

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

СТАХАНОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ФИЛИАЛ)

ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

КАФЕДРА ОБЩЕИНЖЕНЕРНЫХ ДИСЦИПЛИН

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ  
по дисциплине**

**«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»**

**для студентов направления подготовки**

**Профессиональное обучение (по отраслям),**

профили «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение»,  
«Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Под-  
земная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханиче-  
ское оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и  
руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» (в  
2-х частях).

**Часть 2.1. Сопротивление материалов**

**Конспект лекций по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика»** для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» (в 2-х частях). **Часть 2.1. Соппротивление материалов.** /Сост.: В.И. Сафонов. – **Стаханов:** ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», 2023. – 70 с.

В конспекте лекций изложены основные разделы дисциплины «Соппротивление материалов» курса «Теоретическая и прикладная механика». Для иллюстрации изложенного теоретического материала приведены многочисленные примеры задач с решениями. Для контроля усвоения материала представлены контрольные вопросы, которые делают конспект полезным при самостоятельном изучении дисциплины.

Предназначены для студентов профиля «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело».

Составитель: доц. Сафонов В.И.

Ответственный за выпуск: доц. Сафонов В.И.

Рецензент: доц. Петров А.Г.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.....	6
1 ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ.....	8
2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	9
2.1 Площадь поперечного сечения.....	10
2.2 Центр тяжести площади.....	10
2.3 Статические моменты плоскостей сечений.....	11
2.4 Моменты инерции плоских сечений.....	12
2.5 Моменты инерции относительно параллельных осей.....	13
2.6 Зависимости между моментами инерции при повороте координатных осей.....	13
2.7 Главные оси инерции. Главные моменты инерции.....	14
2.8 Алгоритм определения главных центральных моментов инерции.....	15
2.9 Понятие о радиусе инерции.....	15
2.10 Момент сопротивления.....	16
Проверь свои знания!.....	20
Литература.....	21
3 МЕТОД СЕЧЕНИЙ. НАПРЯЖЕНИЕ.....	21
3.1 Внутренние силы. Метод сечений.....	21
3.2 Механические напряжения.....	23
Проверь свои знания!.....	23
Литература.....	23
4 МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ.....	23
4.1 Испытание материалов на растяжение.....	24
4.2 Характеристики прочности материала.....	24
4.3 Испытание материалов.....	26
4.4 Влияние температуры на механические характеристики материалов.....	27
4.5 Рассеяние механических характеристик материалов.....	29
Проверь свои знания!.....	29
Литература.....	29
5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ.....	29
5.1 Напряжение в точке.....	29
5.2 Главные площадки и главное напряжение.....	30
Проверь свои знания!.....	31
Литература.....	31
6 КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ.....	31
6.1 Задачи теорий прочности.....	31
6.2 Классические критерии прочности (теории прочности).....	32
Проверь свои знания!.....	35
Литература.....	35
7 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.....	35
7.1 Продольная сила.....	35
7.2 Деформации и напряжение при растяжении и сжатии.....	36

7.3 Закон Гука.....	38
7.4 Допустимые напряжения.....	41
7.5 Коэффициент запаса прочности при растяжения и сжатия.....	42
7.6 Расчеты на прочность при растяжении и сжатии.....	43
7.7 Учет собственного веса стержня.....	49
7.8 Статически неопределенные системы.....	52
7.9 Температурные и монтажные напряжения.....	55
Проверь свои знания!.....	59
Литература.....	60
8 СДВИГ И СМЯТИЕ.....	60
8.1 Сдвиг.....	60
8.2 Смятие.....	63
Проверь свои знания!.....	68
Литература.....	68
Литература.....	69

Главный конструктор – это человек, который должен на основании сомнительных расчетов, сделанных на базе туманных предположений, вытекающих из спорных оценок, заимствованных из бессодержательных документов, являющихся, в свою очередь, результатом неточных исследований, уметь принять единственно правильное решение и, что самое главное, убедить в правильности этого решения заказчика.

М.С. Рязанский, конструктор систем управления

Чем дальше от доски конструктора обнаруживается ненадежность, тем она дороже обходится.

А.Н. Туполев, авиаконструктор

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебная дисциплина «Сопротивление материалов» является составляющей курса «Прикладная механика», который является традиционным и одним из старых курсов общепрофессиональной подготовки в высших учебных заведениях. По общему признанию ему принадлежит ведущая роль в формировании языка общения инженеров разных специальностей.

**«Сопротивление материалов» (СМ)** – наука об инженерных методах расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и деталей машин.

В отличие от теоретической механики, в которой все тела рассматриваются как абсолютно твердые (то есть недеформирующиеся ни при каких условиях), в СМ учитывается, что элементы конструкций при действии внешних сил меняют свою форму и размеры, то есть деформируются.

**Задача науки «Сопротивление материалов»** – разработка простых и эффективных методов расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

При проведении расчетов необходимо объединять надежность работы сооружения с его экономичностью, получать необходимые прочность, жесткость и устойчивость при наименьшей затрате материала.

В СМ широко применяются методы теоретической механики (в первую очередь статики) и математического анализа, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов.

СМ является экспериментально-теоретической наукой, поскольку она широко использует опытные данные и теоретические исследования.

Начало науки о СМ связывают по обыкновению с именем знаменитого физика, математика и астронома Галилео Галилея (1564... 1642), который в работе, которая опубликована в 1638 году, дал решение некоторых важных задач динамики и СМ.

В 1660 году Р. Гук сформулировал закон, который устанавливает связь между нагрузкой и деформацией и имеет исключительно важное значение для СМ. Развитию этой науки в 18-м веке содействовали успехи высшей математики и механики; особенно большое значение имели работы Л. Эйлера.

Содержание курса непрерывно меняется в связи с развитием техники и на-

учных исследований. Распространение компьютеров содействовало математизации и уточнению инженерных методов расчетов, изменению вида проектирования и производства машин и механизмов. Оптимизация конструкций и технологий стало обязательным этапом в их создании.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Курс СМ в своей основе опирается на основные понятия курса «Теоретическая механика». Однако надо ввести и новые понятия, которые связаны с тем, что в СМ изучаются тела, которые не являются абсолютно жесткими (то есть – которые деформируются).

**Деформация** – способность конструкции, ее элементов и деталей менять свои геометрические размеры или форму под действием нагрузки.

Если после снятия нагрузки тело приобретает первичную форму и размеры, то такое явление называется упругостью.

**Упругость** – свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешних нагрузок.

Деформации тела, которые исчезают после снятия нагрузки, называются упругими. Если после снятия нагрузок тело не полностью приобретает первичную форму и размеры, то есть получает остаточные деформации, то это явление называется пластичностью.

**Пластичность** – свойство тела сохранять деформацию, полученную в результате действия нагрузки, после прекращения ее действия.

**Ползучесть** – свойство тела увеличивать деформацию при постоянных внешних нагрузках.

**Прочность** – способность конструкций, ее элементов и деталей выдерживать приложенную нагрузку, не разрушаясь.

**Жесткость** – способность конструкции, ее элементов и деталей оказывать сопротивление деформированию (изменению формы и размеров).

**Устойчивость** – способность конструкции, ее элементов и деталей сохранять под действием нагрузки первоначальную форму упругого равновесия.

**Перемещение** – изменение положения тела или его отдельных частей в пространстве.

**Надежность** – свойство конструкции выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных нормативных границах на протяжении заданного промежутка времени.

**Ресурс** – допустимый срок службы конструкции, ее элементов и деталей, на протяжении которого выполняются заданные функции и при этом сохраняются эксплуатационные показатели в определенных нормативных границах.

**Отказ** – нарушение работоспособности конструкции и невозможность выполнять заданные функции, сохраняя эксплуатационные показатели в определенных нормативных границах.

**Прочностная надежность** – отсутствие отказов, связанных с разрушением или недопустимыми деформациями элементов конструкции.

Ниже на схеме приведена структура модели прочностной надежности. Она

базируется на известных моделях или ограничениях, которые априори накладываются на свойство материалов, геометрию, форму деталей, способ нагружения и модель разрушения. Инженерные модели сплошной среды рассматривают материал как сплошное и однородное тело, наделенное свойством однородности структуры. Модель материала наделяется свойствами упругости, пластичности и ползучести.



Основными моделями формы в моделях прочностной надежности являются стержни, пластины, оболочки или пространственные тела.

