характер. Если теория вероятностей исследует явления, полностью заданные их моделью, то в математической статистике вероятностная модель определена с точностью до неизвестных параметров. Отсутствие сведений о параметрах компенсируется «пробными» испытаниями, на основе которых и восстанавливается недостающая информация. Цель математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Контрольные вопросы

1. Что является предметом изучения математической статистики?
2. Что такое статистические данные?
3. Какие основные задачи решает математическая статистика?
4. Что такое генеральная и выборочная совокупности?

Рекомендованная литература [1,2,3,4,5,6].

Лекция№3.
Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.

1) Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.
2) Генеральная и выборочная совокупности .
3) Графики статистического распределения полигон и гистограмма.

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака **X** из генеральной совокупности извлечена выборка объёма **n**. Наблюдающиеся значения $\mathbf{x_i}$ признака **X** называют вариантами; последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называют вариационным рядом. Если выборка объёма **n** содержит **k** различных значений $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_k}$, причём значение $\mathbf{x_i}$ встречается $\mathbf{n_i}$ раз (**i=1,2,…,k**), то число $\mathbf{n_i}$ называется частотой варианты $\mathbf{x_i}$, а отношение $\boxed{w_i = \frac{n_i}{n}}$ называется относительной частотой варианты $\mathbf{x_i}$. Очевидно, что $\boxed{\sum_{i=1}^{k} n_i = n;\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1}$.

Статистическим распределением выборки в случае дискретного признака **X** называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическим распределением выборки в случае непрерывного признака **X** называют перечень интервалов и соответствующих им частот или относительных частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Эмпирической функцией распределения называют функцию $\boldsymbol{F^*(x)}$,определяющую для каждого значения **x** относительную частоту события **X< x**: $\boxed{F^*(x) = \frac{n_x}{n}}$,

где $\mathbf{n_x}$ – число вариант, меньших **x**; **n** – объём выборки. Эмпирическая функция $\boldsymbol{F^*(x)}$ служит оценкой неизвестной функции распределения $\boldsymbol{F(x)}$ случайной величины **X**.

Функция обладает следующими свойствами:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0;1];
2) $\boldsymbol{F^*(x)}$ – неубывающая функция;
3) Если $\mathbf{x_1}$ наименьшая, а $\mathbf{x_k}$ – наибольшая варианты, то $\boldsymbol{F^*(x)}$=0 при $\mathbf{x} \le \mathbf{x_1}$ и $\boldsymbol{F^*(x)}$=1 при $\mathbf{x>x_k}$.

Пример 1. Найти эмпирическую функцию $\boldsymbol{F^*(x)}$ по данному распределению выборки. Построить график этой функции.

$\mathbf{x_i}$	1	3	4	5
$\mathbf{n_i}$	6	8	6	5

Решение. Объём выборки n=6+8+6+5=25.Наименьшая варианта 1, поэтому $F^*(x)=0$ при $x\le 1$. Значение X<3, а именно $x_1=1$, наблюдалось 6 раз, следовательно, $F^*(x)=\frac{6}{25}$=0,24 при $1<x\le 3$. Если $3<x\le 4$, то $F^*(x)=\frac{14}{25}$=0,56, так как значения $x_1=1$ и $x_2=3$ наблюдались 6+8=14 раз. Если $4<x\le 5$, то $F^*(x)=\frac{20}{25}$=0,80, так как в этом случае n_x=6+8+6=20. Так как наибольшая варианта равна 5, то $F^*(x)=1$ при x>1. Следовательно,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1; \\ 0{,}24 & при \quad 1 < x \le 3; \\ 0{,}56 & при \quad 3 < x \le 4; \\ 0{,}80 & при \quad 4 < x \le 5; \\ 1 & при \quad x > 5. \end{cases}$$

График функции изображён на рис.1.

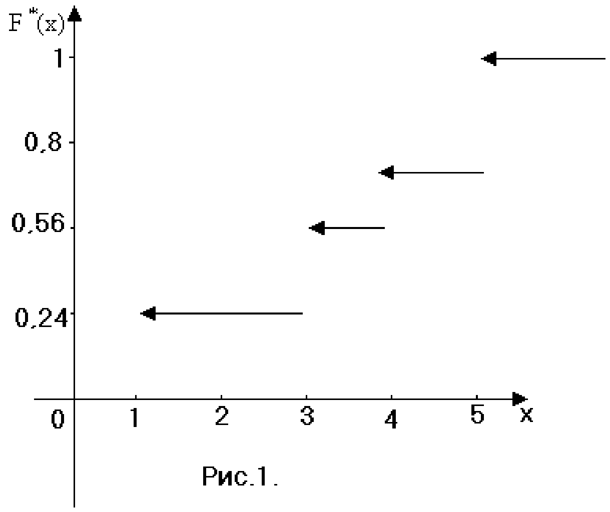


Рис.1.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки **(x_1; n_1)**, **(x_2; n_2)**,…, **(x_k; n_k)**, где **x_i** – варианты выборки; **n_i** – соответствующие им частоты (**$i=1,2,…,k$**).

Полигоном относительных частот называют ломаную отрезки которой соединяют точки **(x_1; w_1)**, **(x_2; w_2)**,…, **(x_k; w_k)**, где **w_i** – соответствующие вариантам **x_i** относительные частоты .

Пример 2. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки.

x_i	1	2	4	6
n_i	4	7	6	3

Решение. Найдём относительные частоты. Так как объём выборки $n=4+7+6+3=20$, то $w_1=\frac{4}{20}=0{,}2$; $w_2=\frac{7}{20}=0{,}35$; $w_3=\frac{6}{20}=0{,}3$; $w_4=\frac{3}{20}=0{,}15$. Следовательно, распределение относительных частот имеет вид

x_i	1	2	4	6
w_i	0,2	0,35	0,3	0,15

Построив точки (1; 0,2),(2; 0,35), (4; 0,3), (6; 0,15) и соединив их отрезками прямых, получим искомый полигон относительных частот (рис.2).

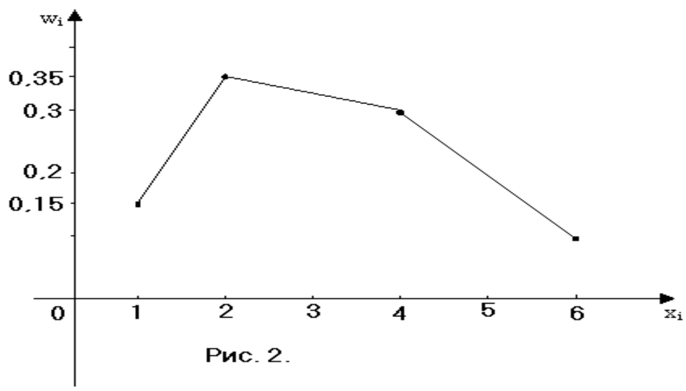


Рис. 2.

В случае непрерывного признака **X** интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения этого признака, разбивают на частичные интервалы длины **h**, и находят **n_i** – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длины **h**, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$ (плотность относительной частоты).

Площадь гистограммы относительных частот равна сумма всех относительных частот, т.е. единице.

Пример 3. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки объёма n=50.

Номер интервала	1	2	3	4	5
Частичный интервал (x_i; x_{i+1})	(1;3)	(3;5)	(5;7)	(7;9)	(9;11)
Сумма частот вариант, попавших в интервал	7	10	20	8	5

Решение. Найдём относительные частоты: $w_1=\frac{7}{50}=0{,}14$; $w_2=\frac{10}{50}=0{,}2$; $w_3=\frac{20}{50}=0{,}4$; $w_4=\frac{8}{50}=0{,}16$; $w_5=\frac{5}{50}=0{,}1$.

Найдём плотности относительных частот, учитывая, что длина частотного интервала h=2:

$$\frac{w_1}{h}=0{,}07;\ \frac{w_2}{h}=0{,}1;\ \frac{w_3}{h}=0{,}2;\ \frac{w_3}{h}=0{,}02;\ \frac{w_4}{h}=0{,}08;\ \frac{w_5}{h}=0{,}05.$$

Построим на оси абсцисс данные частные интервалы. Проведём над этим интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от неё на расстояниях, равных соответствующим плотностям относительной частоты. Искомая гистограмма относительных частот изображена на рис. 3.

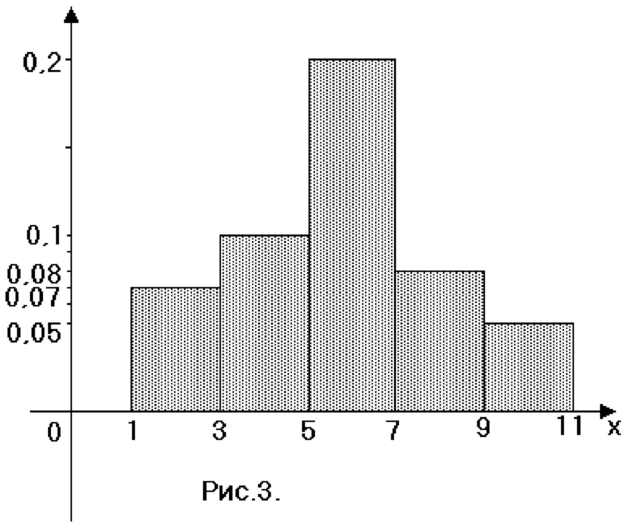


Рис.3.

Контрольные вопросы

1. Что такое статистические данные?
2. Что такое генеральная и выборочные совокупности?
3. Графики статистического распределения полигон и гистограмма.

Рекомендованная литература [1,2,3,4,5,6].

Лекция №4
Точечные оценки неизвестных параметров распределения.

1) Определение точечной оценки.
2) Виды точечных оценок.
3) Каким требованиям должны удовлетворять точечные оценки.
4) Точечные оценки выборочной средней и дисперсии.

Пусть требуется оценить количественный признак X генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Поэтому возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение

Точечной называют статическую оценку, которая определяется одним числом

$$\Theta^{*}=f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad \textbf{(1)}$$

где $x_1,x_2,\ldots,x_n$ - наблюдаемые значения признака **X**.

Несмещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки.

Смещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещённой оценкой генеральной средней (математического ожидания случайной величины **X**) служит выборочная средняя

$$\overline{x_в}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}; \qquad \textbf{(2)}$$

где x_i (i=1,2,..,k) – варианты выборки; n_i (i=1,2,..,k) – соответствующие им частоты; n= $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ - объём выборки.

Смещённой оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия:

$$Д_в=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i(x_i-\overline{x_в})^2}{n}; \qquad \textbf{(3)}$$

Эта оценка является смещённой, так как М($Д_в$)=$\frac{n-1}{n}Д_г$.

Для вычисления $Д_в$ более удобна формула

$$Д_в=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}\right)^2. \qquad \textbf{(4)}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии

$$\delta_в = \sqrt{Д_в}\,. \qquad \textbf{(5)}$$

Несмещённой оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} Д_в = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}{n-1}. \qquad \textbf{(6)}$$

Исправленным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из исправленной дисперсии.

Сравнивая формулы (3) и (6), видим, что они отличаются только знаменателями. Очевидно, что при достаточно больших значениях **n** выборочная и исправленная дисперсии отличаются мало.

Замечание 1. Если варианты x_i – больше числа, то для упрощения расчёта целесообразно перейти к условным вариантам $\mathbf{u_i=x_i\text{-}c}$ (в качестве **c** выгодно принять варианту, расположенную примерно в середине вариационного ряда). Тогда

$$\overline{x_в} = \overline{u_в} + c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} + c; \;\; Д_в(X) = Д_в(u) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i u_i}{n}\right]^2 \qquad \textbf{(7)}$$

Замечание 2.В случае равностоящих вариант для упрощения расчёта можно перейти к условным вариантам $u_i = \frac{x_i - c}{h}$, где **h** – шаг, т.е. разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами; **c**- ложный нуль (**c** выбирается также, как и в предыдущем случае). Тогда

$$\overline{x}_в = h\overline{u}_в + c; \;\; Д_в(X) = h^2 Д_в(u) \qquad \textbf{(8)}$$

Пример 1. Найти выборочную среднюю $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $Д_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\delta_в$ и исправленную выборочную дисперсию S^2 по данному распределению выборки.

$\mathbf{x_i}$	1	2	5	6
$\mathbf{n_i}$	2	3	4	1

Решение. Объём выборки n= $\sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 10$; $\overline{x_в} = \frac{1}{10}\left(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 5 + 1\cdot 6\right) = 3{,}4.$

Для вычисления выборочной дисперсии используем формулу (4):

$$Д_в = \frac{2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 5^2 + 1\cdot 6^2}{10} - 3{,}4^2 = 15 - 11{,}56 = 3{,}44;$$

$$\delta_в = \sqrt{3{,}44} \approx 1{,}85;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} Д_в = \frac{10}{9}\cdot 3.44 \approx 3{,}82;$$

$$S = \sqrt{3{,}82} \approx 1{,}95.$$

Пример 2. Найти выборочную среднюю $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $Д_в$ и выборочное среднее квадратичное отклонение $\delta_в$ по данному распределению выборки.

x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Решение. Объём выборки $n=\sum n_i=100$. Так как варианты равноотстоящие, то перейдём к условным вариантам **u_i**; h=2. Пусть c=91 (варианта 91 расположена примерно в середине вариационного ряда). Тогда $u_i = \frac{x_i - 91}{2}$. Для упрощения вычислений составим расчётную таблицу.

x_i	n_i	u_i	$n_i\,u_i$	$n_i\,u_i^2$	$n_i\,(u_i+1)^2$
83	6	-4	-24	96	54
85	7	-3	-21	63	28
87	12	-2	-24	48	12
89	15	-1	-15	15	0
91	30	0	0	0	30
93	10	1	10	10	40
95	8	2	16	32	72
97	6	3	18	54	96
99	4	4	16	64	100
101	2	5	10	50	72
	n=100	$\sum n_i u_i$ = -14	$\sum n_i u_i^2$ =432		$\sum n_i (u_i+1)^2$ =504

Для контроля вычислений пользуемся тождеством
$\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (u_i+1)^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i u_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{k} n_i u_i + n$. В данном случае $\sum n_i (u_i+1)^2$ =504;
$\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (u_i+1)^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i u_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{k} n_i u_i + n$=432-28+100=504.

Совпадение контрольных сумм свидетельствует о правильности вычислений.

$\overline{u_в} = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = -0{,}14$; $Д_в$(u)=$\frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 - \left(\overline{u_в}\right)^2$ =4,32-0,0196=4,30.

Используя формулу (8), находим $\overline{x_в}$ =-0,14·2+91=90,72; $Д_в$(X)=4,30·4=17,20; $\delta_в$(X)=$\sqrt{17{,}20} \approx 4{,}15$.

Контрольные вопросы

1.Что такое выборочная средняя?

2.Точечная оценка выборочной средней и дисперсии.

3. Назовите параметры нормального распределения и их точечные оценки.

Рекомендованная литература [1,2,3,4,5,6].

Лекция№5.
Метод доверительных интервалов для оценки неизвестных параметров распределения.

1) Определение интервальной оценки.
2) Доверительный интервал.
3) Надёжность оценки.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надёжностью **γ** покрывает неизвестный параметр.

1. Для оценки с надёжностью **γ** математического ожидания **a** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней $\overline{x_в}$ при известном генеральном среднем квадратическом отклонении δ служит доверительный интервал

$$\overline{x_в} - \frac{t\delta}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t\delta}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(9)}$$

где $\frac{t\delta}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ - точность оценки; n – объём выборки; t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$ *при котором* $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Пример 1. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью **γ**=0,99 неизвестного математического ожидания нормального распределения **X** генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение δ =2, выборочная средняя $\overline{x_в}$ =15,35 и объём выборки n=16.

Решение. Требуется найти доверительный интервал (9). Все величины, кроме t, известны. Найдём t из соотношения $\Phi(t)\frac{0.99}{2} = 0.495$. По таблице значений функции Лапласа находим t=2,58. Подставив t=2,58; $\overline{x_в}$ =15,35; δ =2; n=16 в (9), получим искомый доверительный интервал 14,06<**a**<16,64.

Пример 2. Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,95 точность оценки математического ожидания **a** нормального распределения признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней ε =0,2, если известно среднее квадратическое отклонение признака **X** δ =1,3.

Решение. Точность оценки (с надёжностью **γ**) математического ожидания a нормального распределения признака X по выборочной средней определяется по формуле $\varepsilon = \frac{t\delta}{\sqrt{n}}$. Отсюда находим, что $n = \frac{t^2\delta^2}{\varepsilon^2}$. По условию задачи **γ**=0,95; следовательно $\Phi(t)\dfrac{0.95}{2}=0.475$. По таблице значений функции Лапласа находим t=1,96. Подставив t=1,96; δ =1,3 и ε =0,2 в данную формулу, получим искомый объём выборки n=163.