Модели нагружения предусматривают систематизацию внешних нагрузок по величине, по характеру действия (постоянные, временные, динамические и другие), по характеру распределения (сосредоточенные, распределенные), а также по действию внешних полей и сред.

**Брус** – тело, два измерения которого малы в сравнении с третьим измерением (длиной). Линия, которая совмещает центры тяжести сечений бруса, называется его осью. В зависимости от формы оси различают прямые и кривые брусья. Брусья бывают постоянного и переменного сечения, сплошные и несплошные, с открытым и закрытым профилем поперечного сечения.

**Оболочка** – тело, длина и ширина которого значительно больше его толщины.

**Массивное тело** – тело, все размеры которого одного порядка.

**Расчетная схема** – реальный объект, лишенный несущественных особенностей. С геометрической точки зрения все объекты рассматриваются как комбинация брусьев (стержней), оболочек и массивных тел.

Нагрузки, которые действуют на конструкцию, являются по отношению к ней внешними силами. Эти силы приложены к тому или другому элементу конструкции по некоторым участкам его поверхности или распределены по его объему.

При составлении расчетных схем нагрузки, приложенные к участкам, размеры которых значительно меньше размеров объекта, заменяются сосредоточенной силой.

Пара сил, приложенная к объекту, рассматривается как сосредоточенный момент.

Нагрузки, приложенные к участкам, размеры которых одного порядка с размерами объекта, полагаются распределенными по длине.

К внешним силам, которые действуют на элементы конструкции, кроме нагрузок (активных сил) относятся также реакции связей – реактивные силы.

Нагрузки различаются не только по способу действия (распределенные и сосредоточенные), но также по продолжительности действия (постоянные и временные) и характеру действия на конструкцию (статические и динамические).

## 1 ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ

В основе СМ лежит ряд гипотез и допущений, которые позволяют упростить решение поставленных задач. Ниже приведены допущения, которые затрагивают как тела, которые рассматриваются, так и материалы, из которых они изготавливаются.

Наука о СМ опирается на законы теоретической механики, в которой тела полагаются абсолютно жесткими, то есть не способными деформироваться. В СМ будут применяться условия равновесия статики для определения реакций связей деформированных тел, а также для определения внутренних сил, которые и приводят к деформации этих тел. Однако, при расчетах на прочность и жесткость надо учитывать следующие правила: внешние силы, которые действуют на тело, нельзя заменять их равнодействующей или эквивалентной системой сил; силу нельзя переносить вдоль линии ее действия; пару сил нельзя перемещать в плоскости ее действия.

Эти правила имеют исключение. Так, например, силы, которые приложены к небольшой поверхности тела, как и в теоретической механике, полагаются сосредоточенными, то есть приложенными в точке; распределенные реактивные силы, приложенные к заземленному концу балки, можно заменять реактивной силой и реактивным моментом. Такие замены не вносят существенных изменений в условия деформации тела. Это положение носит название принципа смягченных предельных условий или принципа Сен-Венана, который можно сформулировать таким образом: в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних сил, модуль внутренних сил весьма мало зависит от конкретного способа приложения этих сил. В дальнейшем при изучении отдельных видов деформаций на основании принципа Сен-Венана полагается, что в месте приложения внешних сил внутренние силы меняются скачкообразно.

Конструкционные материалы, из которых изготавливаются детали машин и сооружений, не являются, строго говоря, непрерывными, однородными во всех точках и изотропными из-за внутренних дефектов, например раковин, трещин и неоднородностей структуры в литых и штампованных деталях, первичных внутренних усилий, которые вызываются неравномерностью охлаждения литых и кованых деталей, неравномерностью высыхания и неоднородностью дерева, неравномерностью твердения и неоднородностью бетона и так далее. Поскольку закономерности возникновения указанных явлений установить невозможно, то в СМ объектом изучения является не само реальное тело, а его *приближенная модель*, которая строится с учетом ряда гипотез и допущений, которые приведены ниже.

1. Гипотеза об отсутствии первичных внутренних усилий: предполагается, что если нет причин, которые вызывают деформацию тела (нагрузка, изменение температуры), то во всех его точках внутренние усилия равняются нулю. Таким образом, не принимаются во внимание силы взаимодействия между частицами ненагруженного тела.

2. Допущение об однородности материала: материал тела, которое деформируется, является однородным, то есть не содержит никаких включений, которые меняют его физико-механические свойства в любом сколько угодно малом



объеме.

3. Допущение о непрерывности материала: материал любого тела имеет непрерывное строение и является сплошной средой. Это допущение позволяет применять при расчетах методы высшей математики (дифференциальное и интегральное исчисления).

4. Допущение об изотропности материала: материал тела имеет во всех направлениях одинаковые свойства.

Материалы, которые имеют неодинаковые свойства в разных направлениях, называются анизотропными (например, дерево).

5. Допущение об идеальной упругости: материал имеет идеальную упругость, то есть после снятия нагрузки деформации полностью исчезают. Свойство идеальной упругости определяется физической взаимозависимостью, которую описывает закон Гука: перемещение точек упругого тела в известных границах нагрузки прямо пропорциональны силам, которые вызывают эти перемещения (иначе: упругая деформация пропорциональна нагрузке).

Ниже приведены *гипотезы и допущения*, связанные с деформациями элементов конструкций – изменением линейных и угловых размеров тела, а также изменением положения (координат) точек тела, вызванные деформацией.

1. Допущение о малости перемещений, или принцип неизменности начальных размеров: изменение линейных размеров при нагрузке существенно меньше начальных размеров, то есть перемещение точек тела, которые обусловлены его упругими деформациями, малы в сравнении с размерами тела.

2. Допущение о линейной деформации тел: перемещение точек и сечений упругого тела в известных границах нагрузки прямо пропорциональны силам, которые вызывают эти перемещения.

3. Гипотеза плоских сечений, или гипотеза Бернулли: плоские поперечные сечения, проведенные в теле к оси деформации, остаются при деформации плоскими и нормальными к оси. Эта гипотеза была впервые высказанная швейцарским ученым Якобом Бернулли (1654...1705) и положена в основу изучения большинства основных деформаций бруса.

4. Принцип Сен-Венана: в сечениях, достаточно удаленных от места приложения нагрузки, напряженно-деформированное состояние не зависит от способа приложения нагрузки. На основании этого принципа при расчетах распределенную нагрузку иногда можно заменять сосредоточенной силой.

5. Принцип независимости действия сил или принцип суперпозиции: для линейно деформированных систем (то есть в рамках закона Гука) результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равняется сумме результатов действия каждой из сил отдельно.

## **2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ**

Есть несколько геометрических характеристик плоских сечений, например, площадь сечения, место положения центра тяжести, моменты инерции, момент сопротивления и т.п., которые используются в прочностных расчетах.

## 2.1 Площадь поперечного сечения

Площадь поперечного сечения является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения. Она также фигурирует в расчетах напряжения, которое возникает в поперечных сечениях стержня, а также его прочности и жесткости.

Значение площади сечений простой формы (прямоугольник, квадрат, треугольник, трапеция, ромб, круг и другие) вычисляется по простым формулам, которые известны из курса геометрии.

Для вычисления площади сечения любой формы ее разделяют на бесконечное число элементарных площадок  $df$ . Тогда площадь всего сечения можно вычислить как интегральную сумму этих элементарных площадок по формуле  $F = \int df$ .

Основная единица измерения площади поперечного сечения –  $m^2$ .

## 2.2 Центр тяжести площади.

Из курса «Теоретическая механика» известно, что центр тяжести тела – это точка, в которой сосредоточенный вес всего тела. Центр тяжести площади – это точка, которая является геометрическим центром площади. Если через эту точку провести любую прямую линию, то она всегда будет разделять площадь на две равновеликих (по площади) части.

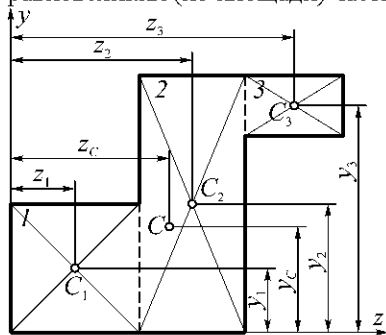


Рис. 2.1.