2. Если среднее квадратическое отклонение δ нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности неизвестно, то для оценки (с надёжностью **γ**) математического ожидания a признака **X** служит доверительный интервал

$$\overline{x_в}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\overline{x_в}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(10)}$$

где S – исправленное среднее квадратическое отклонение; n – объём выборки; t_γ - находят по таблице значений $t_\gamma=t(\gamma,n)$ по заданным **γ** и **n** [3, прил.3].

Замечание. Для нахождения доверительного интервала (10) используют тот факт, что случайная величина $T=\dfrac{\bar{x}-a}{S/\sqrt{n}}$, где $\bar{x}$ - выборочная средняя; S – исправленное среднее квадратическое отклонение, имеет распределение Стьюдента. При неограниченном возрастании объёма выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому при достаточно больших n можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

Пример 3. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью **γ**=0,99 неизвестного математического ожидания **a** нормального распределённого признака **X** генеральной совокупности, если известны выборочная средняя $\overline{x_в}$ =48,5; исправленное среднее квадратическое отклонение S=4,0 и объём выборки n=16.

Решение. Требуется найти доверительный интервал (10). Все величины, кроме t_γ, известны. По таблице значений $t_\gamma=t(\gamma,n)$ по **γ**=0,99 и n=16 находим t_γ =2,95. Поставив $\overline{x_в}$ =48,5; S=4,0; n=16; t_γ =2,95 в формулу (10), получим искомый доверительный интервал: 45,55<a<51.45.

3. Интервальной оценкой с надёжностью **γ** среднего квадратического отклонения δ нормально распределённого признака X генеральной совокупности по исправленному среднему квадратическому отклонению S служит доверительный интервал

$$\begin{array}{ll} S\,(1-q)<\delta<S\,(1+q) & (\text{при } q<1); \\ 0<\delta<S\,(1+q) & (\text{при } q>1). \end{array} \qquad \textbf{(11)}$$

где q находят по таблице значений q=q(**γ**,n) [3, прил.3].

Пример 4. Произведено n=20 измерений одним прибором (без систематических ошибок) некоторой физической величины, причём исправленное среднее квадратическое отклонение S случайных ошибок измерений оказалось равным 0,7. Найти точность прибора с надёжностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение. Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала, покрывающего δ с заданной надёжностью **γ**=0,95. По данным **γ**=0,95 иn=20 по таблице значений q=q(**γ**,n) найдём q=0,37. Так как q<1, то доверительный интервал имеет вид S (1-q)<δ <S (1+q). Подставив S=0,7; q=0,37 в это соотношение, получим искомый доверительный интервал 0,441<δ<0,959.

8.30. n=35 S=0,5 γ=0,95

Контрольные вопросы

1. Каким требованиям должны удовлетворять интервальные оценки.?

2. Что является интервальными оценками параметров нормального распределения?.

3. Точечные оценки выборочной средней, дисперсии и их интервальные

оценки.

Рекомендованная литература [1,2,3,4,5,6].

Лекция №6.
Элементы теории корреляции.

1) Условная средняя.

2) Статистическая зависимость.

3) Нахождение параметров уравнения прямой линии регрессии по не сгруппированным данным.

Две случайные величины могут быть либо независимыми, либо связаны функциональной зависимостью, либо связаны зависимостью другого рода, называемой статистической. Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечёт изменение распределения другой случайной величины. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой. В этом случае статистическую зависимость называют корреляционной. Одной из задач математической статистики является исследование корреляционной зависимости между случайными величинами.

Пусть рассматривается система количественных признаков (X, У). Условной средней $\overline{y_x}$ называют среднее арифметическое наблюдавшихся значений У, соответствующих значению X=x. Например, если при x_1=4 величина У приняла значения y_1=2; y_2=5; y_3=7; y_4=10, то условная средняя $\overline{y_{x_1}} = \frac{2+5+7+10}{4} = 6$. Аналогично определяется условная средняя $\overline{x_y}$.

Условна средняя $\overline{y_x}$ является функцией от x, т.е. $\overline{y_x} = f^*(x)$. Это уравнение называют выборочным уравнением регрессии У на X; функцию

$f^*(x)$ называют выборочной регрессией У на Х, а её график – выборочной линией регрессии У на Х.

Аналогично уравнение $\overline{x_y} = \varphi^*(y)$ называют выборочным уравнением регрессии Х на У; функцию $\varphi^*(y)$ называют выборочной регрессией Х на У, а её график – выборочной линией регрессией Х на У. Если обе линии регрессии У на Х и Х на У являются прямыми, то корреляцию называют линейной.

4.1. Нахождение параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по не сгруппированным данным.

Пусть в результате n независимых опытов получены n пар чисел (x_1; y_1), (x_2; y_2),…(x_n; y_n). Найдём по этим данным наблюдений выборочное уравнение прямой линии регрессии У на Х. Так как различные значение x признака Х и соответствующие значения y признака У наблюдались по одному разу, то нет надобности использовать понятие условной средней. Поэтому искомое уравнение можно записать в виде

$$y = \rho_{yx} x + в . \qquad \textbf{(12)}$$

Угловой коэффициент выборочной прямой линии регрессии У на Х называют выборочным коэффициентом регрессии У на Х и обозначают ρ_{yx}.

Используя метод наименьших квадратов, получаем систему линейных уравнений для определения параметров ρ_{yx} и $в$:

$$\begin{cases} \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + в\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ; \\ \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i + вn = \sum_{i=1}^{n} y_i ; \end{cases} \qquad \textbf{(13)}$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Х на У.

Пример 1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии У на Х по данным n=6 наблюдений.

x_i	1,5	2,0	3,0	3,5	4,5	5,0
y_i	1,3	2,0	2,1	2,7	2,6	3,3

Решение. Составим расчётную таблицу.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,5	1,3	2,25	1,95
2,0	2,0	4,00	4,00
3,0	2,1	9,00	6,30
3,5	2,7	14,25	9,45
4,5	2,6	20,25	11,70
5,0	3,3	25,00	16,50
Σx_i=19,5	Σy_i=14,0	Σx_i^2=74,75	$\Sigma x_i y_i$=49,90

Для определения параметров ρ_{yx} и $в$ получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} 74{,}75\rho + 19{,}5в = 49{,}9; \\ 19{,}5\rho + 6в = 14. \end{cases}$$
Решив эту систему, найдём $\rho_{yx} \approx 0{,}39$; $в \approx 1{,}08$. Запишем искомое уравнение прямой линии регрессии: y=0,39x+1,08.

Сделаем чертёж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построим экспериментальные точки и прямую линию регрессии.

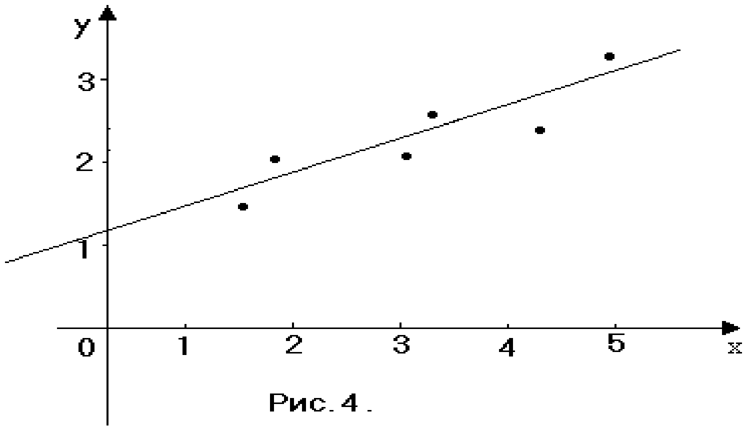


Рис. 4 .

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте уравнение линии регрессии.
2. Сформулируйте идею метода наименьших квадратов.
3. Что такое коэффициент корреляции?

Рекомендованная литература [1,2,3,4,5,6].

Лекция №7.
Нахождение параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным.

1) Группировка статистических данных.
2)Выборочные средние.
3) Уравнение прямой линии регрессии по сгруппированным данным.

При большом числе наблюдений одно и то же значение x может встретиться n_x одно и то же значение y – n_y одна и та же пар (x;y) может наблюдаться n_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений группируют, т.е. подсчитывают частоты n_x, n_y, n_{xy}. Все сгруппированные данные записывают в иде таблицы, которую называют корреляционной (см. пример 2).

Обозначив $\bar{x}$, $\bar{y}$ - выборочные средние признаков X и У; δ_x^* , δ_y^* - выборочные средние квадратические отклонения этих признаков; n- объём выборки. Введём также следующие обозначение:

$$r_в = \rho_{xy} \frac{\delta_x^*}{\delta_y^*}; \qquad \textbf{(14)}$$

$r_в$ называется выборочным коэффициентом корреляции. Выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\delta_x^*\delta_y^*} \qquad \textbf{(15)}$$

служит для оценки силы линейной корреляционной связи между признаками Х и У.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии У на Х в этом случае имеет вид

$$\overline{y_x} - \overline{y} = r_в \frac{\delta_y^*}{\delta_x^*}(x - \overline{x}). \qquad \textbf{(16)}$$

Это уравнение можно записать в более симметричной форме:

$$\frac{\overline{y_x} - \overline{y}}{\delta_y^*} = r_в \frac{(x - \overline{x})}{\delta_x^*} \qquad \textbf{(16′)}$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Х на У имеет вид

$$\overline{x_y} - \overline{x} = r_в \frac{\delta_x^*}{\delta_y^*}(y - \overline{y}) \qquad \textbf{(17)}$$

или

$$\frac{\overline{x_y} - \overline{x}}{\delta_x^*} = r_в \frac{(y - \overline{y})}{\delta_y^*} \qquad \textbf{(17′)}$$

Если данные наблюдений над признаками Х и У заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то целесообразно перейти к условным вариантам

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}; \quad \upsilon_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}, \qquad \textbf{(18)}$$

где c_1 –«ложный нуль» вариант Х; h_1- шаг, т.е. разность между двумя соседними вариантами Х; c_2 – «ложный нуль» вариант У; h_2 – шаг вариант У. В этом случае выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{\sum n_{u\upsilon}u\upsilon - n\overline{u}\overline{\upsilon}}{n\delta_u\delta_\upsilon}; \qquad \textbf{(19)}$$

где $\overline{u} = \dfrac{\sum n_u u}{n}$; $\overline{\upsilon} = \dfrac{\sum n_\upsilon \upsilon}{n}$; $\delta_u = \sqrt{\overline{u^2} - \left(\overline{u}\right)^2}$; $\delta_\upsilon = \sqrt{\overline{\upsilon^2} - \left(\overline{\upsilon}\right)^2}$. **(20)**

Зная $\overline{u}$, $\overline{\upsilon}$, δ_u, δ_υ можно определить

$$\begin{aligned} &\overline{x} = \overline{u}h_1 + c_1; \quad \overline{y} = \overline{\upsilon}h_2 + c_2; \\ &\delta_x^* = \delta_u h_1; \quad \delta_y^* = \delta_\upsilon h_2. \end{aligned} \qquad \textbf{(21)}$$

Пример 2. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии У на Х и Х на У по данным, приведённым в корреляционной таблице. Сделать чертёж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить условные средние, вычисленные по корреляционной таблице, и прямые линии регрессии У на Х и Х на У.

y \ x	5	10	15	20	n_y
10	2	-	-	-	2
20	5	4	1	-	10
30	3	8	6	3	20
40	-	3	6	6	15
50	-	-	2	1	3
n_x	10	15	15	10	n=50

Решение. Составим корреляционную таблицу в условных вариантах, выбрав в качестве «ложных нулей» c_1=10; c_2=30. В данном примере h_1=5; h_2=10/

υ \ u	-1	0	1	2	n_υ
-2	2	-	-	-	2
-1	5	4	1	-	10
0	3	8	6	3	20
1	-	3	6	6	15
2	-	-	2	1	3
n_u	10	15	15	10	n=50

По формулам (20) получаем:

$$\bar{u} = \frac{20+15-10}{50} = 0{,}50;$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{-4-10+15+6}{50} = 0{,}14;$$

$$\overline{u^2} = \frac{10+15+40}{50} = 1{,}30;$$

$$\overline{\upsilon^2} = \frac{8+10+15+12}{50} = 0{,}90;$$

$$\delta_u = \sqrt{1{,}30-0{,}25} = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}02;$$

$$\delta_\upsilon = \sqrt{0{,}90-0{,}0196} = \sqrt{0{,}8804} \approx 0{,}94.$$

Далее определяем

$\sum n_{u\upsilon} u\upsilon$ = -1(-22-15)+1(-11+16+22)+ +2(16+21)=34 и искомый выборочный коэффициент $r_в = \frac{34-50\cdot 0{,}5\cdot 0{,}14}{50\cdot 1{,}02\cdot 0{,}94} \approx 0{,}64.$

Вычислим $\bar{x} = \bar{u}h_1 + c_1$ =0,55+10=12,5; $\bar{y} = \bar{\upsilon}h_2 + c_2$ =0,1410+30=31,4; $\delta_x^* = \delta_u h_1$ =1,025=5,1; $\delta_y^* = \delta_\upsilon h_2$ =0,9410=9,4.

Подставим найденные значения в соотношение (16), получим искомое уравнение прямой линии регрессии У на Х: $\overline{y_x} - 31{,}4 = 0{,}64\frac{9{,}4}{5{,}1}(x-12{,}5)$ или окончательно $\overline{y_x}$ =1,18x+16,65. **(I)**

Аналогично получим выборочное уравнение прямой линии регрессии Х на У: $\overline{x_y}-12{,}5=0{,}64\dfrac{5{,}1}{9{,}4}(y-31{,}4)$ т.е. $\overline{x_y}$ =0,35у+1,51. **(II)**

По данным приведённым в корреляционной таблице, вычислим условные средние:

$$\overline{y_5}=\frac{2\cdot 10+5\cdot 20+3\cdot 30}{10}=21;$$

$$\overline{y_{10}}=\frac{4\cdot 20+8\cdot 30+3\cdot 40}{15}=29{,}33;$$

$$\overline{y_{15}}=\frac{1\cdot 20+6\cdot 30+6\cdot 40+2\cdot 50}{15}=36;$$

$$\overline{y_{20}}=\frac{3\cdot 30+6\cdot 40+1\cdot 50}{10}=38.$$

Аналогично найдём $\overline{x_{10}}$ =5; $\overline{x_{20}}$ =8; $\overline{x_{30}}$ =12,25; $\overline{x_{40}}$ =16; $\overline{x_{50}}$ =16,67.

Полученные прямые линии регрессии У на Х и Х на У вместе с вычисленными условными средними изображены на рис.5.

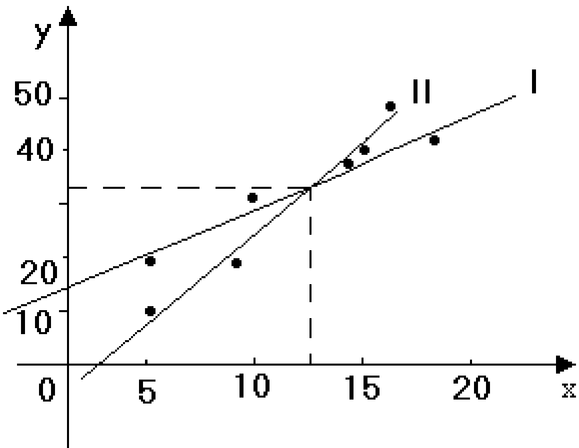


Рис.5 .

Контрольные вопросы

1. Что такое группировка статистических данных?.
2. Что такое выборочное среднее?
3. Как строится уравнение прямой линии регрессии по сгруппированным данным.

Рекомендованная литература [1,2,3,4,5,6].

Лекция №8.
Статистическая проверка статистических гипотез. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона.

1)Определение понятия гипотиза. Виды гипотез.

2) Виды ошибок.

3) Определение понятия статистический критерий.

4) Критерий согласия Пирсона.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой гипотезе.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, её называют статистической. В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют уровнем значимости, и обозначают α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают β.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым значением $K_{набл}$ называют то значение критерия, которое вычислено по данным вы0борки.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение принадлежит области принятия гипотезы, то нулевую гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) $к_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают правостороннюю, левостороннюю и двустороннюю критические области. Рассмотрим, например, вопрос об отыскании правосторонней критической области. Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K>к_{кр}$, где $к_{кр}$ – положительное число. Для нахождения правосторонней критической области нужно найти критическую точку. Для этого задают достаточно малую вероятность – уровень значимости α. Затем ищут критическую точку $к_{кр}$ исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значение больше $к_{кр}$, была равна принятому уровню значимости, т.е. $P(K>к_{кр})= \alpha$. Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку, удовлетворяющую этому требованию.