В качестве примера на рис. 2.1 приведено поперечное сечение сложной формы, которое можно разделить на три простых составляющих части – прямоугольники 1, 2 и 3 с площадью соответственно  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ . Центры тяжести этих прямоугольников обозначены как точки  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , а их координаты соответственно  $y_1; z_1$ ,  $y_2; z_2$  и  $y_3; z_3$ . Тогда координаты  $y_c$  и  $z_c$  центра тяжести всего сечения можно вычислить по формулам:

$$y_c = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3};$$

$$z_c = \frac{\sum F_k z_k}{\sum F_k} = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

**Пример 2.1.** Определить центр тяжести плоской фигуры, которая изображена на рис. 2.2. Размеры даны в миллиметрах.

Решение. Воспользуемся методом разделения на части. Разобьем фигуру на два прямоугольника, местоположения центров тяжести которых известны и находятся в точках  $C_1$  и  $C_2$  (см. рис. 2.2, а). Определим координаты центра тяжести каждой части:

$$x_{C1} = 30 \text{ мм}; y_{C1} = 15 \text{ мм};$$

$$x_{C2} = 80 \text{ мм}; y_{C2} = 25 \text{ мм}.$$

Определим площади частей:

$$S_{C1} = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ мм}^2;$$

$$S_{C2} = 40 \cdot 50 = 2000 \text{ мм}^2.$$

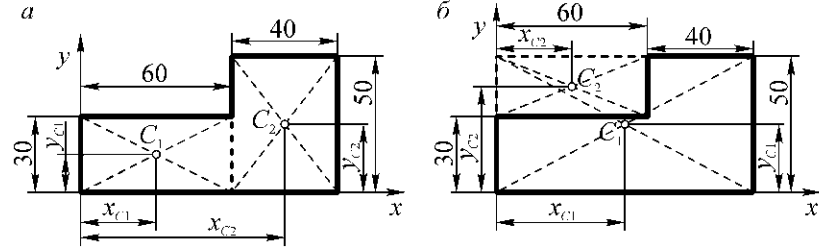


Рис. 2.2.

Тогда координаты центра тяжести всей фигуры будут:

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k} = \frac{30 \cdot 1800 + 80 \cdot 2000}{1800 + 2000} = 56,3 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{\sum y_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k} = \frac{15 \cdot 1800 + 25 \cdot 2000}{1800 + 2000} = 20,3 \text{ мм}.$$

Для решения этой задачи также воспользуемся методом отрицательных площадей. Разобьем фигуру на два прямоугольника с центрами тяжести в точках  $C_1$  и  $C_2$  (см. рис. 2.2, б). Определим координаты центра тяжести частей:

$$x_{C1} = 50 \text{ мм}; y_{C1} = 25 \text{ мм};$$

$$x_{C2} = 30 \text{ мм}; y_{C2} = 40 \text{ мм}.$$

Определим площади частей:

$$S_{C1} = 100 \cdot 50 = 5000 \text{ мм}^2;$$

$$S_{C2} = 20 \cdot 60 = 1200 \text{ мм}^2.$$

Тогда координаты центра тяжести всей фигуры будут:

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k} = \frac{50 \cdot 5000 + 30 \cdot (-1200)}{5000 + (-1200)} = 56,3 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{\sum y_k \Delta S_k}{\sum \Delta S_k} = \frac{25 \cdot 5000 + 40 \cdot (-1200)}{5000 + (-1200)} = 20,3 \text{ мм}.$$

*Прим.* В двух последних формулах площадь  $S_{C2}$  взята со знаком минус потому, что эта площадь «вырезана» (или «отнята») из площади  $S_{C1}$ .

### 2.3 Статические моменты плоскостей сечений.

**Статический момент** плоского сечения  $S$  относительно любой оси – это сумма произведений элементарных площадок  $df$ , которая взята по всей плоскости  $F$ , на их расстояния от рассматриваемой оси, то есть, относительно осей  $x$  и  $y$  (см. рис. 2.3) будем иметь:

$$S_X = \int y df,$$

$$S_Y = \int x df.$$

Основная единица измерения статического момента – единица длины в кубе ( $\text{м}^3$ ).

Из анализа двух последних формул вытекает, что статические моменты мо-

гут быть положительными, отрицательными и равняться нулю.

Если известны координаты центра тяжести  $Z_C$ ,  $Y_C$  и плоскость сечения  $F$ , то статические моменты плоскости сечения относительно осей  $x$  и  $y$  можно определить по формулам:

$$S_Z = FY_C;$$

$$S_Y = FZ_C.$$

Если оси проходят через центр тяжести сечения (то есть – центр осей находится в центре тяжести сечения), то такие оси называются *центральными осями*. При этом  $Z_C = 0$  и  $Y_C = 0$ , а моменты плоского сечения относительно таких осей равняются нулю, что следует из анализа двух последних формул.

Статические моменты сложного сечения равняются сумме статических моментов составных частей сечения, которые рассчитаны относительно тех же осей. Для сечения, приведенного на рис. 2.2 статические моменты  $S$  относительно осей  $y$  и  $z$  вычисляются по формулам:

$$S_Z = Fy_C = \sum f_k y_k = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3;$$

$$S_Y = Fz_C = \sum f_k z_k = F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3.$$

Если сложное сечение имеет вырезанные части (ослабления), то значение площадей вырезанных частей в формулы для вычисления центра веса и статических моментов подставляются с отрицательным знаком.

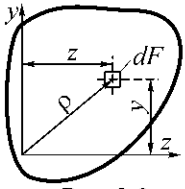


Рис. 2.3

## 2.4 Моменты инерции плоских сечений

**Осевой** (экваториальный) **момент инерции**  $I$  сечения относительно любой оси (рис. 2.3) – это сумма произведений элементарных площадок  $df$ , которая взята по всей его плоскости  $F$ , на квадраты расстояний их от рассматриваемой оси, то есть  $I_Z = \int y^2 df$ ,  $I_Y = \int z^2 df$ .

Основная единица измерения осевого момента инерции –  $m^4$ .

**Полярный момент инерции**  $I_P$  сечения относительно любой точки (рис. 2.3) – это сумма произведений элементарных площадок  $df$ , которая взята по всей его площади  $F$ , на квадраты расстояний их от рассматриваемой точки, то есть  $I_P = \int \rho^2 df$ .

Основная единица измерения полярного момента инерции –  $m^4$ .

**Центробежный момент инерции** относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей (рис. 2.3) – это сумма произведений элементарных площадок  $df$ , которая взята по всей его плоскости  $F$ , на их расстояния от рассматриваемых осей, то есть  $I_{ZY} = \int zy df$ .

Основная единица измерения центробежного момента инерции –  $m^4$ .

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительные. Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

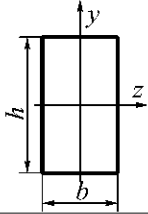
Моменты инерции сложных сечений определяются как сумма моментов составляющих простых частей, рассчитанных относительно рассматриваемых осей. Например, если сложное сечение можно разделить на  $n$  простых сечений, то момент инерции всего сложного сечения относительно осей  $z$  и  $y$  составит:

$$I_Z = I_{z1} + I_{z2} + \dots + I_{zk} + \dots + I_{zn} = \sum I_{zk};$$

$$I_Y = I_{Y1} + I_{Y2} + \dots + I_{Yk} + \dots + I_{Yn} = \sum I_{Yk}.$$

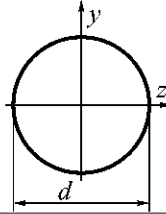
В эти формулы моменты инерции частей, которые вырезаны (ослабление сечения), подставляются с отрицательным знаком.

Ниже приведены формулы для расчетов моментов инерции некоторых сечений, которые являются простыми геометрическими фигурами.



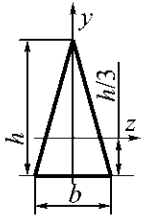
$$I_Z = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_Y = \frac{hb^3}{12}.$$



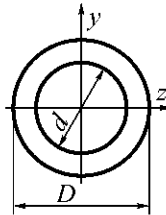
$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4;$$

$$I_Z = I_Y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4.$$



$$I_Z = \frac{bh^3}{36};$$

$$I_Y = \frac{hb^3}{48}.$$



$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4(1 - \alpha^4);$$

$$I_Z = I_Y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4),$$

где  $\alpha = \frac{d}{D}$ .

Для поперечных сечений стандартных прокатных профилей (тавры, двутавры, швеллеры и прочие) моменты инерции относительно любых осей и другие характеристики приведены в таблицах ГОСТ на прокатную сталь.