Когда критическая точка найдена, вычисляют по данным выборки наблюдаемое значение критерия и, если окажется, что $K_{набл}>к_{кр}$, нулевую гипотезу отвергают; если же $K_{набл}<к_{кр}$, нулевую гипотезу принимают.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения генеральной совокупности.

Имеются несколько критериев согласия: χ^2 Пирсона, Комогорова, Смирнова и др..

Ограничимся описанием применения критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении признака X генеральной совокупности.

Пусть из генеральной совокупности получена выборка n:

$$\begin{matrix} (x_1;x_2), & (x_2;x_3),..., & (x_s;x_{s+1}) \\ n_1 & n_2 ... & n_s \end{matrix} \quad \textbf{(22)}$$

Здесь в первой строке указаны частичные интервалы (x_i; x_{i+1}), во второй – соответствующие им частоты n_i: Σn_i=n.

Допустим, что в предложении нормального распределения признака X генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n_i. При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{s}(n_i - n_i')^2}{n_i'} \quad \textbf{(23)}$$

К. Пирсон доказал, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины (23) стремится к закону распределения χ^2 с **к** степенями свободы. Поэтому случайная величина (23) обозначена χ^2 , а сам критерий называют критерием согласия “хи квадрат”. Число степеней свободы находят по формуле **к=s-1-r**, s – число частичных интервалов выборки; r – число параметров предполагаемого распределения. В частности, если предполагаемое распределение является нормальным, то r=2. Следовательно, к=s-3.

Строим правостороннюю критическую область исходя из требования, чтобы в предположении справедливости нулевой гипотезы P[$\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha;\kappa)$]= α.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу *H*₀ (признак X генеральной совокупности распределён нормально), надо:

1) вычислить наблюдаемое значения критерия $\chi^2_{набл} = \dfrac{\sum_{i=1}^{s}(n_i - n_i')^2}{n_i'}$;
2) по таблице критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы к=s-3 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha;\kappa)$.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}(\alpha;\kappa)$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, т.е. данные наблюдений согласуются с нулевой гипотезой.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}(\alpha;\kappa)$, то нулевую гипотезу отвергают.

В заключение этого параграфа рассмотрим методику вычисления теоретических частот нормального распределения.

Рассмотрим выборку объёма n, статистическое распределение имеет вид (22). Для того, чтобы найти теоретические частоты в предположении, что признак X генеральной совокупности распределён нормально, надо:

а) вычислить выборочную среднюю $\overline{x_в}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\delta_в$, приняв в качестве вариант x_i^* середины частичных интервалов: $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$;

б) пронормировать X, т.е. перейти к случайной величине $Z = \frac{x - \overline{x_в}}{\delta_в}$ и вычислить концы интервалов (z_i; z_{i+1}): $z_i \frac{x_i - \overline{x_в}}{\delta_в}$; $z_{i+1} \frac{x_{i+1} - \overline{x_в}}{\delta_в}$, причём наименьшее значение z_1 положить равным $-\infty$, а наибольшее значение z_{s+1} положить равным $+\infty$;

в) вычислить теоретически вероятности P_i попадания X в интервалы (x_i; x_{i+1}) по формуле $P_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$, где Φ(z)- функция Лапласа, и найти искомые теоретические частоты $n_i=nP_i$.

Пример 1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α =0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении признака X генеральной совокупности с заданным статистическим распределением выборки объёма n=300.

Номер интервала i	Частичный интервал (x_i; x_{i+1})	Частота n_i
1	(-20; -10)	20
2	(-10; 0)	47
3	(0; 10)	80
4	(10; 20)	89
5	(20; 30)	40
6	(30; 40)	16
7	(40; 50)	8

x_i^*	-15	-5	5	15	25	35	45
n_i	20	47	80	89	40	16	8

Решение. Найдём $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$; в итоге получим распределение

Найдём выборочную среднюю $\overline{x_в}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\delta_в$: $\overline{x_в}$ =10,40; $\delta_в$=13,67 (см. разд.2, пример 2).

Найдём интервалы (z_i; z_{i+1}), теоретические вероятности P_i и теоретические частоты n_i=300P_i. Для этого составим расчётную таблицу.

i	*Интервал* (z_i; z_{i+1})	$\Phi(z_i)$,	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	$n_i=300P_i$
1	$(-\infty$; -1,49)	-0,5000	-0,4319	0,0681	20,43
2	(-1,49; -0,76)	-0,4319	-0,2764	0,1555	46,65
3	(-0,76; -0,03)	-0,2764	-0,0120	0,2644	79,32
4	(-0,03; 0,70)	-0,0120	0,2580	0,2700	81,00
5	(0,70; 1,43)	0,2580	0,4236	0,1656	49,68
6	(1,43; 2,16)	0,4236	0,4846	0,0610	18,30
7	(2,16; $+\infty$)	0,4846	0,5000	0,0154	4,62
				ΣP_i=1	Σn_i=300

Вычислим наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл}$. Для этого составим следующую расчётную таблицу, (последний столбец служит для контроля вычислений).

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	$\dfrac{n_i^2}{n_i'}$
1	20	20,43	-0,43	0,1849	0,0091	19,5791
2	47	46,65	0,35	0,1225	0,0026	47,3526
3	80	79,32	0,68	0,4624	0,0058	80,6858
4	89	81,00	8,00	64,0000	0,7901	97,7901
5	40	49,68	-9,68	93,7024	1,8861	32,2061
6	16	18,30	-2,30	5,2900	0,2891	13,9890
7	8	4,62	3,38	11,4244	2,4728	13,8528
Σ	300	300			$\chi^2_{набл}$ =5,46	305,46

Для контроля вычислений используем формулу $\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{s}(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \sum_{i=1}^{s}\dfrac{n_i^2}{n_i'} - n$. В рассмотренном примере $\sum_{i=1}^{s}\dfrac{n_i^2}{n_i'} - n$ =305,46-300=5,46=$\chi^2_{набл}$. Вычисления выполнены правильно.

По таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости α =0,05 и числу степеней свободы к=s-3=7-3=4 находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0{,}05;4) = 9{,}5$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}(\alpha;\kappa)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Следовательно, данные наблюдений согласуется с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Контрольные вопросы

1. Что такое гипотеза?
2. Какие гипотезы Вы знаете?
3. Назовите виды ошибок.
4. Сформулируйте идею критерия Пирсона.

Рекомендованная литература [1,2,3,4,5,6].

Лекция №9.
Введение в математическое моделирование

1) Введение в математическое моделирование.
2) Понятие математического моделирования.

Введение.

Соотношение науки и практики всегда было главной философской проблемой всех исследователей. Вопрос о том, насколько верно те или иные рассуждения, расчеты, действия человека отражают суть реальности, является коренным вопросом любой научной теории.

Познанное человечеством по отношению к реальности можно условно иллюстрировать рис. 1. Реальность всегда **бесконечнообразна и бесконечномерна**, поэтому границы ее на рисунке обозначены пунктиром. То, что мы знаем, представляет собой лишь тонкий срез, отпечаток реальности, имеющий конечные размеры и свойства. Всё о реальности может знать лишь Создатель, нам в силу ограниченности органов чувств и познаний дано лишь составлять себе то или иное **представление** о реальности. Для науки существенное значение имеет уверенная оценка близости такого ограниченного представления к реальности. Оценить эту близость практикой, полагая ее истиной, невозможно, так как мы можем исследовать опять же лишь тот ограниченный круг свойств, который нам доступен. Поэтому между нашим представлением и реальностью оказывается дистанция неконтролируемого размера.

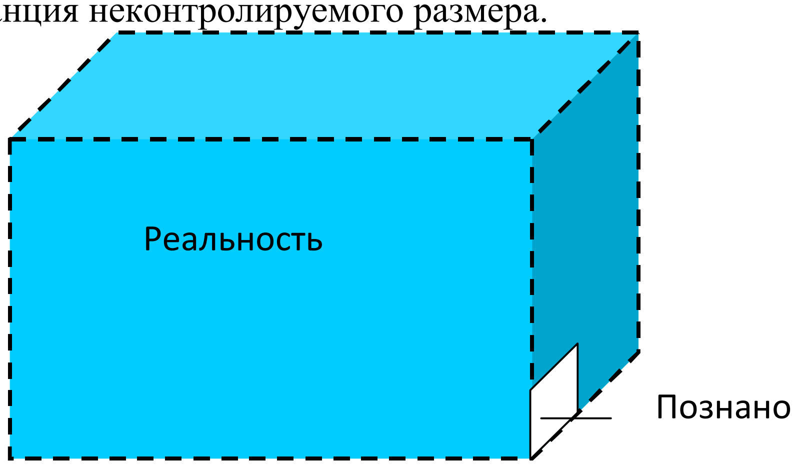


Рис. 1.

Но это еще не все трудности научного познания. Если один человек чтото новое познал о реальности, он стремится объяснить это другим людям.

И здесь возникает необходимость использовать терминологию, **единообразно** понимаемую собеседниками, которая неизбежно содержит какие-то упрощения – **абстракции**. Абстракции позволяют отсечь, отбросить из рассмотрения малозначительные факторы, ввести однозначные термины и представить себе объект в более простой форме, доступной формальной человеческой логике.

Однако неизбежно при этом познанное одним человеком передается другому в усеченном виде – в виде некоторых **моделей**. Такое соотношение познанного и моделей можно иллюстрировать рис. 2. На нем подчеркнута возможность существования для одного познанного явления нескольких моделей, отражающих **те или иные** его свойства в различных условиях.

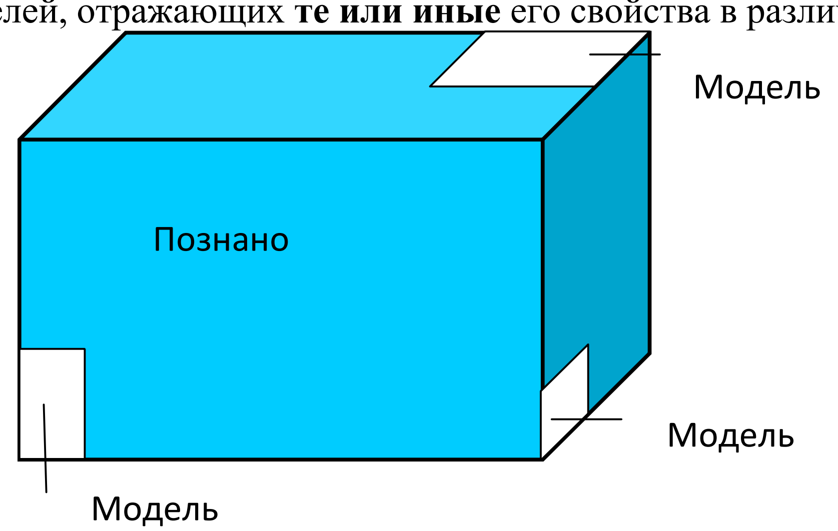


Рис. 2.

Поясним, почему так происходит. До XX века научные исследования велись, в основном, с целью установления хорошо интерпретируемых функциональных связей между небольшим количеством факторов, т.е. **законов**, которым подчиняется исследуемый объект. Закон имеет характер объективной категории, безусловно верной или безусловно неверной на данном этапе развития науки. Успех в выявлении законов природы сопутствовал тем ученым, которые, опираясь на свой интеллект, могли **вычленить** небольшое количество существенных для изучаемого явления факторов из множества возможных. Явления и объекты, достаточно точно и однозначно описываемые **небольшим** количеством факторов, получили название "**хорошо организованных систем**".

Экспериментальные исследования "хорошо организованных систем" заключались в наблюдении за результатом изменения одного фактора при постоянстве прочих. Такой подход вполне соответствует человеческой логике, поддается осмыслению и объяснению, передаче накопленных знаний. Законы природы, выявленные таким образом, непосредственно составляют *модель* явления. Примерами могут служить законы классической механики, генетики, химии и т.п.

Однако давно замечено, что результаты, полученные с помощью лишь умозрительно построенных моделей, не всегда хорошо соответствуют действительности – на результат действия выявленных законов накладывается влияние и других неучтенных факторов, и погрешностей эксперимента. Попытка учета этих факторов приводит к усложнению модели. Если таких факторов много, модель становится **сложной** и трудно воспринимаемой, так, например, произошло с теорией относительности и с квантовой механикойВ XX веке стало ясно, что без изучения сложных систем, в том числе и созданных человеком, дальнейший прогресс невозможен. Возникла необходимость исследования "**плохо организованных систем**", в которых нельзя разделить отдельные явления. Простейшим примером такого типа систем является распространение разнообразных видов возмущений от ядерного взрыва: здесь есть и ударная волна, которая подчиняется одному закону, и световое излучение, подчиняющееся другому закону, и распространение радиации. Более сложным примером может служить авиация: для безопасного полета в пункт назначения необходимо не только знать виды воздействия внешней среды на самолет (вес, тягу двигателей, аэродинамические силы и силы взаимодействия с взлетно-посадочной полосой – а они описываются отнюдь не простыми зависимостями), но и уметь достаточно точно просчитать их, а также управлять ими в полете.

Процессы в сложных системах нельзя описать законами, умозрительно построенными или полученными с помощью простых экспериментов. Для описания "*плохо организованных систем*" такой подход не всегда приемлем – необходимо учитывать не только множество разнообразных по своей природе связей – **закономерностей**, но и возможность различных методологических подходов и глубины отражения реальности. Т.е. вместо моделей, построенных на законах природы, для описания сложных систем приходится применять **для тех или иных целей** модели более широкого смысла, учитывающие закономерности, свойственные объекту. Поэтому для одного и того же явления допустимо равноправное существование **нескольких различных моделей**, что немыслимо для моделей, основанных лишь на законах природы. Примерами закономерностей могут служить инфляционные ожидания, оценка надежности и т.п.

Как мы выяснили, умозрительные исследования могут привести к выявлению некоторых законов. Проверка их практикой тоже возможна лишь на ограниченном круге свойств. Постановка же исследовательского эксперимента нуждается не только в четкой формулировке цели исследований, но и в знании основных свойств оригинала. Т.е. **перед** постановкой и проведением эксперимента нужно не только формально провести его *планирование*, но и изучить объект, построить его описание и выбрать *модель*, хотя бы пробную. Если этого не делать, то можно совершить ошибку в отборе и *обработке информации*, ее оценке и прийти к выводам, прямо противоположным действительности. В экспериментальных науках очень часто, к сожалению, встречаются такого рода ошибки, основанные на нечетко и необоснованно поставленном эксперименте. Без модели – без сколько-нибудь четкого представления об объекте – проведение эксперимента бессмысленно.

В итоге можно сказать, что если целью научных исследований является познание законов природы, то целью инженерных исследований следует считать познание **закономерностей**, свойственных продуктам человеческой деятельности. То и другое в равной степени определяет технический уровень и прогресс общества – ибо гармония между природой и продуктами человеческой деятельности увеличивает эффективность последней, а противоречия могут приводить к катастрофам.

Понятие моделирования

Любая наука пользуется той или иной **абстракцией** реальной действительности для того, чтобы выявить общие закономерности различных конкретных явлений. Например, в физике исследуется такая абстракция, как "математический маятник", известный из курса средней школы. Однако конкретными, реальными явлениями, описываемыми одной и той же указанной абстракцией, могут быть:

– колебания чугунного шара, подвешенного на тросе крана в Москве для разрушения сносимых строений,

– колебания маятника старинных башенных часов в Праге, – колебания маятника Фуко и т.п.

Иными словами, между различными объектами может быть какое-то **сходство**, которое как раз и позволяет строить абстракции науки.

Если с точки зрения целей исследования между двумя объектами есть сходство, то вместо одного можно исследовать другой. Первый называется оригиналом, а второй – *моделью*. Модель – это заместитель *оригинала*, позволяющий **изучить** некоторые его **свойства** в определенных **условиях**. При этом следует подчеркнуть, что сходство может быть не по всем характеристикам: форме, цвету, структуре и т.п. Достаточно, чтобы сходство было лишь в тех свойствах, которые являются объектом **данного исследования**. Так, например, для изучения распространения волн возмущения от сверхзвукового самолета можно воспользоваться сходством этого явления с распространением волн при движении лодки по поверхности пруда.

Следует особо отметить, что данное определение модели является не только строгим, но и исчерпывающим и продуктивным. Так, например, не существует моделей "вообще" – не предназначенных для каких-либо исследований. Даже детские игрушки предназначены для **изучения** окружающего мира. Нет таких моделей, которые воспроизводили бы все **свойства** оригинала. Вопервых, таких свойств бесконечно много и мы бесконечно многие из них даже не представляем себе. А, во-вторых, воспроизвести все свойства оригинала в состоянии только сам оригинал. Выбор необходимых для исследования **свойств и условий** дает возможность на основании предварительного изучения оригинала планомерно строить модель, удовлетворяющую поставленным **целям** (определенным требованиям точности, широты применения, ответа на поставленные вопросы и т.п.).

1. Арифметика – модель счетно-обменных операций.

2. Радиосхема – модель электронной аппаратуры.

3. Электронная система автоматического управления – модель действий управляющего оператора (в частности, пилота).

4. Глобус – модель земного шара.

Моделирование – это **процесс** выбора или построения *модели* для исследования определенных **свойств** *оригинала* в определенных **условиях**. *Моделирование* – творческий процесс познания, который **в первом приближении** можно представить рис. 3, отражающим самые крупные необходимые стадии (более подробно алгоритм исследовательской деятельности с помощью моделирования будет сформулирован ниже.

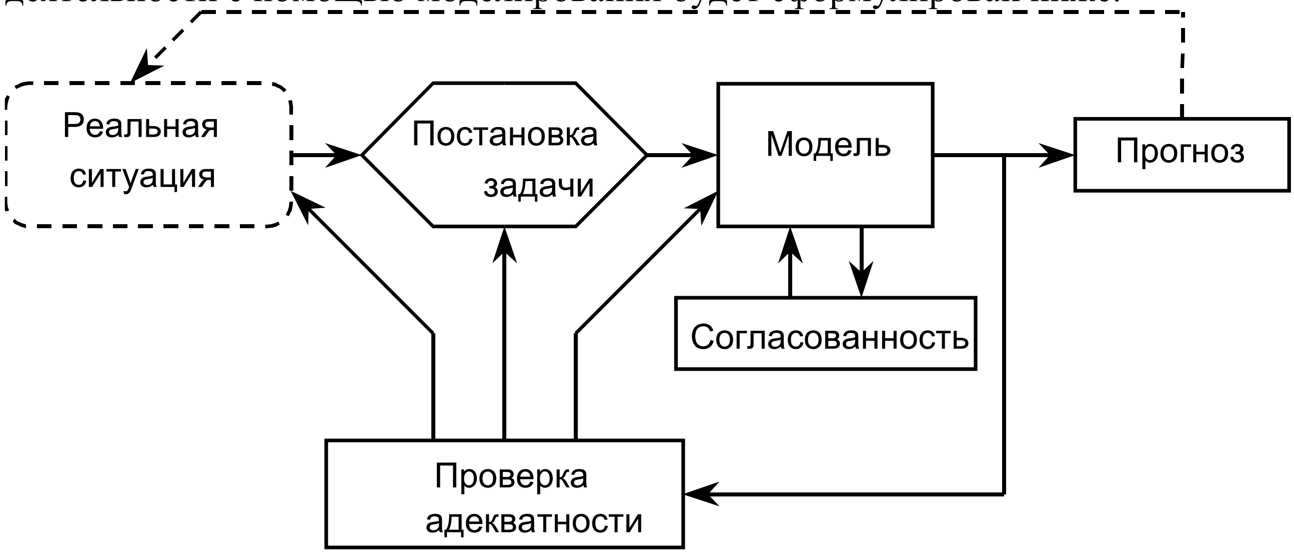


Рис. 3.

Охарактеризуем основные стадии этого процесса.

Постановка задачи исходит из знаний, полученных в результате наблюдения, изучения объекта, а также из той практической проблемы, которую требуется решить. При этом из всего множества влияющих на объект факторов надо суметь отобрать **существенные** и определить **диапазоны** их изменения и **особенности** влияния на конечный результат. Это – уже искусство, здесь не существует общих приемов и рекомендаций. Кроме того, к этой стадии относится оценка требуемой **точности** результатов, диктуемая целью исследования.

Под выбором модели понимается не просто подбор из известного заранее множества, а именно **синтез**, составление общей модели из элементарных "кирпичиков" тех наук, с помощью которых будет исследоваться явление. Здесь действительно серьезным подспорьем является знание определений, логических цепочек и методов соответствующих разделов науки. Однако определяющим для правильности решения конкретной задачи оказывается строгость в использовании этих определений, логических цепочек и методов именно в той области и в тех условиях, **где они пригодны**! Нарушение такой строгости грозит внутренней несогласованностью отдельных частей модели и, как следствие, ошибочными результатами и выводами.

Проверка адекватности модели – это проверка **соответствия** результатов, получаемых с помощью модели, реальному поведению исследуемого объекта. На этой стадии проводится исследование и уточнение самой модели в соответствии с поставленной задачей, а также может корректироваться и постановка задачи, и общий подход к восприятию реальной ситуации.

Сутью решения практических прикладных задач является прогноз поведения объекта в различных ситуациях. К построению алгоритма прогнозирования реальной ситуации в других случаях, отличающихся от исследованных во время процесса разработки модели, можно приступать только после завершения всех стадий, описанных выше.

Каждая стадия этого процесса существенна. Пренебрежение любой из них может приводить к **неверным выводам** по существу решаемой практической задачи в результате таких ошибок, как:

– вычисление с недопустимой, неконтролируемой **погрешностью**;
– **несоответствие** полученных результатов поставленной задаче (полученные результаты могут оказаться решением совсем **другой** задачи);
– **неоднозначность** решения при невозможности селекции;
– **неполучение** решения (алгоритм расходится или не может завершиться).

Следует подчеркнуть особую значимость при моделировании четкого представления об исследуемых **определенных свойствах** объекта **в определенных условиях**, а не всех свойствах и всех условиях! Все свойства во всех условиях может реализовать только сам оригинал. Чем у́же круг моделируемых свойств, условий и у́же диапазон значений параметров, тем проще модель и легче добиться ее согласованности и адекватности, тем достовернее результаты и выводы исследования. Поэтому научные методы исследования (в отличие от дилетантского подхода) основываются на замене оригинала моделью в четко оговоренной области свойств и условий, определяемой задачей исследования. Моделирование – это не только удобный, но в некоторых условиях и **необходимый** научный прием. Среди таких особых условий можно выделить основные причины, вынуждающие *применять моделирование*, без которого изучение оригинала невозможно:

– сложность или дороговизна натурного исследования (например, в экономике, в экологии),
– невозможность натурного исследования по причинам аварийности или бесконечного времени ожидания результатов (например, аварийные ситуации при полетах, астрофизические явления).

Из всего вышесказанного следует, что любая наука представляет собой непрерывный процесс моделирования – творческий процесс познания реальности до такого уровня, который позволяет прогнозировать определенные свойства оригинала в определенных условиях. Учебные дисциплины в этом контексте можно рассматривать в качестве сборников готовых моделей изучаемых явлений и рецептов их применения.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение процесса моделирования.
2. Приведите примеры нескольких моделей.
3. Назовите основные стадии процесса моделирования.

Рекомендованная литература [7,15,16].

Лекция № 10.
Классификация моделей

1) Логические модели.
2) Образные модели
3) Материальные модели.

Модели можно рассматривать по отношению к оригиналу в двух аспектах, соответствующих **внутренним** их устройствам и **связям** с оригиналом:

– характерные **особенности выражения** свойств оригинала и особенности функционирования модели,

– **основания для преобразования** свойств модели в свойства оригинала.

По характерным *особенностям выражения* свойств оригинала и особенностям функционирования модели подразделяются на:

– логические – построенные на принципах человеческой логики; из которых можно выделить:

образные – дающие наглядное представление (например, образное представление самолета любым человеком), символьные – использующие символы (геометрические, химические), образно-символьные – схемы (например, карты, радиосхемы);

– материальные – построенные по объективным законам; из которых можно выделить:

функциональные (например, протез коленного сустава), геометрические (например, самолет-игрушка),

функционально-геометрические (например, модель самолета для исследований в аэродинамической трубе).

Замечание: неспециальный термин "физические модели" можно отнести к некоторым моделям из класса материальных.

Эту классификацию можно изобразить следующим рис. 4.

По *основаниям для преобразования* свойств модели в свойства оригинала модели подразделяются на (рис. 5):

– условные – на основе соглашения (например, система физических единиц измерения, система технической документации);

– аналогичные – на основе логического вывода о сходстве (например, производная от функции по времени – это аналог скорости изменения функции);

– математические – на основе математического описания.

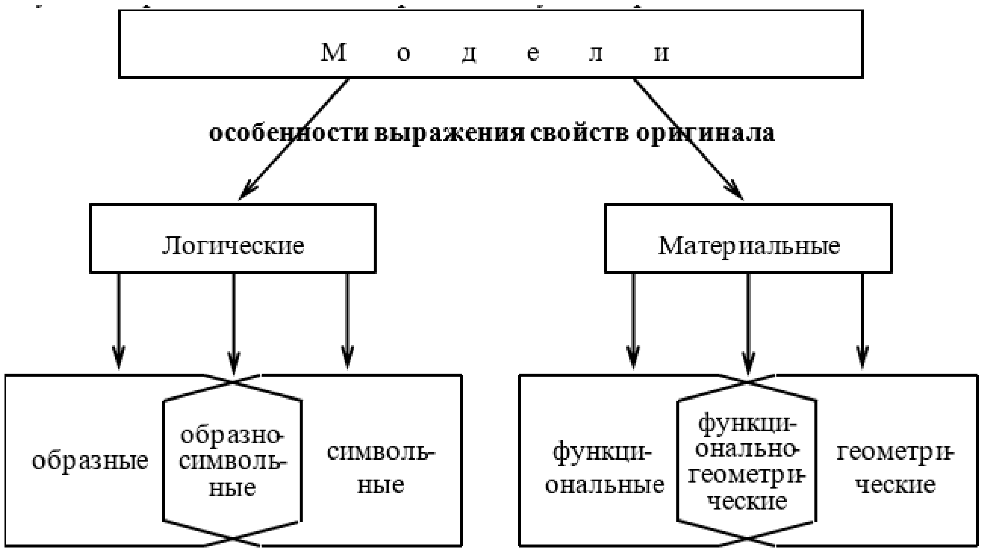


Рис. 4.

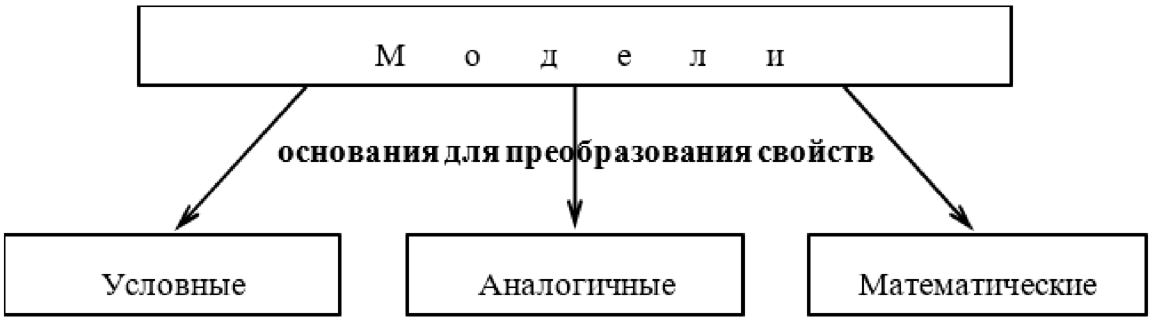


Рис. 5.

Маятник башенных часов в Праге.

То, что в средней школе называют "физической" моделью, носит специальное название "математический маятник" и предполагает определенные **условности**: – масса маятника сосредоточена **в точке** на конце нити,

– нить **длинная**,

– нить **нерастяжимая**,

– нить **невесомая**,

– трение и аэродинамическое **сопротивление отсутствуют**, – на массу действует единственная внешняя сила – **сила тяжести**.

1) Эту абстракцию можно классифицировать как *образную*, *условную* модель реального маятника.

2) Из рассмотрения **малых углов** отклонения маятника от положения равновесия, используя физические и математические рассуждения, можно вывести формулу колебаний и прийти к выводу об их гармоничности: $x = A*\sin(\omega t + \phi_0)$. Такая модель классифицируется как *символьная*, *математическая*.

3) Если собрать реальный маятник и использовать его в качестве модели, то это будет *геометрическая* (или *функционально-геометрическая*), *аналогичная* модель.

4) Если построить электрический колебательный контур, воспроизводящий реальные колебания, то он будет моделью *функциональной*, *математической*.

5) Если построить программу для цифровой ЭВМ, рассчитывающую колебания реального маятника, то такая модель тоже *функциональная*, *математическая*, с возможным уточнением – *дискретная* (или *цифровая*), в отличие от *непрерывной* (или *аналоговой*) в предыдущем случае.

Из приведенного примера очевидно, что классификация моделей не может рассматриваться, как жесткая. Ее гибкость допускает некоторые вариации и обнаруживает недостаточность приведенных классов. Поэтому некоторые исследователи предлагали варианты углубления классификации. Однако они носят не универсальный, специфический характер и здесь не рассматриваются.

Математические модели и их виды

Существенно важным в теории математического моделирования является постоянное согласование всех аспектов построения модели с задачами и целями исследования. Поэтому сосредоточим внимание на некоторых существенных для исследований особенностях **механических** систем и процессов. Вопервых, факторы, определяющие такие объекты, характеризуются, как измеримые величины – параметры. Во-вторых, в основе таких моделей лежат уравнения, описывающие фундаментальные законы природы (механики), не нуждающиеся в пересмотре и уточнении. Даже готовые частные модели отдельных явлений, используемые при составлении более общих, хорошо сформулированы и описаны с точки зрения условий и областей применения. В-третьих, наибольшую трудность при разработке моделей механических систем и процессов представляет описание недостоверно известных характеристик объекта, как функциональных, так и числовых. В-четвертых, современные требования к таким моделям приводят к необходимости учета множества факторов, влияющих на поведение объекта, не только таких, которые связаны известными законами природы. Все эти особенности приводят к тому, что модели механических систем и процессов относятся в основном к классу математических.

Математические модели основываются на *математическом описании* объекта. В математическое описание, прежде всего, входят, и это естественно, взаимосвязи параметров объекта, что характеризует его особенности функционирования. Такие связи могут представляться в виде:

– вектор-функций $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t)$,
– неявных функций $\mathbf{F}(\mathbf{y},\mathbf{x},t) = 0$,
– обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'',\ldots,\mathbf{x}^{(m)},t) = 0,$$

– дифференциальных уравнений с частными производными

Первые четыре из указанных видов носят обобщающее название: *аналитических зависимостей*.

Математическое описание включает в себя не только взаимосвязь элементов и параметров объекта (**законы и закономерности**), но и полный набор числовых и функциональных **данных** объекта (характеристики; начальные, граничные, конечные условия; ограничения), а также **методы вычисления** выходных параметров модели. Т.е. под математическим описанием понимается **полная совокупность** данных, функций и методов вычисления, позволяющая **получать результат**.

Со своей стороны в *математическую модель* может не входить часть *математического описания* (чаще всего некоторые исходные данные), но помимо него должны присутствовать описания всех **допущений**, использованных для ее построения, а также **алгоритмы перевода** исходных и выходных данных с модели на оригинал и обратно (рис. 6).

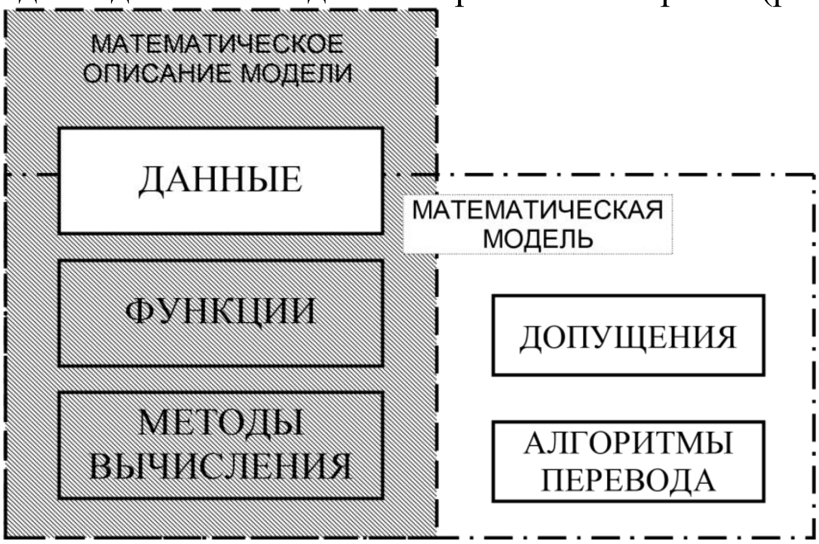


Рис. 6.

В качестве дополнения к классификации *математические модели* в зависимости от природы объекта, решаемых задач и применяемых **методов** могут различаться следующими видами:

– *расчетные* (формулы, таблицы, алгоритмы, графики, номограммы);
– *соответственные* (например, модель в аэродинамической трубе и реальный полет самолета в атмосфере);
– *подобные* (одинаковые математические описания **И** пропорциональные соответствующие параметры);
– *линейные* или *нелинейные* (описываемые функциями, которые содержат основные параметры только в степени 0 и 1, или любыми видами функций),
– *стационарные* или *нестационарные* (независящие или зависящие от времени),
– *непрерывные* или *дискретные*,
– *детерминированные* или *стохастические* (точные, однозначные или вероятностные: модели массового обслуживания, имитационные и др.),
– *четкие* или *нечеткие* (примеры нечетких множеств: около 10; глубоко или мелко; хорошо или плохо).