### 2.5 Моменты инерции относительно параллельных осей.

Пусть известны моменты инерции сечения относительно центральных осей  $z, y$  (см. рис. 2.4), которые равны соответственно

$$I_Z = \int y^2 dF; \quad I_Y = \int z^2 dF; \quad I_{ZY} = \int zydF.$$

Нужно определить моменты инерции относительно осей  $z_1$  и  $y_1$ , которые параллельны центральным осям:

$$I_{Z1} = \int y_1^2 dF; \quad I_{Y1} = \int z_1^2 dF;$$

$$I_{Z1Y1} = \int z_1y_1 dF.$$

Для этого в предпоследние формулы подставим значение  $y_1 = y + a$ ,  $z_1 = z + b$ , а потом выполним преобразование:

$$I_{Z1} = I_Z + a^2F; \quad I_{Y1} = I_Y + b^2F; \quad I_{Z1Y1} = I_{ZY} + abf.$$

*Прим.* Координаты  $a$  и  $b$  необходимо подставлять в формулы с учетом знаков.

### 2.6 Зависимости между моментами инерции при повороте координатных осей.

Пусть известны моменты инерции сечения относительно координатных осей  $z$  и  $y$  (см. рис. 2.5), которые равны соответственно

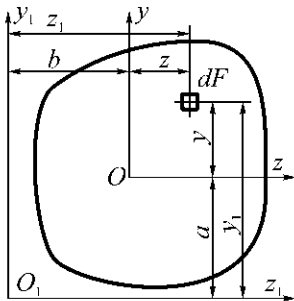


Рис. 2.4

$$I_Z = \int y^2 dF; \quad I_Y = \int z^2 dF; \quad I_{ZY} = \int yz dF.$$

Нужно определить моменты инерции относительно осей  $z_1$  и  $y_1$ , которые повёрнуты на угол  $\alpha$ :

$$I_{Z_1} = \int y_1^2 dF; \quad I_{Y_1} = \int z_1^2 dF; \quad I_{Z_1Y_1} = \int z_1 y_1 dF.$$

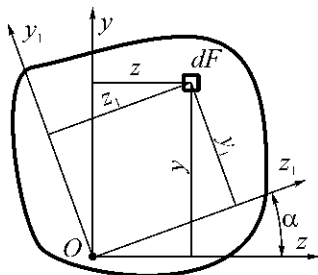


Рис. 2.5

Угол  $\alpha$  считается положительным при повороте осей против хода часовой стрелки.

Координаты элементарной площадки в новой системе координат  $z_1 O y_1$ , которые представлены через координаты  $z O y$  и угол  $\alpha$ , определяются по формулам:

$$y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha; \quad z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha.$$

Подставим последние значения  $y_1$  и  $z_1$  в предпоследние формулы, а потом выполним преобразование:

$$I_{Z_1} = I_Z \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{ZY} \sin 2\alpha;$$

$$I_{Y_1} = I_Y \cos^2 \alpha + I_Z \sin^2 \alpha + I_{ZY} \sin 2\alpha;$$

$$I_{Z_1Y_1} = \frac{I_Z - I_Y}{2} \sin 2\alpha + I_{ZY} \cos 2\alpha.$$

Сложим  $I_{Z_1}$  и  $I_{Y_1}$  и в результате получим:

$$I_{Z_1} + I_{Y_1} = I_Z + I_Y = I_P.$$

Таким образом, при повороте осей сумма осевых моментов инерции не меняется и равняется полярному моменту инерции относительно начала координат.

При повороте системы осей на угол  $\alpha = 90^\circ$  получим:

$$I_{Z_1} = I_{Y_1}; \quad I_{Y_1} = I_{Z_1}; \quad I_{Z_1Y_1} = -I_{ZY}.$$

## 2.7 Главные оси инерции. Главные моменты инерции.

Пусть оси  $z$  и  $y$  являются центральными (см. рис. 2.5). При повороте этих осей вокруг центра тяжести сечения  $O$  (начала координат) меняется угол  $\alpha$  относительно начального положения. При этом значение осевых моментов меняются, но их сумма остается постоянной.

Можно найти такое положение центральных осей, которые повёрнуты на угол  $\alpha_0$ , при котором относительно одной из осей момент инерции будет наибольшим  $I_{max}$ , а относительно другой – наименьшим  $I_{min}$ , а центробежный момент будет равен нулю.

*Центральные оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, а центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции. Моменты инерции относительно этих осей называются главными центральными моментами инерции.*

Если сечение имеет две (или больше) взаимно перпендикулярных осей симметрии, то эти оси являются главными центральными осями инерции. Таким способом отвечают сечения в форме прямоугольника, двутавра, круга и другие.

Если сечение имеет одну ось симметрии (швеллер, тавр), то эта ось является одной из главных центральных осей инерции, а другая ось проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно первой оси.

Значение главных центральных моментов инерции для этого случая определяются по формулам:

$$I_{Z_0} = I_Z \cos^2 \alpha_0 + I_Y \sin^2 \alpha_0 - I_{ZY} \sin 2\alpha_0;$$

$$I_{Y_0} = I_Y \cos^2 \alpha_0 + I_Z \sin^2 \alpha_0 + I_{ZY} \sin 2\alpha_0$$

или

$$I_{Z_0} = \frac{I_Z + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4I_{ZY}^2};$$

$$I_{Y_0} = \frac{I_Z + I_Y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4I_{ZY}^2}.$$

Верхние знаки надо брать в случае, когда  $I_Z > I_Y$ , нижние – когда  $I_Z < I_Y$ .

## 2.8 Алгоритм определения главных центральных моментов инерции

1. Начертить сложное сечение в масштабе и разбить на составные части – простые геометрические фигуры – прямоугольники, треугольники, круги и другие фигуры.

2. Определить местоположение центров тяжести составных частей сложного сечения (для прокатных профилей местоположения центров тяжести определяется из справочных таблиц).

3. Провести оси, которые проходят через центры тяжести каждой составной части. Определить моменты инерции относительно этих собственных центральных осей (для прокатных профилей моменты инерции определяются из справочных таблиц).

4. Провести вспомогательные оси  $z$  и  $y$  (желательно начала координат этих осей провести через нижнюю левую точку сложного сечения – это упрощает отсчет координат центров тяжести составных частей). В некоторых случаях для облегчения расчетов за вспомогательные принимаются центральные оси составляющей части сечения. При этом необходимо, чтобы центры тяжести других составных частей сечения находились в первом квадранте этой координатной системы.

5. Определить координаты центра тяжести всего сечения. Через центр тяжести провести центральные оси всего сечения.

6. Определить центральные  $I_{ZC}$ ,  $I_{YC}$  и центробежный  $I_{ZcYc}$  моменты инерции всего сечения.

7. Определит угол  $\alpha_0$ , на который нужно повернуть центральные оси  $z_C$  и  $y_C$ , чтобы они совпали с главными центральными осями инерции  $z_0$  и  $y_0$  (при положительном угле  $\alpha_0$  его откладывают против хода часовой стрелки, при отрицательном – по ходу часовой стрелки).

8. Определить главные центральные моменты инерции.

9. Проверить правильность решения. При верном решении должно выполняться следующие условия:  $I_{Zc} + I_{Yc} = I_{Z_0} + I_{Y_0}$ ;  $I_{Z_0Y_0} = 0$ .

## 2.9 Понятие о радиусе инерции

**Радиус инерции** площади относительно оси – *некоторое расстояние* (обозначается  $i$  или  $\rho$ ), *которое определяет положение точки относительно оси, в*

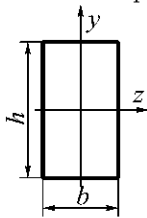
которой надо сосредоточить массу тела, чтобы произведение площади сечения на квадрат этого расстояния дал в результате момент инерции этой площади относительно этой оси, то есть, например, относительно оси  $z$ :

$$I_Z = \int_F y^2 dF = F i_Z^2 \quad \Rightarrow \quad i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{F}},$$

где  $i_Z$  – радиус инерции относительно оси  $z$ .

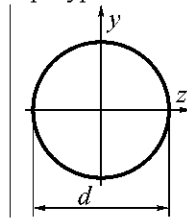
Основная единица измерения радиуса инерции – м.

Ниже приведены значения радиусов инерции некоторых сечений, которые являются простейшими геометрическими фигурами.