Исторически сложилось так, что под *математической моделью* иногда подразумевается только один особый вид моделей, содержащих сугубо однозначное прямое математическое описание в виде аналитических зависимостей или вычислительных алгоритмов – т.е. детерминированная математическая модель, с помощью которой при одних и тех же исходных данных можно получить только один и тот же результат. Наибольшее распространение получили детерминированные модели, устанавливающие связь с параметрами оригинала при помощи коэффициентов пропорциональности, всех одновременно равных **единице**. Используемое такой моделью математическое описание естественно рассматривать как описание непосредственно оригинала – и это верно: у модели и оригинала в этом случае существует одно общее математическое описание. В силу такой кажущейся простоты неискушенный инженер воспринимает и модель уже не как модель, а как оригинал (!). На самом деле такая математическая модель является все же моделью со всеми условностями, абстракциями, предположениями, упрощениями, положенными в ее основу. Возникает желание "упростить" процесс добротного моделирования, что в принципе невозможно, так как модель или соответствует оригиналу, или ее нет вообще. Пренебрежительное отношение к этому провоцирует множество ошибочных выводов в прикладных исследованиях, и полученные результаты не согласуются с реальностью.

В качестве антипода детерминированных моделей выступают модели имитационные. Имитационные модели (стохастические) – это математические модели таких оригиналов, для отдельных элементов которых отсутствует аналитический вид математического описания. Математическое описание имитационных моделей содержит описание **случайных процессов** (**стохастических**). В качестве такого описания выступают разнообразные формы законов распределения, которые могут быть составлены на основании статистической обработки результатов наблюдения за оригиналом.

В математическое описание имитационных моделей кроме законов распределения случайных величин, описывающих явление, может входить описание взаимосвязей случайных величин (например, с помощью моделей теории массового обслуживания), а также алгоритм статистических испытаний (метод Монте-Карло для реализации элементарных случайных событий). Таким образом, имитационные модели используют математический аппарат *теории вероятностей*: *математической статистики*, *теории массового обслуживания* и *метода статистических испытаний* (*метода Монте-Карло)*

С помощью имитационных моделей воспроизводится один или несколько из возможных способов функционирования объекта, т.е. то, что вполне **могло бы быть** на самом деле. Это позволяет получить дополнительный статистический материал об исследуемом оригинале и выявить подчас такие эффекты, которые в реальном эксперименте невозможно обнаружить по тем или иным причинам.

Контрольные вопросы

1. Какие модели Вы знаете?

2. Дайте определение математической модели.
3. Назовите несколько видов математических моделей.
Рекомендованная литература [8,11,16].

Лекция № 11.
Адекватность математических моделей

1) Адекватность математических моделей
2) Точность математических моделей.
3) Непротиворичивость математических моделей.

Особенностью математических моделей является то, что получение с их помощью каких-либо результатов связано с вычислениями. Так возникает необходимость понятия вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент – это получение результатов с помощью математической модели для какого-либо конкретного случая исследований. Это может быть как **единичный** расчет одного параметра, так и **комплекс** расчетов целого спектра параметров модели во множестве определенным образом связанных условий.

Во втором случае большое значение приобретает процедура *планирования вычислительного эксперимента*, целью которого является получение максимума **достоверной** информации при минимуме затрат. Под достоверностью результата вычислительного эксперимента понимается одновременное выполнение двух условий: во-первых, результат должен быть достаточно **точен**, а во вторых, не может быть **опровергнут** с помощью каких либо дополнительных расчетов. (В математической статистике этим понятиям соответствуют понятия **несмещенности** и **состоятельности** оценок, получаемых из наблюдений. При *планировании вычислительного эксперимента* используются многие методы математического моделирования – от простого здравого смысла до *теории катастроф* и методов *математической статистики*.

Центральным понятием теории математического моделирования является понятие *адекватности*. Игнорирование этого понятия низводит теорию до уровня схоластики, а аргументированная проверка адекватности обеспечивает получение добротных и практически значимых результатов.

Адекватность *математической модели* – это **соответствие** результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта. Это соответствие следует оценивать с точки зрения целей исследования. Поэтому возможны различные подходы к оценке адекватности различных моделей.

Для выявления этого соответствия для **механических систем и процессов**, характеризующихся измеримыми величинами – параметрами – необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала **в одних и тех же условиях**. Очевидно, что сравнивать следует лишь **соответствующие** друг другу параметры между собой и только **в той области** функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать.

Математические модели механических систем и процессов строятся в основном как подобные детерминированные модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием. Поэтому для адекватности математической модели поведению оригинала – механической системы – достаточно убедиться в выполнении двух свойств: **точности** и **непротиворечивости**. Однако так звучат лишь общие, образные требования к адекватности, для практического применения необходимо сформулировать математические формы этих требований.

Точность в задачах механики означает, что обобщенная характеристика **рассогласования** соответствующего параметра модели и оригинала

$$(\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}})$$

должна быть не больше, чем заранее заданное значение **приемлемой погрешности** $u_{\text{доп}}$. В качестве такой обобщенной характеристики может выступать наибольшее по модулю значение рассогласования, среднее значение рассогласования или статистическая оценка, как догма, они выбираются в соответствии с целью исследований.

Непротиворечивость подразумевает идентичный **характер изменения** соответствующих параметров, т.е. идентичный вид основных **свойств** функциональных зависимостей на отдельных участках, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п. При более глубоком рассмотрении этого понятия становится очевидным многообразие возможных критериев проверки непротиворечивости. Эти критерии не могут быть догмой – они выбираются в соответствии с целями исследования.

Поскольку сравниваемые параметры в области функционирования объекта могут принимать **множество** различных значений, постольку какие-либо выводы о соответствии их поведения можно сделать только на основании статистической обработки таких множеств. Поэтому адекватность проверяется с помощью **статистических критериев**, которые могут с определенной вероятностью свидетельствовать о соответствии результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта в соответствующих условиях.

Для образной характеристики понятий точности и непротиворечивости можно воспользоваться рис. 7. На нем изображены графики некоторой функциональной зависимости между параметрами оригинала, которую модель должна адекватно воспроизвести. Для первого знакомства с понятием адекватности нижеследующий анализ приводится в нестрогой форме – строгий математический аппарат проверки адекватности дан в виде алгоритма.

В случае "а" существует область, в которой выполняются некоторые заданные требования точности, т.е. погрешность модели по отношению к оригиналу меньше некоторого допустимого значения. Однако с точки зрения такого свойства рассматриваемой зависимости, как возрастание-убывание, эта модель противоречит поведению оригинала, поэтому не может быть признана адекватной. (Между прочим, если рассмотренное свойство несущественно для данного исследования, то модель может быть признана адекватной.) Случай "б" демонстрирует непротиворечивый ход зависимости с той же точки зрения.

На графиках "в" и "г" показано поведение оригинала, наиболее часто встречающееся в реальных механических объектах. Колебания связаны с возмущающими факторами, не поддающимися регистрации, а также с погрешностями записывающей аппаратуры. Тем не менее, заменять экспериментальную зависимость более "красивой" нельзя, так как истинный характер ее неизвестен. В этом случае сравнение оригинала и модели особенно сложно.

В случае "в" заметна систематическая погрешность модели – постоянно присутствующее рассогласование между параметрами модели и оригинала. В этом случае, если все наблюдаемые частные значения рассогласования **существенно** меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной.

Если большое число наблюдаемых частных значений рассогласования больше допустимого значения погрешности, то модель нельзя считать достаточно точной. А в промежуточном случае необходимо руководствоваться соображениями цели исследований.

В случае "г" систематическая погрешность модели значительно меньше той случайной ее составляющей, которая обязана своим появлением возмущающим факторам. Поэтому, если большинство наблюдаемых частных значений рассогласования меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной.

Что касается свойства непротиворечивости модели в случаях "в" и "г", то этот вопрос значительно сложнее. Если по своей природе исследуемая зависимость должна быть более плавной, чем это зарегистрировано на оригинале (например, скорость полета самолета по времени в пределах 20 с), то это значит, что практически все высокочастотные колебания являются результатом наложения шума (неучитываемых факторов), который следует отфильтровать.

Эта неформализуемая процедура должна быть построена только на одном требовании: для непротиворечивости **рассогласование** между оригиналом и моделью не должно подчиняться какой-либо **закономерности**, рассогласование должно вести себя вполне хаотически. С этой точки зрения случай "г" позволяет надеяться на непротиворечие модели поведению оригинала, а случай "в" – нет.

Таким образом, становится очевидным, что для проверки адекватности необходимо иметь (рис. 8):

– **исчерпывающую** информацию о реальном случае (что всегда трудно, а подчас бывает практически невозможно);

– результаты **контрольного вычислительного эксперимента**, воспроизводящего известный реальный случай;
– критерий оценки **точности** математической модели;
– критерий проверки **непротиворечивости** математической модели.

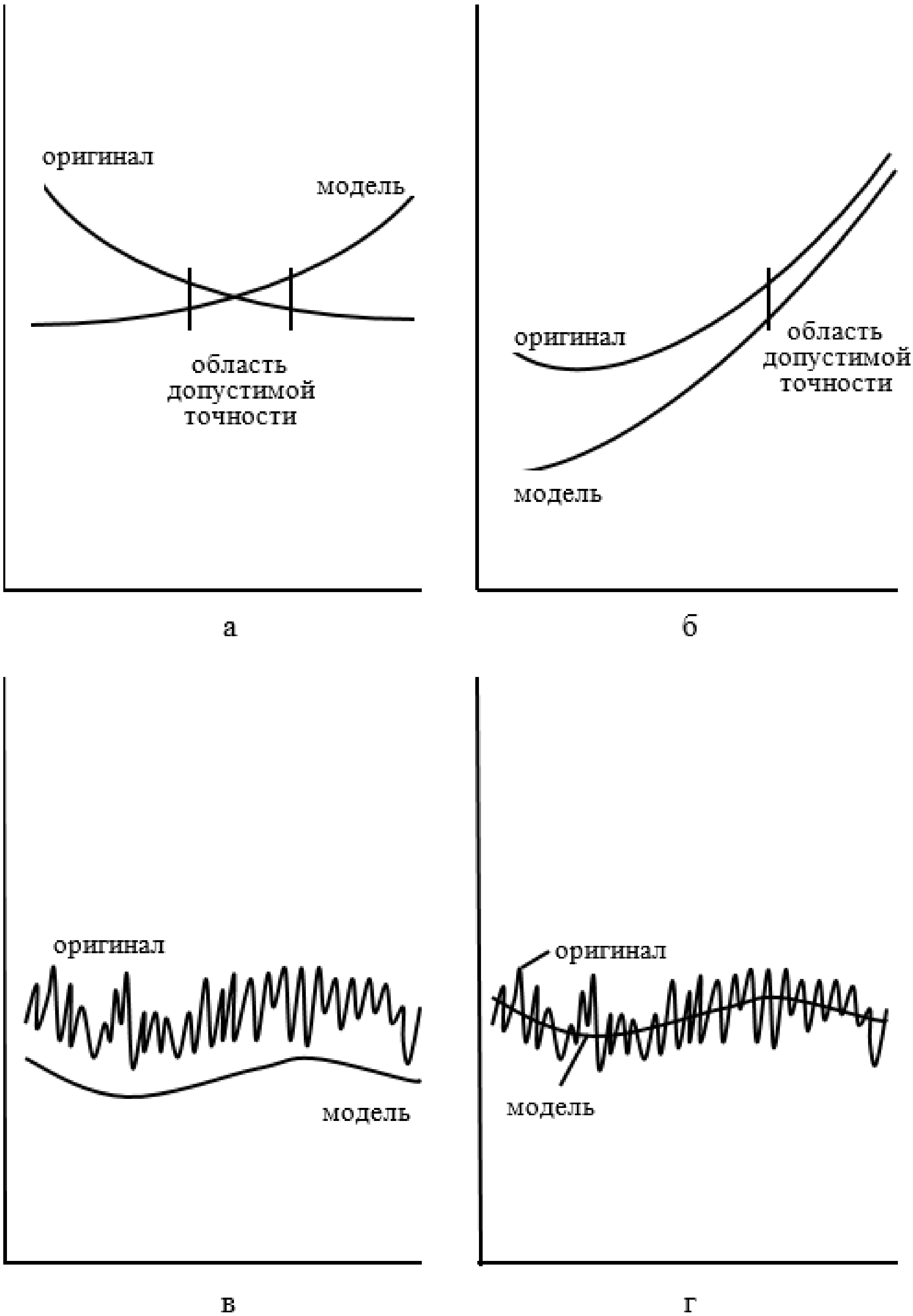


Рис. 7.

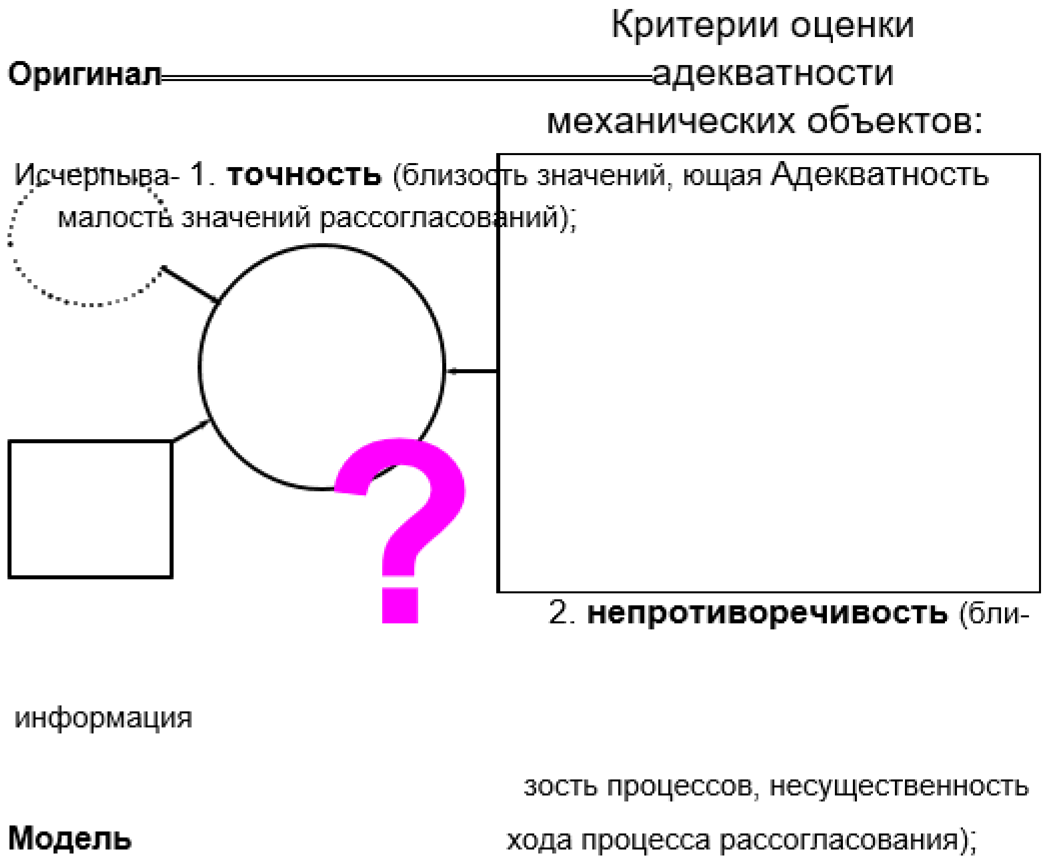


Рис. 8.

При построении критерия проверки адекватности необходимо учитывать как особенности модели, так и область ее применения:

– **ограниченность** допустимого диапазона изменения параметров системы (вследствие ограниченной области функционирования объекта, в которой он моделируется),
– соответствие математического описания **условий** реального и вычислительного экспериментов,
– возможную **неоднозначность** решений в вычислительном эксперименте,
– **точность** самого вычислительного эксперимента.

Ошибки неучета идентичности начальных и конечных **условий**, к сожалению, еще встречаются в технической литературе.

Возможность получения **неоднозначного** решения в расчетах можно представить на примере квадратного уравнения, имеющего в общем случае два корня, один из которых может не иметь физического смысла и должен быть отброшен. Однако в некоторых задачах таких явных признаков может и не быть.

Точность модели определяется погрешностью – рассогласованием значений рассматриваемого параметра u:

– случайная – принимающая случайные значения при многократном повторении опыта в неизменных условиях (например, замер времени падения шара с Пизанской башни с помощью одного и того же секундомера);

– систематическая – принимающая неизменное значение при многократном повторении опыта в неизменных условиях (то же, что в предыдущем случае, но с испорченным секундомером, который начинает отсчет времени на 0,1 с позже пуска).