$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} \approx 0,289h$$

$$i_Y = \frac{b}{2\sqrt{3}} \approx 0,289b$$



$$i_Z = i_Y = \sqrt{\frac{I_Z}{F}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64\pi d^2}} = 0,25d$$

## 2.10 Момент сопротивления

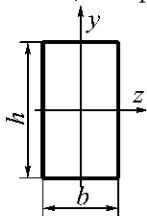
**Осевой момент сопротивления** – это отношение момента инерции относительно данной оси к расстоянию к наиболее удаленной точке поперечного сечения, то есть

$$W_Z = \frac{I_Z}{y_{\max}}; \quad W_Y = \frac{I_Y}{z_{\max}}.$$

Основная единица измерения осевого момента сопротивления – м<sup>3</sup>.

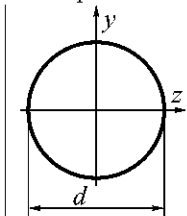
Практическое значение имеют моменты сопротивления относительно главных центральных осей, которые называются моментами сопротивления изгибу.

Ниже приведены значения осевых моментов сопротивления некоторых сечений, которые являются простейшими геометрическими фигурами.

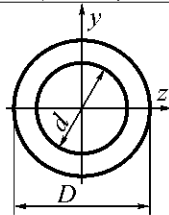


$$W_Z = \frac{I_Z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{z_{\max}} = \frac{hb^3}{12b/2} = \frac{hb^2}{6}$$



$$W_Z = W_Y = \frac{I_Z}{y_{\max}} = \frac{\pi d^4}{64d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$$



$$W_Z = W_Y = \frac{I_Z}{y_{\max}} = \frac{\pi(D-d^4)}{64(D/2)} = \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{32} \approx 0,1D^3(1-\alpha^4),$$

где  $\alpha = \frac{d}{D}$

**Полярный момент сопротивления** (момент сопротивления кручению) – отношение полярного момента инерции к расстоянию от центра тяжести поперечного сечения (от полюса) к наиболее удаленной точке поперечного сечения

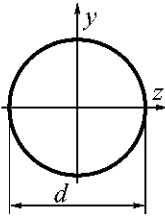


чения, то есть

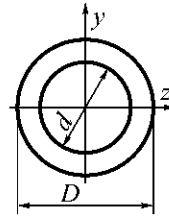
$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}}$$

Основная единица измерения полярного момента сопротивления – м<sup>3</sup>.

Ниже приведены полярные моменты сопротивления для круглого и кольцевого поперечных сечений (такие поперечные сечения применяются при проектировании валов).



$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^4}{32(d/2)} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$$



$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32(d/2)} = \frac{\pi D^3(1 - \alpha^4)}{16} \approx 0,2D^3(1 - \alpha^4),$$

где  $\alpha = \frac{d}{D}$

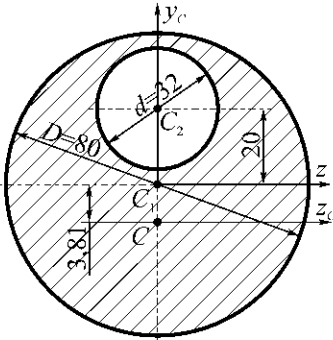


Рис. 2.6

**Пример 2.2.** Определить моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения, которое изображено на рис. 2.6.

Решение. Для рассматриваемого сечения известно положение только одной главной центральной оси, которая является вертикальной осью симметрии. Обозначим эту ось как  $y_C$ . Положение второй главной центральной оси  $z_C$  найдем, определив ординату центра тяжести  $y_C$  относительно оси  $z$ :

$$y_C = \frac{F_1 y_1 - F_2 y_2}{F_1 - F_2} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} \cdot 0 - \frac{\pi d^2}{4} \cdot 20}{\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{\frac{\pi \cdot 80^2}{4} \cdot 0 - \frac{\pi \cdot 32^2}{4} \cdot 20}{\frac{\pi \cdot 80^2}{4} - \frac{\pi \cdot 32^2}{4}} = -3,81 \text{ мм.}$$

Положение центра тяжести  $C$  сечения изображено на рис. 2.6.

Главные центральные моменты инерции определим, используя формулы перехода к параллельным осям:

$$I_{yC} = I_{yC(1)} - I_{yC(2)};$$

$$I_{yC(1)} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi 80^4}{64} = 2,01 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$I_{yC(2)} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 32^4}{64} = 5,14 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$I_{yC} = 2,01 \cdot 10^6 - 5,14 \cdot 10^4 = 1,96 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$I_{zC} = I_{zC(1)} - I_{zC(2)};$$

$$I_{ZC(1)} = I_{Z1} + y_1^2 F_1 = \frac{\pi D^4}{64} + 3,81^2 \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 80^4}{64} + 3,81^2 \frac{\pi 80^2}{4} = 2,08 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$I_{ZC(2)} = I_{Z2} + y_2^2 F_2 = \frac{\pi d^4}{64} + 23,81^2 \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 32^4}{64} + 23,81^2 \frac{\pi 32^2}{4} = 5,07 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$I_{ZC} = 2,08 \cdot 10^6 - 5,07 \cdot 10^5 = 1,573 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

*Прим.* В этой задаче все размеры определяются в производных миллиметра, но иногда это может быть неудобно, например, при сравнении с табличными данными, где они приведены, как правило, в производных сантиметра.

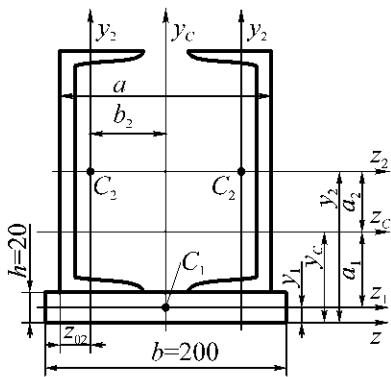


Рис. 2.7

**Пример 2.3.** Определить величины главных центральных моментов инерции симметричного сечения (см. рис. 2.7) и расстояние  $a$  между швеллерами из условия, чтобы  $I_Z = I_Y$ .

*Решение.* Сечение составлено из трех частей: прямоугольного основания с центром тяжести  $C_1$  и двух швеллеров с центром тяготения  $C_2$ . Определим осевые моменты инерции составных частей сечения относительно своих собственных центральных осей.

Моменты инерции и площадь основания равны:

$$I_{Z1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,2 \cdot 0,02^3}{12} = 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4,$$

$$I_{Y1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,02 \cdot 0,2^3}{12} = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$F_1 = 0,2 \cdot 0,02 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Для швеллера №20а в соответствии со справочными данными параметры равны:

$$I_{Z2} = 1670 \text{ см}^4 = 1670 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$I_{Y2} = 139 \text{ см}^4 = 139 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$Z_{02} = 2,28 \text{ см} = 0,0228 \text{ м};$$

$$F_2 = 25,2 \text{ см}^2 = 25,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Положение центра тяжести сечения, для которого ось  $Y_C$  является осью симметрии, определяется координатой  $Y_C$  относительно вспомогательной оси  $Z$  по формуле:

$$Y_C = \frac{F_1 y_1 + 2F_2 y_2}{F_1 + 2F_2} = \frac{(0,02 \cdot 0,2) + 2 \cdot 25,2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,12}{(0,02 \cdot 0,2) + 2 \cdot 25,2 \cdot 10^{-4}} = 0,0713 \text{ м}.$$

Оси симметрии  $Y_C$  и  $Z_C$ , проведенные через центр тяжести всего сечения, являются главными центральными осями.

Определим главные центральные моменты инерции, для чего используем формулы перехода к параллельным осям:

$$I_{ZC} = I_{ZC}^I + I_{ZC}^{II};$$

$$I_{ZC}^I = I_{Z1} + a_1^2 F_1; \text{ м}^4;$$

$$a_1 = y_C - y_1 = 0,0713 - 0,01 = 0,0613 \text{ м};$$

$$I_{ZC}^I = 1,33 \cdot 10^{-7} + 0,0613^2 \cdot (0,02 \cdot 0,2) = 1,516 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$I_{ZC}^{II} = I_{Z2} + a_2^2 F_2;$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 0,12 - 0,0714 = 0,0486 \text{ м};$$

$$I_{ZC}^{II} = 1670 \cdot 10^{-8} + 0,0486^2 \cdot 25,2 \cdot 10^{-4} = 2,265 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$I_{ZC} = 1,516 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 2,265 \cdot 10^{-5} = 6,046 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$I_{YC} = I_{YC}^I + I_{YC}^{II};$$

$$I_{YC}^I = I_{Y1} = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$I_{YC}^{II} = I_Y + b_2^2 F_2 = (139 \cdot 10^{-8}) + b_2^2 (25,2 \cdot 10^{-4});$$

$$I_{YC} = 1,33 \cdot 10^{-5} + 2(139 \cdot 10^{-8}) + b_2^2 (25,2 \cdot 10^{-4}) = 1,608 \cdot 10^{-5} + 25,2 \cdot 10^{-5} b_2^2.$$