При математическом моделировании возможны *погрешности*, обусловленные различными причинами:

– погрешности **физической абстракции** (неточность физических законов и закономерностей, неучет некоторых факторов); – погрешности **математического описания**:

приближенность уравнений, приближенность данных,

погрешность расчетов (погрешность установок, ЭВМ, приближенные методы расчетов);

– погрешность **обработки результатов** (округление результатов, графическое изображение).

Из всех перечисленных причин в пояснении нуждается лишь погрешность расчетов, которую при моделировании всегда надо учитывать.

Контрольные вопросы

1. Назовите критерии оценки адекватности
2. Определение понятий точность, непротиворичивость.

Рекомендованная литература [8,12,13,14].

Лекция № 12.
Понятие об обратных задачах.

1) Идентификация.
2) Обратная задача.
3) Алгоритм научных исследований.

В процессе построения математической модели при недостаточной степени ее адекватности или в условиях недостаточной информации об оригинале возникает необходимость уточнения, "доводки" модели. Эта процедура носит название идентификации – задачи определения недостающих или неточно известных параметров или функциональных соотношений модели с помощью результатов вычислительного эксперимента и данных о реальном поведении объекта.

(Только в том случае, когда модель строго линейная, можно решить задачу идентификации за один расчет – найти x из уравнения $ax + b = y$ при известном y.) Таким образом, задача идентификации решается с помощью *метода последовательных приближений* в широком смысле. При обработке результатов такого вычислительного эксперимента используются статистические методы: *метод наименьших квадратов метод моментов метод наибольшего правдоподобия* .

Поскольку задачу идентификации нельзя решить "прямо", т.е. нельзя прямым вычислением определить недостающие параметры, то такая задача относится к особому классу – обратных задач. Следует заметить, что математически строго (т.е. безусловно верно) решить обратную задачу нельзя в принципе (кроме случая простейшей линейной математической модели). Даже квадратичная модель допускает два решения, а сложные нелинейные зависимости вообще необратимы. По выражению академика А.Н. Тихонова любое решение обратной задачи следует рассматривать не более чем "интерпретацию данных наблюдений", что блестяще иллюстрируется разобранным выше примером. Таким образом, *идентификация математических моделей* сводится по сути к "интерпретации" исходного приближенного числового материала и моделей тех отдельных элементов, которые не описываются законами природы.

Для решения задач идентификации чаще всего используются *метод проб и ошибок*, *метод перебора* – выборочного или последовательного, *метод проверки гипотез*. Последним методом, в частности, решаются задачи расследования летных происшествий.

Второй тип *обратных задач – задачи оптимизации*.

Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования

Математическое моделирование – мощное современное средство научных исследований и его применение требует соблюдения определенной строгости во избежание получения неверных выводов. Так, например, пренебрежительное отношение к разработке математического описания грозит получением неразрешимой задачи (при ее незамкнутости), а игнорирование оценки адекватности – получением неверных выводов. Такого рода примеры упоминались ранее. Высше рассматривалось первое приближение структуры процесса моделирования, теперь можно обоснованно дать следующий выработанный практикой алгоритм действий, которого рекомендуется придерживаться:

1) изучение оригинала: выявление основных факторов, особенностей, **диапазонов** исследуемых параметров, **условий и задач** исследования, постановка (формулировка) задачи исследования, оценка требуемой **точности**;

2) феноменологическое описание оригинала ("физическое" описание): поиск **аналогий и функциональных** зависимостей на основе предыдущего этапа и достижений в различных областях **науки**;

3) *математическое описание* оригинала;

4) разработка алгоритмического и программного **обеспечения** для реализации математического описания с помощью ЭВМ;

5) проведение контрольного вычислительного эксперимента (воспроизводящего реальный известный случай поведения оригинала в конкретных условиях);

6) оценка *адекватности* результатов *контрольного вычислительного эксперимента* **реальному случаю**;

7) *планирование* вычислительного эксперимента **в целях исследования**;

8) проведение *вычислительного эксперимента* в целях исследования, **обработка** его результатов;

9) **анализ** результатов вычислительного эксперимента, сравнение с результатами изучения оригинала (при необходимости – повторение алгоритма с пункта 7 или 1);

10) формулировка выводов исследования.

Пункты 1 – 6 составляют процесс *моделирования* – построения математической модели. В нем можно выделить процесс *идентификации,* объединяющий пункты 3 – 6.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте алгоритм действий процесса моделирования.
2. Дайте определения понятий идентификация, обратная задача.

Рекомендованная литература [8,11,12-16].

Лекция № 13.
Основные принципы математического моделирования механических систем и процессов

1) Адекватность.
2) Иинвариантность.
3) Принцип состоятельности эксперимента

В этой лекции сформулируем все те "правила" строгости процесса моделирования, которые так или иначе прозвучали в предыдущих лекциях, в виде принципов математического моделирования механических систем и процессов.

1. Главным из этих принципов безусловно является обеспечение высокой степени адекватности математической модели. В теории математического моделирования принято называть моделью только тот объект, который успешно прошел оценку адекватности. Как было выяснено, адекватность математической модели механических систем и процессов основывается на удовлетворительной *точности и непротиворечивости* по отношению к поведению оригинала. Проверка этих качеств модели делается чаще всего с помощью методов математической статистики.

2. Обычно выделяемые принципы математического моделирования: гибкость, инвариантность и динамичность – сводятся в основном к полной унификации всего программного обеспечения и специальным его свойствам, обеспечивающим оперативную настройку на новые задачи. В конечном итоге следует стремиться к такому состоянию программного обеспечения, когда

для решения новой задачи требуется лишь подготовить исходные данные, что тоже должно делаться с помощью специального программного обеспечения.

3. Принцип состоятельности результатов вычислительного эксперимента трактуется, как обеспечение результатов, безусловно приближающихся к истине. Состоятельность здесь следует понимать как статистический термин, обозначающий стремление по вероятности при увеличении объема информации результатов вычислительного эксперимента к истинным значениям параметров исследуемого явления. Этот принцип требует предельной математической строгости, то есть использования в программном обеспечении вычислительных методов, проявляющих при их применении одновременно *устойчивость, сходимость и однозначность*.

4. Принцип удобства исследователя – простота обращения с программным обеспечением, компоновки вариантов расчета, обработки и представления результатов вычислительного эксперимента – все это достигается развитым диалоговым режимом работы, сервисным программным обеспечением (таблицы, графики и т.п.) и унификацией всего программного обеспечения.

5. Принцип планирования вычислительного эксперимента обеспечивается применением методов и приемов планирования эксперимента (см. главу 7).

6. Принцип конкретизации условий и области применения разрабатываемой математической модели. Особенно большое значение этот принцип приобретает при математическом моделировании сложных систем. Он помогает избежать соблазна построения одной математической модели на все случаи жизни, что принципиально невозможно, и построить несколько математических моделей, с достаточной степенью адекватности отвечающих на множество частных конкретных вопросов. Рис. 10 иллюстрирует "мозаику" нескольких моделей, обозначенных различной штриховкой, покрывающую область исследования, обозначенную пунктиром. Этот прием (называемый декомпозицией) позволяет добиться как достоверности результатов вычислительных экспериментов в той области, которая не выходит за пределы области проверки точности, так и непротиворечивости. Прием декомпозиции бывает полезен и при разработке комбинированных методов вычисления, когда не удается получить адекватные результаты с помощью обычных распространенных методов.

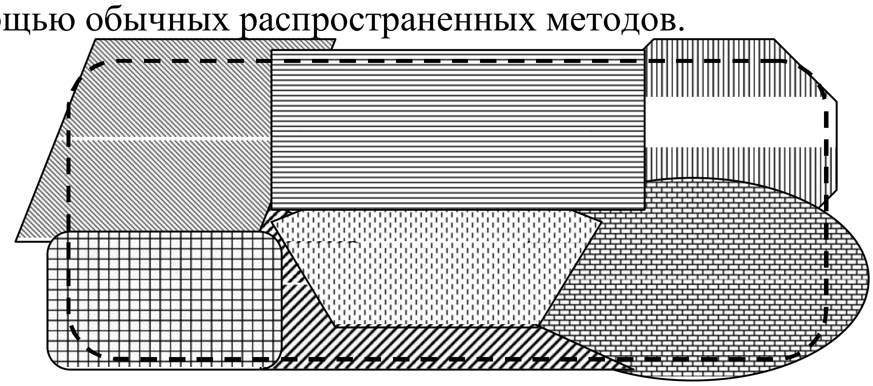


Рис. 10.

7. Принцип опережающей математической строгости и глубины феноменологического описания явления. В соответствии с ним при математическом моделировании механических систем и процессов необходимо построение физических закономерностей отдельных явлений на порядок более строгих и глубоких, чем это диктуется непосредственно постановкой конкретной задачи. Дело в том, что на практике невозможно избежать применения математических моделей в несколько более широкой области, чем это проверено при оценке адекватности. Поэтому во избежание ошибок при принятии решений необходимо обосновать возможность некоторой экстраполяции результатов вычислительного эксперимента. Такая экстраполяция возможна только в том случае, когда основу феноменологического описания каждого частного явления составляют физически обоснованные закономерности. Данный принцип можно было бы назвать иначе принципом приоритета физичности – приоритета перед статистическим моделированием и приемами упрощения моделей. Этот принцип отнюдь не противоречит предыдущему принципу конкретизации применения, а лишь дополняет возможности математического моделирования механических систем и процессов.

Некоторые ученые предлагают еще один принцип математического моделирования – принцип "разумной достаточности" ("допустимой неточности", "достаточной неточности"). Его названия говорят сами за себя. Однако его применение невозможно конкретизировать – лишь в случае удачного моделирования говорят, что этот принцип выполнен.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте принцип состоятельности эксперимента.
2. Дайте определение понятий адекватность, инвариантность.

Рекомендованная литература [8,9,12].

Лекция № 14.
Проблемы построения математических моделей

1) Приёмы контроля математических моделей.
2) Подобие размерностей.

Можно построить очень сложную математическую модель, учитывающую все видимые и предполагаемые факторы и явления, но получение результата с ее помощью может оказаться не менее сложным, чем на оригинале. Можно построить очень простую модель, отображающую минимум очевидных свойств объекта, но тогда нельзя с ее помощью исследовать тонкие свойства. Задача *построения математической модели* – это отыскание оптимального **компромисса** между простотой модели и степенью ее адекватности изучаемому оригиналу (см. принцип "разумной достаточности" на предыдущей странице).

Построение математической модели (синтез математической модели) требует решения достаточно сложных проблем, среди которых:

– множественность критериев оценки качества функционирования моделируемой системы (*многокритериальность*);

– большая размерность описания сложных систем ("*проклятие размерности*");

– *адекватность*.

Под многокритериальностью понимается наличие подчас противоречивых требований к различным элементам сложной системы или к системе в целом (например, экономичность и безопасность полетов, быстрота и качество обслуживания). Для решения этой проблемы применяют различные приемы *ранжирования*, в том числе и основанные на результатах применения *методов экспертных оценок*.

С "проклятием размерности" борются тоже *ранжированием*, а также *агрегированием*, что позволяет решать задачу поблочно (поагрегатно). Наиболее сложной при этом остается задача **выявления факторов**, способных описать изучаемое явление, а также **взаимосвязи** различных факторов, входных и выходных данных системы. Для этого помимо глубокого изучения физических особенностей системы подчас бывает необходимо проводить *многомерный статистический анализ* (глава 6) результатов экспериментов (вычислительных или натурных).

При решении проблемы *адекватности* математической модели приходится очень придирчиво рассматривать **условия моделирования**, выделять из множества факторов главные, подлежащие изучению. Кроме того, в зависимости от конкретных свойств математической модели следует из всей палитры статистических методов выбирать наиболее приемлемые и эффективные критерии.

Дадим краткую характеристику упоминавшимся ранее методам, которые применяются для разработки математических моделей – методам математического моделирования.

Ранжирование – неформализуемый анализ, в результате которого можно произвести распределение параметров по **важности (рангу)**; наиболее важные необходимо учитывать, наименее важными иногда можно пренебречь, промежуточные по важности можно учесть в виде поправок, каждому из них можно приписать весовые коэффициенты.

Агрегирование (*декомпозиция*) – разбиение большого числа факторов (параметров) задачи на небольшое число групп, блоков (агрегатов) по определенному принципу; предполагает, с одной стороны, вполне конкретные связи между блоками, которые нетрудно формализовать и учесть, а с другой стороны, возможность решения необходимых вопросов внутри агрегата.

Теория катастроф – часть математической логики, которая позволяет в области изменения основных параметров (факторов), связанных **аналитически**, выявить точки, линии, плоскости и т.п. границы (*бифуркации*), на которых происходят резкие изменения качественного поведения рассматриваемой системы – "катастрофы" той или иной интерпретации поведения системы. Так, например, в динамике полета линия разграничения I и II режимов полета самолета – граница бифуркации, где I режим характерен естественной зависимостью: чем большей скорости установившегося полета требуется достичь, тем большую тягу двигателей следует развить, а II режим характерен обратной связью, на первый взгляд неожиданной.

Метод последовательных приближений – общее название группы математических методов, в которых на каждом очередном **цикле** однообразных вычислений определяются новые значения параметров, более точные, которые в свою очередь используются на следующем цикле.

Метод проб и ошибок – по результатам одного или нескольких (отличающихся подбираемыми значениями параметров) расчетов делается **вывод о направлении** дальнейшего подбора искомых значений для минимизации ошибки.

Метод перебора – процесс отыскания решения, в котором проверяются **возможные варианты**, или *простым* перебором всего их множества, или *случайным* перебором. Этот прием для непрерывно распределенных факторов механических систем и процессов, принимающих бесконечное множество значений на любом отрезке своего изменения, не может считаться методом, поскольку не гарантирует получение решения.

Метод проверки гипотез – процесс выдвижения, анализа и проверки разнообразных **предположений** о причинах появления определенного результата. Этот метод имеет смысл применять там, где требуется найти скорее качественное, чем количественное объяснение сложного и неординарного явления.

Подобие и анализ размерностей

Наиболее распространенным частным случаем математических моделей является случай *подобных моделей*. Подобные модели наиболее легко воспринимаются и вызывают у неподготовленных людей желание отбросить в сторону все строгости науки. Поэтому сформулируем в терминах теории моделирования строгое понятие подобия. Два *объекта* подобны, если выполнены **одновременно два** условия:

1) они имеют **одинаковые** математические описания;
2) их соответствующие переменные связаны **коэффициентами подобия** (масштабами, константами подобия, коэффициентами пропорциональности).

Рассмотрим подробнее особенности различных величин с точки зрения строгости построения подобных детерминированных математических моделей.

Еще древние заметили, что величины ведут себя по разному по отношению к арифметическим действиям. Некоторые из них можно складывать, вычитать, умножать и делить, а результат арифметических действий с другими величинами не имеет смысла. Так, например, не имеет смысла сумма длины и времени, зато результат деления длины на время имеет вполне конкретный физический смысл скорости. Сумма длины и ширины прямоугольника, наоборот, имеет смысл полупериметра. Величины, сумма или разность которых имеет физический смысл, назвали **однородными**.

Для сравнения результатов измерений одной и той же или однородных величин необходимо было ввести некое мерило, масштаб. Поэтому были разработаны единицы измерения, и стали различать размерные и безразмерные величины. Единицей измерения физической величины D (размерностью, обозначаемой с помощью квадратных скобок [D]) называется условно выбранная физическая величина, имеющая тот же самый физический смысл, что и величина D. Например, единицей измерения температуры может служить градус по шкале Фаренгейта, который равен 1/180 части разности температур кипения воды и таяния льда при нормальных атмосферных условиях, причем температура таяния льда принята за 32□F. Такое сложное описание единицы недопустимо в формулах, поэтому для размерностей были придуманы специальные краткие обозначения (□F). Однако это не означает, что единицы измерения – нечто второстепенное. Наоборот, всякое значение любой физической величины представляет собой **единство** численного значения (масштабного множителя по отношению к единице измерения) и размерности. Это жесткое сочетание при использовании в расчетах можно рассматривать как произведение.

Величины, численное значение которых зависит от принятых единиц измерения, называются размерными. Величины, численное значение которых не зависит от принятых единиц измерения, называются безразмерными. Изучением размерных величин занимается анализ размерностей – мощный метод математического моделирования.

Все известные законы природы описываются с помощью функциональных связей между размерными величинами, поэтому для расчетов необходимо в эти связи подставлять значения величин вместе с их размерностями.

Порядок и правила применения размерностей устанавливают **системы единиц измерения**. В физике использовалось достаточно большое количество таких систем: СГС, техническая, МКС, МКСА, СГСЭ и СГСМ. В 1960 году в Париже XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла Международную систему единиц измерения, обозначаемую SI (в русской транскрипции СИ). Сегодня эта система на территории России утверждена ГОСТом 8.417–81 Единицы физических величин. Этим стандартом устанавливаются правила применения размерностей в технической документации, терминология и система обозначений.

Упомянутый пример с законом Ома показывает, что из некоторой совокупности одних единиц измерения можно получить другие единицы. Иными словами, в любой системе можно выделить основные единицы, через которые с помощью законов природы получаются остальные. В 1832 г. Гаусс предложил в качестве основных единиц измерения выбирать **независимые** единицы (в совокупности не связанные между собой законами природы), на которых строится вся система. В СИ основными единицами приняты:

– **метр** [м] в качестве меры длины,
– **килограмм** [кг] в качестве меры массы,
– **секунда** [с] в качестве меры времени,
– **ампер** [А] в качестве меры силы электрического тока,

Приёмы

Приёмы упрощения моделей. На этапе *феноменологического описания* часто применяются приемы упрощения, основанные на особенностях рассматриваемых движений, позволяющие уменьшить количество неизвестных.

Установившееся движение позволяет исключить зависимость параметров движения от времени и отказаться от начальных условий дифференциальных уравнений.

Плоскопараллельным движением называется такое движение, в котором можно ввести систему декартовых координат, одна из которых оказывается несущественной. Обычно в таком случае существенные координаты обозначают x и y. Картину такого движения можно изобразить на плоскости, что очень важно для понимания сути многих процессов (например, в аэродинамике). Для плоскопараллельных движений можно применить и хорошо разработанную теорию функций комплексных переменных.

Если движение можно описать с помощью цилиндрической системы координат, в которой полярный угол несущественен, то оно носит название осесимметрического движения.

В некоторых задачах существенной остается только одна координата (в общем случае криволинейная). Такое движение называется одномерным. Если такое движение еще и установившееся, то единственная производная становится обыкновенной, что существенно облегчает решение.

Автомодельным движением называется такое движение, которое может быть описано тремя существенными независимыми аргументами:

$$\frac{x}{t^{\alpha}},\frac{y}{t^{\alpha}},\frac{z}{t^{\alpha}}$$

вместо четырех координат x, y, z, t; здесь α – числовая постоянная. Если автомодельное неустановившееся движение еще и одномерное, то можно обойтись x одной независимой переменной вида $\zeta = \frac{x}{t^{\alpha}}$ и использовать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Б) Упрощение уравнений

Основными способами упрощения уравнений являются:

– переход к *безразмерным* величинам (с помощью замены $F = f^{*}f_0$, где f_0 – характерное значение размерной величины F, f – безразмерная переменная); – **приближенная замена** переменных величин постоянными значениями; – *пренебрежение малыми членами*.

В) Линеаризация

Математические модели имеют наиболее простой вид математического описания, а также наиболее простые способы вычисления, в том случае, когда они линейные. Линейными могут быть как алгебраические уравнения, так и дифференциальные. Методы решения таких уравнений хорошо разработаны, в том числе и для особых случаев, как то: определитель системы линейных алгебраических уравнений близок к нулю, система линейных дифференциальных уравнений близка к состоянию резонанса и т.п. Кроме того, решения линейных систем обладают свойством **суперпозиции**, т.е. при сложении аргументов складываются и решения, а при умножении аргумента на число на то же число умножается и решение. Это свойство приводит к возможности складывать частные решения одного и того же уравнения (или системы). Поэтому естественно стремление разработчиков математических моделей к таким упрощающим предположениям на стадии *феноменологического описания*, которые приводят к линейным уравнениям.

Однако существуют такие системы и процессы, которые имеют существенно нелинейный характер, пренебрегать которым нельзя из-за угрозы потери качественно верного описания. К проявлениям существенной нелинейности следует отнести изменение характера поведения объекта при изменении масштаба воздействия, наличие резких переходных границ наличие диссипативных процессов (типа трения). В этих случаях стремиться к линейному математическому описанию нельзя.

На стадии изучения оригинала, когда выделяются исследуемые параметры и диапазоны их изменения, можно составить представление о том, насколько близко поведение оригинала к линейному. Это можно зафиксировать не только по результатам эксперимента в широком диапазоне условий, но и в том случае, когда сам **диапазон** изменения параметров **мал** и позволяет заменить их приращения дифференциалами. В этих случаях имеет смысл произвести линеаризацию модели – приближенную замену нелинейных соотношений на линейные.

Приёмы контроля математических моделей

Разработка математических моделей – трудоемкий процесс, сопряженный с подбором частных согласованных моделей, адекватных в своих областях, с идентификацией по результатам эксперимента. Поэтому такой дорогостоящий продукт нуждается в постоянном контроле на всех стадиях разработки. К основным приемам контроля математических моделей можно отнести следующие.

А) *Контроль размерностей* позволяет избежать несогласованностей в формулах основных законов природы и закономерностей объекта и подготовить их к применению в алгоритмах для вычислительной техники. Для контроля размерностей следует соблюдать три правила:

– знаки +, –, <, >, = могут связывать величины только **одной** размерности;

– аргументами трансцендентных функций должны быть **безразмерные** величины;

– во всех расчетных формулах следует применять **одну** систему единиц измерения.

Так, например, в выражении e^{-at} показатель степени должен быть безразмерным: т.е. a и t безразмерны или имеют взаимно обратные размерности. В эмпирических формулах коэффициенты должны иметь размерность. Внесистемные единицы измерения следует перевести в применяемую систему.

Общий контроль размерностей математического описания обеспечивается при его разработке, когда задача "решается в общем виде" и только в конечные формулы подставляются числовые значения величин. Однако, если таких этапов ("подмоделей") много, то контроль необходимо осуществлять на каждом из них.

Б) *Контроль основных законов* природы, прежде всего законов сохранения, необходим в моделях, не претендующих на всеобъемлющее описание оригинала, или в моделях, использующих численные методы вычисления. Так, например, если в модели используется только дифференциальное уравнение движения (2-й закон Ньютона), то разностная схема для его интегрирования должна строиться так, чтобы это уравнение, продифференцированное численным образом по времени, давало бы закон сохранения энергии с учетом особенностей явления.

В) *Контроль качественного поведения зависимостей* необходимо проводить во всех тех случаях, когда о промежуточных результатах можно что-либо сказать. Такой контроль особенно важен при использовании в качестве частных элементов моделей зависимостей, полученных статистической обработкой результатов измерений. Хорошей иллюстрацией необходимости такого контроля является пример, когда именно контроль качественного поведения рассматриваемой зависимости дает верные рецепты: или возможность применения только в области исходных данных без отражения физической сути, или невозможность применения для отражения физической сути явления.

Г) Общий порядок разработки математического описания модели, обеспечивает *контроль математической замкнутости* задачи, т.е. соответствие количества уравнений количеству неизвестных. Действительно, без этого просто невозможно "решить задачу в общем виде", что необходимо для разработки математического описания модели. Однако, если разрабатываемую модель предполагается использовать только как промежуточное звено в более общей модели, то такой контроль необходимо проводить явным образом.

Д) Проверку *на контрольных примерах* проводят, как правило, для всей модели или для ее законченных частей, имеющих самостоятельные значение и смысл. В любом случае о поведении оригинала должна иметься достоверная информация, как для оценки адекватности, хотя, может быть, и неполная. Используются три вида контрольных примеров: простейшие случаи (тривиальные, как, например, случаи особого поведения (например, резонанс) и наиболее общие случаи, исследованные в специальных экспериментах. В отличие от задачи идентификации проверка на контрольных примерах дает лишь общий вывод о качественной правильности модели.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные приёмы контроля математической модели.
2. Контроль основных законов природы?
3. Контроль качественного поведения зависимостей?

Рекомендованная литература [7,10,12,16].

Лекция №15.
Математическая модель малых колебаний струны.

1) Некоторые вспомогательные утверждения.
2) Замена переменных.
3) Математическая модель малых колебаний струны.

1. Некоторые вспомогательные утверждения

Если для $\forall\, x \in [a;\ b]$ функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет производную первого порядка y', то говорят, что $y = f(x)$ относится к классу $C^{(1)}$.

Пусть $y = f(x) \in C^{(1)}, x \in [a;\ b]$.

Пусть α – угол, образованный касательной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in [a;\ b]$ с положительным направлением оси OX.

Пусть α – малый угол, т.е.

$$\alpha^2 \approx 0\ . \tag{1}$$

Так как для $\forall\, \alpha \in (-\infty;\ \infty)$ справедливо

$$sin\ \alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots\ , \tag{2}$$

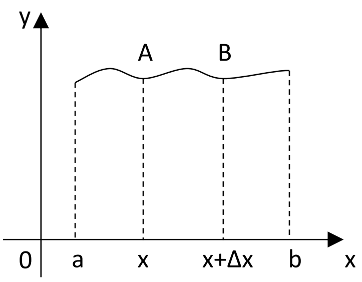
то из (1) и (2) вытекает $sin\ \alpha \approx \alpha$. Далее:

$$1 - cos\ \alpha = 2\ sin^2\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2} \approx 0\ , \quad \text{т.е. } \alpha \approx 1\ ;$$

$$tg\ \alpha - sin\ \alpha = sin\ \alpha (\frac{1 - cos\ \alpha}{cos\ \alpha}) \approx 0\ , \quad \text{т.е. } \alpha \approx sin\ \alpha \approx \alpha\ ,$$

тогда $tg^2\alpha \approx 0$.

Пусть $y = f(x) \in C^{(1)}$, $x \in [a;\ b]$, длина дуги $\breve{AB}$:



$$l_{\breve{AB}} = \int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\, dx\ . \tag{3}$$

К последнему интегралу применим теорему о среднем: если $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то найдется точка $c\ \in\ (a;\ b)$ такая, что $\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\ \cdot\ f(c)$.

Тогда равенство (3) примет вид

$l_{\widetilde{AB}} = \sqrt{1 + f'^{\,2}(x)} \cdot \Delta x$,

где $c \in (x;\ x + \Delta x)$ (см. рисунок).

Используем геометрический смысл производной:

$f'(c) = tg\,\alpha \approx \alpha$, а $f'^{\,2}(c) = tg^2\alpha \approx \alpha^2$

При нашем предположении, что α угол малый, получаем $f'^{\,2}(c) \approx \alpha^2 = 0$, т.е.

$$l_{\widetilde{AB}} \approx x . \qquad (4)$$

2. Замена переменных в дифференциальных уравнениях с частными производными

Пусть $Z = U(x;\ y)$, где $U(x;\ y) \in C^2$, т.е. имеет частные производные второго порядка $\forall\ (x;\ y) \in (S)$, где (S) некоторая замкнутая область. произведем замену переменных функции $Z = U(x;\ y)$ по формулам:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x;\ y) \\ \eta = \psi(x;\ y) \end{cases} \qquad (1)$$

где $\varphi(x;\ y)$, $\psi(x;\ y) \in \mathrm{C}^2$ $\forall\ (x;\ y) \in (S)$.

Предположим, что существуют

$$\begin{cases} x = \varphi^{-1}(\xi;\ \eta) \\ y = \varphi^{-1}(\xi;\ \eta) \end{cases} \qquad (2)$$

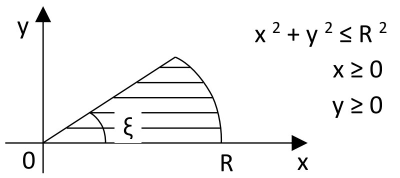


Рис. 1

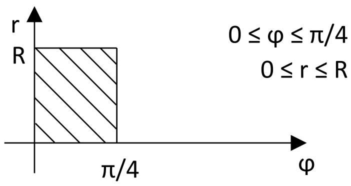


Рис. 2

(1) и (2) задают отображение одной области в другую (рис. 1, 2).

Проведем замену переменных по формулам $\begin{cases} x = r\,cos\,\varphi \\ y = r\,sin\,\varphi \end{cases}$, тогда круговой сектор на рис. 1 преобразуется в прямоугольник на рис. 2. Если в заданную функцию $Z = U(x;\ y)$ подставить (2), то Z будет зависеть от ξ и η .

Найдем частные производные функции Z :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta\,\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} +$$
$$+ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 .$$

Аналогично $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} +$

$$+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 .$$

Найдем $\Delta Z=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$, где ΔZ называется оператором Лапласа, и запишем ΔZ, используя оператор Гамильтона $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}$:

$$\Delta Z=\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial\xi}\cdot\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial U}{\partial\eta}\cdot\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\cdot\left(\vec{\nabla}\xi\cdot\vec{\nabla}\xi\right)+2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\left(\vec{\nabla}\xi\cdot\vec{\nabla}\eta\right)+\frac{\partial U}{\partial\xi}\cdot\Delta\xi+\frac{\partial U}{\partial\eta}\cdot\Delta\eta+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}\cdot\left(\vec{\nabla}\eta\cdot\vec{\nabla}\eta\right).$$

Рассмотрим пример.

Пусть $\begin{cases}\xi=x+ay\\ \eta=x-ay\end{cases}$ где $a=const$.

Тогда $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ функции $Z=U(x;\ y)$ примут вид:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\cdot 1+2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot 1\cdot 1+\frac{\partial U}{\partial\xi}\cdot 0+\frac{\partial U}{\partial\eta}\cdot 0+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}\cdot 1=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}, \qquad (3)$$

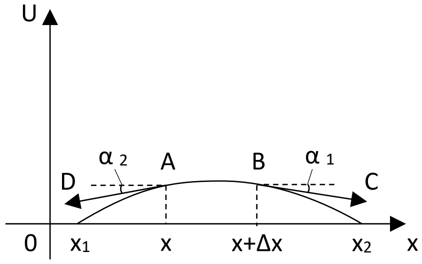
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\cdot a^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot(-a^2)+\frac{\partial U}{\partial\xi}\cdot 0+\frac{\partial U}{\partial\eta}\cdot 0+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}\cdot a^2=$$

$$=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}+a^2\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} \qquad (4)$$

3. Математическая модель малых колебаний струны

Струна – тонкая нить, не сопротивляющаяся изгибу, причем:

1) силы натяжения струны направлены по касательной к ней;
2) колебания происходят только в одной плоскости и вектор смещения перпендикулярен оси OX;
3) рассматриваем малые колебания, т.е. если α – угол между касательной и осью OX, то $\alpha^2\approx 0$;
4) струна однородна, т.е. линейная плотность $\rho=const$.



Пусть струна закреплена в точках x_1 и x_2, т.е. $[x_1;\ x_2]$ – натянутая струна. Поставим задачу описать колебательный процесс, т.е. найти функцию $U(x;\ t)$, $x\in[x_1;\ x_2]$, $t>0$ (t – время), которая бы определяла отклонение каждой точки струны от положения равновесия в произвольный момент времени t. Если зафиксировать x, то $U(x;\ t)$ будет описывать закон движения этой точки и $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ – ускорение, с которым движется точка. Возьмем на струне точки A и B, т.е. рассмотрим элемент струны $[x;\ x+\Delta x]$. Докажем, что силы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ по величине постоянны и равны. Для этого найдем сумму проекций этих сил на ось OX. В нашей модели эта сумма должна равняться нулю, т.к. вектор смещения перпендикулярен оси OX (см. рисунок).

$\text{Пр}_{OX}\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\alpha_1$; $\qquad \text{Пр}_{OX}\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos\alpha_2$.

По доказанному в пункте 1 $\cos\alpha_1 \approx \cos\alpha_2 \approx 1$, тогда

$\text{Пр}_{OX}\overrightarrow{BC} + \text{Пр}_{OX}\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\alpha_1 - \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos\alpha_2 = \left|\overrightarrow{BC}\right| - \left|\overrightarrow{AD}\right| = 0$,

т.е $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = T$.

Для определения функции $U(x;\ t)$ найдем сумму проекций сил $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ на оси OU :

$$\begin{aligned} \text{Пр}_{OX}\overrightarrow{BC} &= T \cdot \sin\alpha_1 = T \cdot tg\,\alpha_1 = T \cdot \frac{\partial U(x+\Delta x;\ t)}{\partial x} , \\ \text{Пр}_{OX}\overrightarrow{AD} &= -T \cdot \sin\alpha_2 = -T \cdot tg\,\alpha_2 = -T \cdot \frac{\partial U(x;\ t)}{\partial x} . \end{aligned} \qquad (1)$$

Воспользуемся принципом Даламбера, из которого следует, что главный вектор системы сил равен произведению массы системы на ускорение, с которым она движется, тогда из (1) получаем:

$$T \cdot \left(\frac{\partial U(x+\Delta x;\ t)}{\partial x} - \frac{\partial U(x;\ t)}{\partial x}\right) = m \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} . \qquad (2)$$

В (2) $= \rho \cdot \Delta x$, где ρ – линейная плотность струны, а Δx – длина элемента струны $[x;\ x+\Delta x]$. К левой части (2) применим теорему Лагранжа о среднем:

$$T \cdot \frac{\partial^2 U(\text{c};\ t)}{\partial x^2} \cdot \Delta x = \rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} , \qquad (3)$$

где $c \in (x;\ x+\Delta x)$. Если $\Delta x \to 0$, то $c \to x$, тогда из (3) получим:

$T \cdot \frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ $\qquad$ или $\qquad \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$.