Для нахождения значения размера  $b$  используем условие  $I_{YC} = I_{ZC}$ . Тогда можно записать:

$$1,608 \cdot 10^{-5} + 25,2 \cdot 10^{-4} b_2^2 = 6,046 \cdot 10^{-5} \Rightarrow b_2 = \sqrt{\frac{6,046 \cdot 10^{-5} - 1,608 \cdot 10^{-5}}{25,2 \cdot 10^{-4}}} = 0,132 \text{ м}.$$

Тогда расстояние  $a$  между швеллерами для выполнения условия равенства главных центральных моментов инерции  $I_{YC}$  и  $I_{ZC}$  должно составить:

$$a = 2 \cdot (b_2 + Z_{02}) = 2 \cdot (0,132 + 0,0228) = 0,3096 \text{ м}.$$

**Пример 2.4.** Определить, во сколько раз балка кольцевого сечения с отношением внутреннего диаметра  $d_K$  к внешнему  $D_K$ , равным  $\alpha$  (то есть  $\frac{d_K}{D_K} = \alpha$ ) легче балки сплошного круглого сечения диаметром  $D_C$ .

Решение. Момент сопротивления сплошного круглого сечения  $W_{ZC}$  определяется по формуле  $W_{ZC} \approx 0,1 D_C^3$ .

Момент сопротивления кольцевого сечения  $W_{ZK}$  можно определить как разность моментов инерции большого и малого круга:

$$W_{ZK} = \frac{\frac{\pi D_K^4}{64} - \frac{\pi d_K^4}{64}}{\frac{D_K}{2}} \approx \frac{0,1 D_K^4 - 0,1 d_K^4}{D_K} = 0,1 D_K^3 \left( 1 - \frac{d_K^4}{D_K^4} \right) = 0,1 D_K^3 (1 - \alpha^4).$$

Из условия задачи необходимо, чтобы балки были равнопрочными, то есть  $W_{ZC} = W_{ZK}$ , или

$$0,1 D_C^3 = 0,1 D_K^3 (1 - \alpha^4) \Rightarrow D_K = \frac{D_C}{\sqrt[3]{1 - \alpha^4}}.$$

Вес  $G$  (или масса  $m$ ) балок пропорциональны площадям их сечений, которые определяются по формулам:

$$F_C = \frac{\pi D_C^2}{4};$$

$$F_K = \frac{\pi(D_K^2 - d_K^2)}{4} = \frac{\pi(D_K^2 - (D_K\alpha)^2)}{4} = \frac{\pi D_K^2(1 - \alpha^2)}{4} = \frac{\pi D_C^2(1 - \alpha^2)}{4^{1,5}\sqrt{1 - \alpha^4}}.$$

Тогда отношение масс будет равняться:

$$\frac{m_C}{m_K} = \frac{D_C^2 \sqrt[1,5]{1 - \alpha^4}}{D_C^2(1 - \alpha^2)} = \frac{\sqrt[1,5]{1 - \alpha^4}}{(1 - \alpha^2)} = \frac{(1 - \alpha^4)^{\frac{1}{1,5}}}{(1 - \alpha^2)} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)^{1,5}}.$$

Знаменатель в последнем уравнении меньше единицы, а значение самой дроби – больше единицы. Таким образом, диаметр балки сплошного сечения меньше в сравнении с диаметром балки кольцевого сечения, а ее масса (или вес) – больше.

### Проверь свои знания!

1. По каким формулам определяются координаты центра тяжести сечения сложной формы?
2. Что называется статическим моментом площади относительно оси?
3. Что называется осевым, полярным и центробежными моментами инерции сечения?
4. Как называется ось, которая проходит через центр тяжести сечения? Чему равняется статический момент относительно этой оси?
5. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
6. Чему равны моменты инерции прямоугольника, квадрата, круга, кольца относительно центральных осей?
7. Чему равен осевой момент инерции треугольника относительно центральной оси, которая параллельная основанию?
8. Чему равны полярные моменты инерции круга и кольца относительно их центров?
9. Какая зависимость существует между моментами инерции относительно параллельных осей?
10. Как меняются осевые и центробежные моменты инерции при повороте координатных осей?
11. Какие оси называются главными осями инерции?
12. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
13. Какие моменты инерции называются главными моментами инерции?
14. Какие моменты инерции называются главными центральными моментами инерции?
15. Для каких фигур можно без вычислений установить положение главных центральных осей?
16. Как определяются положение главных осей инерции и главных моментов инерции сечения?
17. Что называется радиусом инерции сечения?
18. Что называется моментом сопротивления при кручении?

19. Что называется осевым моментом сопротивления поперечного сечения?
20. Что называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения?
21. Чему равны осевые и полярные моменты сопротивления круглого и кольцевого поперечного сечения? Почему нельзя сказать, что он равняется разности моментов сопротивления внешнего и внутреннего кругов?
22. Относительно каких центральных осей моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значение?
23. Какой из двух моментов инерции треугольника больше: относительно оси, которая проходит через основание, или относительно оси, которая проходит через вершину параллельно основанию.
24. Какой из двух моментов инерции квадратного сечения больше: относительно центральной оси, которая проходит параллельно сторонам, или относительно оси, которая проходит через диагональ?
25. Какой из двух главных центральных моментов инерции полукруглого сечения больше: относительно оси, параллельной диаметру, который ограничивает сечение, или относительно перпендикулярной оси?

### Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 3 МЕТОД СЕЧЕНИЙ. НАПРЯЖЕНИЕ

### 3.1 Внутренние силы. Метод сечений

**Внутренние силы** (внутренние усилия) – это силы взаимодействия между отдельными частями элементов сооружения, которые возникают под действием внешних сил.

Также внутренние силы возникают и в одном теле, например, в стержне, который растягивается. Эти силы противодействуют разъединению (разрушению) стержня, удерживая его отдельные части в первичной форме. Таких частей можно представить бесконечное количество (или, например, столько, из скольких кристаллов вещества состоит стержень).

В качестве примера рассмотрим стержень, на который действует система сил (см. рис. 3.1, а). «Разрезаем» его плоскостью  $\alpha$  и отбросим правую часть. Чтобы левая часть осталась в равновесии, к месту разреза необходимо приложить систему сил, которая действовала со стороны отброшенной части. Эти силы и являются внутренними силами.

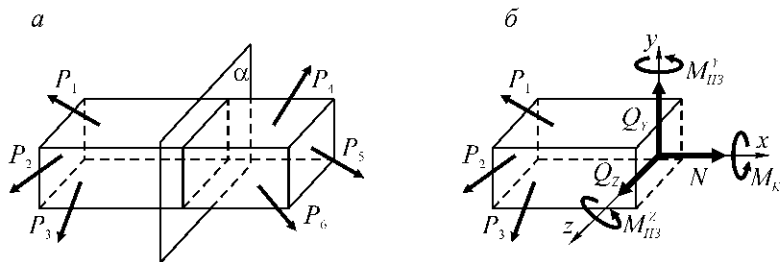


Рис. 3.1

В общем случае силового действия на стержень в его любом поперечном сечении действует шесть внутренних силовых факторов (см. рис 3.1, б):

$N$  – продольная сила, которая вызывает деформацию растяжения (или сжатия);

$Q_Y, Q_Z$  – поперечные силы, которые вызывают деформацию сдвига;

$M_X$  – момент кручения, который вызывает деформацию кручения;

$M_{из}^Y, M_{из}^Z$  – изгибающие моменты, которые вызывают деформацию изгиба.

Вопрос о деформациях растяжения (или сжатия), сдвига, кручения и изгиба будут рассмотрены ниже в соответствующих разделах.

Значение и вид внутренних усилий определяются методом сечений.

Для реализации метода сечений необходимо выполнить следующие действия:

- провести (мысленно) поперечное сечение в том месте стержня, в котором нужно определить внутренние усилия;

- отбросить одну из частей (левую или правую) стержня;

- заменить действие отброшенной части на часть, которая осталась и будет рассматриваться, внутренними усилиями;

- составить уравнения равновесия сил, которые действуют на часть стержня, который рассматривается, из которых определить внутренние усилия.

Таким образом, при действии внешних силовых факторов в стержне порождаются соответствующие внутренние усилия. Эти внутренние усилия, в свою очередь, также порождают соответствующие механические напряжения. Итак, при действии внешних силовых факторов можно говорить о деформации, проявлении внутренних усилий и проявлении напряжений.