Так как $\frac{T}{\rho} > 0$, то $\frac{T}{\rho} = a^2$. Окончательно:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} . \qquad (4)$$

Контрольные вопросы

1. Перечислите вспомогательные утверждения.
2. Как проводится замена переменных?
3. Формула математической модели малых колебаний струны.

Рекомендованная литература [9,12,15].

Лекция №16.
Граничные условия. Бесконечная струна.

1) Начальные условия.
2) Краевые условия.
3) Бесконечная струна. Метод Даламбера.

Уравнение (4) называется уравнением колебания струны. Этому уравнению удовлетворяет бесконечное множество функций. Из этого множества нужно выбрать функцию, удовлетворяющую условиям:

$$U(x_1;\ t) = U(x_2;\ t) = 0 \tag{5}$$

Условия (5) называются краевыми и означают, что струна закреплена в точках x_1 и x_2 .

$$\begin{cases} U(x;\ 0) = f(x) \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x) \end{cases} \tag{6}$$

Условия (6) называются начальными условиями, где $f(x)$ задает форму струны в начальный момент времени, а $F(x)$ задает скорость движения точек струны в начальный момент времени. Условий (5) и (6) необходимо и достаточно, чтобы функция, описывающая колебания струны и удовлетворяющая уравнению (4), существовала и была бы единственной.

4. Бесконечная струна

Пусть $f(x)$, $F(x) \in C^{(1)}$. Устремим точки x_1 и x_2 на бесконечность, тогда условия (5) исчезнут и задача о малых колебаниях бесконечной струны сведется к отысканию решения уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\begin{cases} U(x;\ 0) = f(x) \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x) \end{cases} \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2).

Зададимся новыми переменными $\begin{cases} \xi = x + ay \\ \eta = x - ay \end{cases}$ где $a = const$.

На основании равенств (3) и (4) из главы 2 уравнение (1) запишется так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot a^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot a^2 + 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot a^2 ,$$

или $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$.

Последнее уравнение можно записать $\dfrac{\partial}{\partial \xi} \cdot \left(\dfrac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0$, т.е. $\dfrac{\partial U}{\partial \eta}$ является функцией одной переменной η. Обозначим $\dfrac{\partial U}{\partial \eta} = \varphi'(\eta)$, тогда $U = \varphi(\eta) + \psi(\xi)$.

Вывод: любая функция $U=\varphi(\eta)+\psi(\xi)$ удовлетворяет уравнению (1), где $\varphi,\psi\in C^{(1)}$.

Тогда $\frac{\partial U}{\partial t}=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at)$.

Воспользуемся начальными условиями (2), тогда

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x)+\psi(x) \\ F(x)=-a\varphi'(x)+a\psi'(x) \end{cases} \tag{3}$$

Проинтегрировав второе уравнение системы (3), получим:

$$\int_0^x F(y)dy=-a\varphi(x)+a\psi(x)+C\ , \quad \text{где } C=const$$

Система (3) примет вид:

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x)+\psi(x) \\ \frac{1}{a}\int_0^x F(y)dy-\frac{C}{a}=-\varphi(x)+\psi(x) \end{cases} \tag{4}$$

Решаем систему (4) относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy-\frac{C}{2a}=\psi(x)\ ,$$

$$\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy+\frac{C}{2a}=\varphi(x)\ .$$

$$\text{Тогда}\quad \begin{cases} \varphi(x-at)=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} F(y)dy+\frac{C}{2a}\ , \\ \psi(x+at)\ =\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} F(y)dy-\frac{C}{2a}\ . \end{cases}$$

$$U(x;\ t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at} F(y)dy-\int_0^{x-at} F(y)dy\right).$$

Используя свойство определенного интеграла, можем последнее равенство записать:

$$U(x;\ t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(y)dy\ . \tag{5}$$

Формула (5) называется формулой Даламбера и определяет решение задачи о малых колебаниях бесконечной струны.

Рассмотрим пример.

Методом Даламбера найти уравнение $U(x;\ t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ форма струны и скорость точки струны с абсциссой x определяются соответственно заданными функциями:

$$U\big|_{t_0=0} = x(2-x)\,; \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t_0=0} = e^{-x}$$

Решение. Применим формулу Даламбера

$$U(x;\ t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(y)dy\,.$$

В данной задаче $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$; $F(x) = e^{-x}$.

$$U(x;\ t) = \frac{2(x-at)-(x-at)^2+2(x+at)-(x+at)^2}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} e^{-y}dy =$$

$$= \frac{1}{2}(2x-2at-x^2+2axt-a^2t^2+2x+2at-x^2-2axt-a^2t^2) -$$

$$-\frac{1}{2a}e^{-y}\left|\begin{matrix} x+at \\ x-at \end{matrix}\right. = 2x - x^2 - a^2t^2 - \frac{1}{2a}(e^{-x+at} - e^{-x-at}) =$$

$$= x(2-x) - a^2t^2 + \frac{e^{-x+at} - e^{-x-at}}{2a}\ .$$

Ответ: $U(x;\ t) = x(2-x) - a^2t^2 + \frac{e^{-x+at} - e^{-x-at}}{2a}$ окончательный.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте начальные условия краевой задачи.
2. Сформулируйте краевые условия задачи.
3. Выведите формулу Даламбера.

Рекомендованная литература [2,4,9,10].

Лекция №17.
Понятие устойчивости решения краевой задачи. Метод Фурье.

1)Понятие устойчивости решения краевой задачи.

2)Метод Фурье.

Процесс малых колебаний струны описывается функцией $U(x;\ t)$, $x \in [x_1;\ x_2]$, удовлетворяющей:

1) уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\ ; \qquad (1)$$

2) краевым условиям

$$U(x_1;\ t) = U(x_2;\ t) = 0\ ; \qquad (2)$$

3) начальным условиям

$$\begin{cases} U(x;\ 0) = f(x) \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x) \end{cases} \tag{3}$$

Для бесконечной струны краевые условия (2) отсутствуют, и решение имеет вид:

$$U(x;\ t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(y)dy\ , \tag{4}$$

где $f(x) \in C^{(2)}$, $F(x) \in C^{(1)}$. При выполнении последних условий решение (4) существует и единственно. Покажем, что решение (4) устойчиво.

Пусть $f_n(x)$ и $F_n(x)$ являются равномерными приближениями функций $f(x)$ и $F(x)$, т.е. выполняются неравенства

$$|f(x) - f_n(x)| < \delta\ ; \quad |F(x) - F_n(x)| < \delta\ ,\ \ \forall\, x \in [x_1;\ x_2]\ .$$

Подставим $f_n(x)$ и $F_n(x)$ в (4)

$$U(x;\ t) = \frac{f_n(x-at)+f_n(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F_n(y)dy\ , \tag{5}$$

Далее воспользуемся известными теоремами:

1) $|x+y+z| < |x| + |y| + |z|$;

2) если $f(x) \ge \varphi(x)$, $\forall\, x \in [a;\ b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b \varphi(x)dx$;

3) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Вычтем (5) из (4):

$$|U(x;\ t) - U_n(x;\ t)| \le \frac{|f(x-at) - f_n(x-at)|}{2} + \frac{|f(x+at) - f_n(x+at)|}{2} + $$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} |F(y) - F_n(y)|dy\ \ ;$$

$$|U(x;\ t) - U_n(x;\ t)| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\cdot\delta\int\limits_{x-at}^{x+at} dy = \delta + \frac{1}{2a}\cdot\delta y\,\Big|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= \delta + \frac{1}{2a}\cdot\delta(x+at-x+at) = \delta(1+t)\ .$$

Таким образом

$$|U(x;\ t) - U_n(x;\ t)| \le \delta(1+t)\ . \tag{6}$$

Рассмотрим конечный интервал времени $t \in [0;\ t_0]$, тогда из (6) следует, что если мало изменять начальные условия, то мало изменится решение $U(x;\ t)$, т.е. оно устойчиво.

Определение 1. Задача математической физики корректна, если она:

1) разрешима;

2) имеет единственное решение;

3) решение устойчиво.

Рассмотрим пример некорректной задачи.

Пусть $Z = \frac{df}{dx}$. Пусть $\tilde{Z}$ и $\tilde{f}$ являются приближенными значениями функций Z и f.

Пусть $\tilde{f} = f(x) + \delta\, cos\, \omega x$, тогда

$$max\left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| = \delta \ , \tag{1}$$

$\tilde{Z} = f'(x) + \delta\omega\, sin\, \omega x$, а

$$max\left|Z(x) - \tilde{Z}(x)\right| = \omega\delta \ , \tag{2}$$

Из (1) и (2) делаем вывод, что точность приближения функции $f(x)$ можно сделать сколь угодно малой, но из этого не следует малая точность приближения производной этой функции. Это происходит из-за некорректности данной задачи в равномерной метрике.

6. Метод фурье

Поставим задачу найти функцию $U(x;\, t)$, $x \in [0;\, t]$, $t > 0)$, удовлетворяющую:

1) уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ ; \tag{1}$$

2) краевым условиям

$$U(0;\, t) = U(l;\, t) = 0 \ ; \tag{2}$$

3) начальным условиям

$$\begin{cases} U(x;\, 0) = f(x) \\ \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x) \end{cases} \tag{3}$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде: $U(x;\, t) = X(x) \cdot T(t)$,

тогда $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t)$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t)$.

Подставим значения $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ в уравнение (1):

$$X \cdot T'' = a^2 \cdot X'' \cdot T \ ; \quad \text{или} \quad \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} \, . \tag{4}$$

В уравнении (4) левая часть есть функция от t , а правая часть – функция от x , тогда, понятно, что:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = C \ , \tag{5}$$

где $C = const$.

Из (5) следует, что функции $X(x)$ и $T(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$X'' - CX = 0 \, , \tag{6}$$

$$T'' = Ca^2 T = 0 \, . \tag{7}$$

Воспользуемся краевыми условиями (2):

$$U(0;\, t) = U(l;\, t) = X(0) \cdot T(t) = X(l) \cdot T(t) = 0 \, .$$

Из последнего равенства вытекает

$$X(0) = X(l) = 0 \ . \tag{8}$$

Решим уравнение (6) при условиях (8) (задача Штурма-Лиувилля):

а) Пусть $C = \lambda^2$, тогда уравнение (6) примет вид $X'' - \lambda^2 X = 0$. Характеристическое уравнение $r^2 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = \pm\lambda$, а решение имеет вид $X = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$. Используем условия (8):

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} \end{cases} \tag{9}$$

Так как определитель однородной системы (9) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix} \neq 0$, то эта система имеет единственное нулевое решение $C_1 = C_2 = 0$.

Вывод: нельзя полагать $C = \lambda^2$.

б) Пусть $C = 0$, тогда $X'' = 0$; $r^2 = 0$; $r_{1,2} = 0$.

Решение имеет вид $X = C_1 + C_2 x$. Используем условия (8):

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_1 + C_2 C \end{cases}$$

Решив последнюю систему, найдем $C_1 = C_2 = 0$.

Вывод: нельзя полагать $C = 0$.

в) Пусть $C = -\lambda^2$. Уравнение (6) примет вид $X'' + \lambda^2 X = 0$. Характеристическое уравнение $r^2 + \lambda^2 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = \pm\lambda i$, а решение имеет вид $X = C_1 cos\,\lambda x + C_2 sin\,\lambda x$. Используя условия (8), получим:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_1 cos\,\lambda l + C_2 sin\,\lambda l \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 sin\,\lambda l = 0 \end{cases}$$

Так как $C_2 \neq 0$, второе уравнение системы можно записать: $sin\,\lambda l = 0.$ Решив это уравнение , получим $\lambda l = k\pi$; $\lambda = \frac{k\pi}{l}$; $k \in Z$. Таким образом, множество функций $X_k = C_k \frac{k\pi x}{l}$ удовлетворяют уравнению (6) и условиям (8).

Из уравнения (7) найдем $T(t)$. Так как $C = -\lambda^2$, уравнение (7) примет вид $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$; или $T'' + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \cdot T = 0$. Решение последнего уравнения имеет вид:

$$T = A_k cos\,\frac{k\pi at}{l} + B_k sin\,\frac{k\pi at}{l} \ , \quad k \in Z \, .$$

Теперь можем составить систему функций $U_k(x;\ t)$:

$$U_k(x;\ t) = \left(A_k cos\,\frac{k\pi at}{l} + B_k sin\,\frac{k\pi at}{l}\right) \cdot C_k sin\,\frac{k\pi x}{l} \, .$$

Введем обозначения: $A_k \cdot C_k = a_k$, $B_k \cdot C_k = b_k$, тогда

$$U_k(x;\ t) = \left(a_k cos\,\frac{k\pi at}{l} + b_k sin\,\frac{k\pi at}{l}\right) \cdot sin\,\frac{k\pi x}{l} \ ; \quad k \in Z \tag{10}$$

Любая функция вида (9) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2). Подберем a_k и b_k так, чтобы система функций (10) удовлетворяла условиям (3). Так как уравнение (1) однородное и линейное, то функция

$$U(x;\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x;\ t)$$

будет удовлетворять уравнению (1), если этот ряд можно почленно дифференцировать. Значит

$$U(x;\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\ \frac{k\pi at}{l} + b_k sin\ \frac{k\pi at}{l}\right)\cdot sin\frac{k\pi x}{l}\,. \qquad (11)$$

Найдем

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-a_k\frac{k\pi a}{l}\ sin\frac{k\pi at}{l} + b_k\frac{k\pi a}{l}\ cos\frac{k\pi at}{l}\right)\cdot sin\frac{k\pi x}{l}\,. \qquad (12)$$

Воспользуемся первым равенством из условий (3):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\ sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (13)$$

Воспользуемся вторым равенством из условий (3):

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\ \frac{k\pi a}{l}\ sin\frac{k\pi x}{l}\ \ . \qquad (14)$$

Если функция $f(x)$ такова, что в интервале $(0;\ l)$ ее можно разложить в ряд Фурье, то условие (13) будет выполняться, если

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\ sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

Из условия (14) коэффициент

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\ sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

Окончательно: решение задачи (1), (2), (3)

$$U(x;\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\ \frac{k\pi at}{l} + b_k sin\ \frac{k\pi at}{l}\right)\cdot sin\frac{k\pi x}{l}\,,$$

где $\quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\ sin\frac{k\pi x}{l}dx$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\ sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте метод Фурье.
2. Выведите условия устойчивости решения краевой задачи.

Рекомендованная литература [8,12,13,15,16].

Список литературы

1. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., стер. – М. : Высш. школа, 2005. – 479 с.

3. Бородин, А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие / А.Н. Бородин. – 7-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2008. – 256 с.

4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М. : Высш. школа, 2004. – 404 с.

5. Емельянов, Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. – 2-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2007. – 336 с.

6. Белько, И.В. Теория вероятнгостей и математическая статистика. Примеры и задачи: учеб. пособие / И.В. Белько, Г.П. Свирид ; под ред. К.К. Кузьмича. – Минск: Новое знание, 2002. – 250 с.

7. Альсведе Р., Вегенер И. Задачи поиска. – М.: "Мир", 1982. – 368 с.

8. Бернацкий Ф.И. Планирование экспериментов в инженерных исследованиях. – Владивосток: 1986. – 45 с.

9. Бормотов М.Ю., Гуров А.Г., Корунов С.С., Кукушкин С.Н. Экспертные методы прогнозирования. – М.: МАИ, 1985. – 60 с.

10. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.:

11. Наука, 1980. – 520 с.

12. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

13. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.

14. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. – ФКП. – М.:Наука, 1982.

15. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. – М.:Наука, 1986.

16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М. : Наука, 1985 –Т 2.

Учебное издание

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»
для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили «Экономика и управление», «Электроснабжение», «Информационные технологии и системы», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Профессиональная психология», «Управление персоналом», направления подготовки Электроэнергетика и электротехника, профиль «Электроснабжение»

С о с т а в и т е л ь:
Александр Павлович Волков

Печатается в авторской редакции.
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать ______________
Формат 60x84$^{1}/_{16}$. Бумага типограф. Гарнитура Times
Печать офсетная. Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _______
Тираж 100 экз. Изд. №______. Заказ №______. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного
университета имени Владимира Даля

Свидетельство о государственной регистрации издательства
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015г.

Адрес издательства: 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60
E-mail: izdat.lguv.dal@gmail.com **http:** //izdat.dahluniver.ru/