В общем случае действия на стержень внешних сил можно составить шесть уравнений равновесия:

$$\sum P_X = 0; \quad \sum P_Y = 0; \quad \sum P_Z = 0; \quad \sum M_X = 0; \quad \sum M_Y = 0; \quad \sum M_Z = 0.$$

На основании анализа уравнений равновесия можно сделать следующие выводы.

Сумма проекций на продольную ось стержня  $x$  всех внешних сил  $\sum P_X$ , которые действуют на одну из частей (левую или правую) стержня, равняется продольной силе  $N$ , то есть  $N = \sum P_X$ .

$$\sum P_Y \text{ равняется поперечной силе } Q_Y, \text{ то есть } Q_Y = \sum P_Y.$$

$$\sum P_Z \text{ равняется поперечной силе } Q_Z, \text{ то есть } Q_Z = \sum P_Z.$$

Алгебраическая сумма моментов относительно продольной оси стержня всех внешних сил  $\sum M_x$ , которые действуют на одну из частей (левую или правую) стержня, равняется крутящему моменту  $M_K$ , то есть  $M_K = \sum M_x$ .

$\sum M_y$  равняется изгибающему моменту  $M_{ИЗy}$  относительно оси  $y$ , то есть  $M_{ИЗy} = \sum M_y$ .

$\sum M_z$  равняется изгибающему моменту  $M_{ИЗz}$  относительно оси  $z$ , то есть  $M_{ИЗz} = \sum M_z$ .

### 3.2 Механические напряжения

Согласно гипотезе 1 можно предположить, что внутренние силы непрерывно распределены по площади поперечного сечения стержня. Пусть на малую, но конечную площадку  $df$  в поперечном сечении действует внутренняя элементарная сила  $dr$ , которая является равнодействующей всех сил, приложенных к стержню (на рис. 3.2 равнодействующая не показана). Если разложить  $dr$  на составляющие по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим ее компоненты – элементарную продольную силу  $dn$  и элементарные поперечные силы  $dq_y$  и  $dq_z$ .

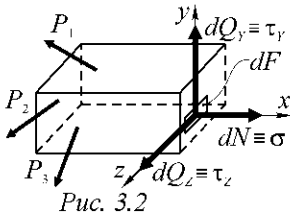


Рис. 3.2

Если разделить величины  $dn$ ,  $dq_y$  и  $dq_z$  на площадь  $df$ , то получим величины продольных и поперечных сил, приходящихся на единицу площади, которые называются напряжениями:

$$\sigma = \frac{dN}{dF}; \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}; \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dF}.$$

Здесь в формулах  $\sigma$  – нормальное напряжение,  $\tau$  – касательное напряжение.

**Напряжение** (механическое) – это интенсивность внутренних сил в рассмотренной точке сечения, то есть величина внутренних сил, которая приходится на единицу площади.

Полное напряжение  $K = dr/df$  – величина полного усилия, которое приходится на единицу площади. Полное напряжение также может быть вычислено по формуле

$$K = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}.$$

Единицей измерения напряжения является Па (паскаль).

#### Проверь свои знания!

1. Что называется напряжением в точке сечения?
2. Какое напряжение называется нормальным? Как оно проявляется?
3. Какое напряжение называется касательным? Как оно проявляется?
4. В чем суть метода сечений?

#### Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 4 МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

## 4.1 Испытание материалов на растяжение

В расчетах прочности стержней при растяжении и сжатии необходимо знать механические свойства материалов. Эти свойства устанавливаются при испытаниях образцов на растяжение, которые во многих случаях позволяют с достаточной точностью судить о поведении материала и при других видах деформирования – сжатии, сдвиге, кручении и изгибе.

Испытания проводятся на универсальных испытательных машинах, которые оборудованы измерителем усилий и аппаратом для автоматической записи диаграммы растяжения (сжатия) в координатах «сила – удлинение» (см. рис. 4.1, а). График зависимости между силой  $P$  и удлинением образца  $\Delta l$  называется диаграммой растяжения. Такая диаграмма зависит от размеров образца (см. рис. 4.1, в) и физических свойств материала. Для исключения зависимости от размеров образца диаграмма перестраивается в координатах  $\sigma$ – $\epsilon$  (см. рис. 4.1, б) путем уменьшения ординаты  $P$  в  $F_0$  раз и абсциссы  $\Delta l$  в  $l_0$  раз, где  $F_0$  и  $l_0$  – соответственно площадь поперечного сечения и рабочая длина недеформированного образца. В таком виде диаграмма будет характеризовать только свойство материала, из которого изготовлен образец.

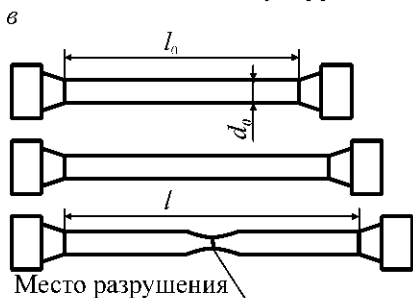
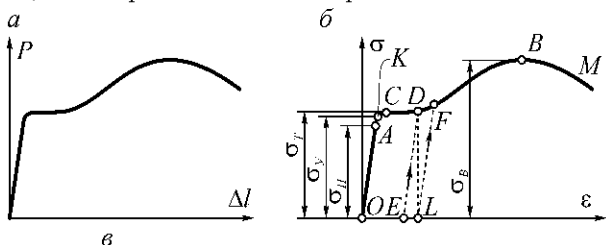


Рис. 4.1 – Диаграмма растяжения

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad \text{или} \quad P = \frac{\Delta l EF}{l_0}$$

Наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука, называется границей пропорциональности  $\sigma_{\text{п}}$ .

Угол наклона прямой  $OA$  к горизонтали равен

$$\alpha = \arctg(\sigma/\epsilon) = \arctg(E).$$

При проектировании элементов конструкций иногда важно знать напряжение, которое может вызвать в материале остаточные деформации. Вблизи точки  $A$  можно выделить точку  $K$ , в которой после снятия нагрузки (разгрузке) в образце возникает остаточная деформация, равная 0,005 % первичной длины об-

## 4.2 Характеристики прочности материала

На диаграмме растяжения (рис. 4.1, б) можно выделить точки, которые характеризуют качественные и количественные параметры механических свойств материала. Диаграмму можно условно разделить на четыре зоны. Первая зона называется зоной упругости (участок  $OA$ ), на которой свойства материала подчиняются закону Гука:



разца. Напряжение  $\sigma_y$  в точке  $K$  называется границей упругости (практически величина границы упругости близка к границе пропорциональности и потому её, как правило, не помещают в справочные данные свойств материалов).

Если из точки  $K$  опустить перпендикуляр на ось  $O\varepsilon$ , то он разделит диаграмму на две области: левую – область упругой деформации и правую – область упругой и пластической деформации (упругопластичности).

Вторая зона  $KD$  называется зоной общей пластичности. Для нее характерно существенное увеличение деформации (длины) образца без заметного увеличения напряжения (нагрузки). В этой зоне для некоторых материалов (например, малоуглеродистые стали) наблюдается почти горизонтальный участок – площадка текучести (отрезок  $CD$  диаграммы). Опыты показали, что образование пластической деформации вызвано сдвигами в кристаллической решетке.

Если образец разгрузить в какой-нибудь точке этой зоны, например в точке  $D$ , то в процессе разгрузки, как показывают опыты, зависимость между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  выразится прямой  $DE$ , которая параллельна прямой  $OA$ . При этом деформация, полученная на этапе нагрузки, полностью не исчезает. Она лишь уменьшается на величину упругой деформации  $\varepsilon_E = \sigma_y/E$ . Отрезок  $OL$  на оси абсцисс равняется остаточной (пластической) деформацией  $\sigma_p$ . Таким образом, полная деформация  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ . Повторная нагрузка образца протекает по прямой  $ED$  и дальше по диаграмме (см. рис. 4.1). Таким образом, предыдущая нагрузка до состояния упругопластичности образца уменьшает пластичность материала.

Для количественной оценки напряженности материала и предотвращения большой остаточной деформации используется важная характеристика механических свойств материала – граница текучести  $\sigma_T$  – напряжение, при котором в материале появляется заметное удлинение без увеличения напряжения.

Для таких материалов, в которых на диаграмме отсутствует явно выраженная площадка текучести, за границу текучести принимается условная величина напряжения, при которой остаточная деформация  $\varepsilon_p = 0,02 \dots 0,2 \%$  (до 0,5%). Чтобы отличить границы текучести при растяжении и сжатии, вводится вторая буква в индекс  $\sigma_{TP}$  и  $\sigma_{TC}$ .

Третья зона  $DB$  – зона упрочнения, где удлинение образца возрастает интенсивнее с увеличением нагрузки в сравнении с зоной упругости  $OK$ .

В точке  $B$  относительное уменьшение площади сечения образца уравнивается с относительным ростом напряжения и достигает максимума.

Если разгрузить образец в некоторой точке  $F$  этой зоны, то при следующей нагрузке отсчет деформаций будет начинаться от точки  $L$  и материал приобретает способность воспринимать без остаточной деформации большие нагрузки.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предыдущей пластической деформации носит название наклепа или нагартования и широко используется в технике.

Так, например, цепи и тросы грузоподъемных машин, а иногда болты и пружины подвергаются предварительному растяжению силами, которые превышают рабочие силы, для того, чтобы избежать остаточных удлинений в дальнейшем при нагружении рабочими силами. Провод, полученный волочением (проволока), выдерживает большие нагрузки, чем материал, из которого он изго-

товлен.

В некоторых случаях явление наклёпа может быть нежелательным. При пробивке отверстий под заклепки материал у их кромок получает наклёп и становится более жестким. Это содействует образованию трещин. Во избежание этого явления наклёп материала удаляется путем увеличения диаметра отверстий сверлением. Наклёп может быть снят термической обработкой – отжигом. Для этого материал нагревается до некоторой высокой температуры, выдерживается при этой температуре на протяжении определенного времени, а затем медленно охлаждается.

Четвертая зона *ВМ* называется зоной местной текучести. Здесь удлинение образца происходит с уменьшением силы и сопровождается образованием местного сужения – шейки. При этом среднее напряжение в поперечном сечении шейки возрастает. В точке *М* наступает разрушение образца. Следует отметить, что для многих материалов разрушение происходит без заметного образования шейки.

Максимальное напряжение на диаграмме, которое способен выдержать образец, называется пределом прочности (временным сопротивлением) и обозначается  $\sigma_B$  (при сжатии  $\sigma_{BC}$ ).

Поскольку величина  $\sigma_B$  определяется по отношению к площади поперечного сечения недеформированного образца, то предел прочности не равняется истинному напряжению разрушения и является условным показателем несущей способности материала. Однако благодаря простоте и удобству определения предел прочности широко используется в расчетной практике как сравнительная характеристика прочностных свойств материала.

### 4.3 Испытание материалов

Стандартные испытания материалов на сжатие по обыкновению не проводят из-за ряда технических трудностей. Для большинства конструкционных материалов модуль упругости, предел упругости и текучести при растяжения и сжатия можно считать одинаковыми. Предел прочности хрупких материалов (например, чугунов) при сжатии может быть значительно выше, чем при растяжении.

Ниже приведены некоторые основные механические характеристики материалов.

**Пластичность** – способность материала получить большую остаточную деформацию без разрушения.

В качестве меры пластичности используется относительное остаточное удлинение образца после разрыва  $\delta$  и относительное остаточное уменьшение площади поперечного сечения в шейке после разрыва  $\psi = \psi$ :

$$\delta = (l_p - l_0) / l_0;$$

$$\psi = (F_0 - F_p) / F_0,$$

где  $l_0$  и  $l_p$  – расчетная длина образца согласно испытанию и составленному из двух частей после разрыва;  $F_0$ ,  $F_p$  – площадь сечения стержня до испытания и в шейке после разрыва.

Надо отметить, что после образования шейки образец деформируется по длине неравномерно, поскольку величина  $\delta$  в определенной степени зависит от

расчетной длины образца.

Пластичность является важным конструкционным свойством. Опыты показали, что детали из малопластичных материалов характеризуются низким сопротивлением переменным нагрузкам.

**Хрупкость** – способность материала разрушаться без образования заметной остаточной деформации (это свойство противоположно свойству пластичности). Для таких материалов удлинения при разрыве составляет до 5%.

Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным. В зависимости от напряженного состояния, скорости деформирования, температуры и других условий пластичность меняется. Материал, который показал себя хрупким при растяжении при обычной температуре, может вести себя при других условиях как пластичный, и наоборот.

При изготовлении конкретных деталей широко используется термообработка, которая позволяет менять свойства материалов в нужном направлении. Так, например, закалка резко повышает прочностные характеристики стали и одновременно снижает ее пластические свойства.

**Твердость** – способность материала оказывать сопротивление проникновению в него другого более твердого тела. Показатель твердости тесно связан с показателями прочности и пластичности и зависит от конкретных условий проведения испытаний. Для определения твердости металлов существует несколько способов. Наиболее широкое применение получили способы Бринелля (НВ) и Роквелла (HR). В первом случае в поверхность исследуемой детали вдавливаются стальной шарик, во втором – твердосплавный или алмазный конус. По обмеру полученного углубления судят о твердости материала. Эти методы относятся к неразрушительным методам контроля. С помощью переводных таблиц можно приблизительно по показателям твердости определить предел прочности материала.

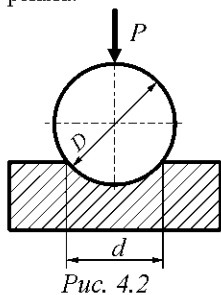


Рис. 4.2

Твердость по Бринеллю при стандартных измерениях определяется вдавливанием в испытываемый материал шарика из закаленной стали диаметром 10 мм силой 30 кН. Число твердости НВ вычисляется как отношение силы вдавливания шарика к площади поверхности полученного углубления (см. рис. 4.2) по формуле:

$$HB = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

Для сталей связь между числом твердости НВ и временным сопротивлением  $\sigma_B$  (пределом прочности) выражается следующей зависимостью:  $\sigma_B [\text{МПа}] = 0,36 \text{ НВ}$ .

#### 4.4 Влияние температуры на механические характеристики материалов

Результаты механических испытаний материалов по обыкновению относятся к так называемым нормальным условиям, то есть для температуры +20°C, при которой выполняется испытания в лабораториях, и к сравнительно небольшим

скоростям изменения нагрузок  $d\sigma/dt = 0,01 \dots 3 \text{ мин}^{-1}$ .

Много деталей машин работают в самых различных температурных режимах. Так, например, выхлопные клапаны в автомобильных двигателях работают при температуре около  $800^\circ\text{C}$ , а детали того же самого двигателя, соприкасающиеся с внешней средой, иногда работают при очень низких температурах. Элементы холодильных установок и резервуары, которые содержат сжиженные газы, также работают при очень низких температурах.

В значительных пределах могут меняться также скорости нагружения под действием внешних сил. Поэтому в зависимости от конкретных условий механические свойства материалов будут проявляться по-разному.

Влияние температуры и фактора времени на механические характеристики материала в общем виде установить не удастся. Поэтому влияние указанных факторов рассматривается относительно конкретных задач.

В СМ в основном изучаются статические нагрузки или медленно меняющиеся. Это позволяет легко получить зависимость механических характеристик материала от температуры. Например, экспериментально установлено, что для малоуглеродистой стали есть участок, на котором удлинение образца при разрыве с повышением температуры уменьшается, а при дальнейшем повышении температуры пластические свойства стали восстанавливаются при падении прочностных показателей. Это явление называется охрупчиванием. В легированных сталях это явление не наблюдается.

При статической нагрузке, начиная с некоторых значений температур, заметно начинает сказываться фактор времени.

Безвозвратное деформирование во времени нагруженной детали машины носит название ползучести.

Самопроизвольное изменение во времени напряжения в детали, которая работает в условиях высоких температур, при неизменной деформации называется релаксацией, которая является отдельным проявлением ползучести. Ее можно наблюдать на примере послабления затяжки болтовых соединений, которые работают в условиях высоких температур.

При повышенных температурах предел прочности материала зависит также от продолжительности испытания. В этих условиях прочность материала характеризуется пределом продолжительной прочности и пределом ползучести.

**Предел продолжительной прочности** материала – *отношение нагрузки, при которой происходит разрушение растянутого образца через заданный промежуток времени, к первичной площади сечения*. Заданный промежуток времени для разрушения выбирается равным сроку службы детали и меняется в пределах от десятков до сотен тысяч часов. С увеличением времени предел продолжительной прочности падает.

**Предел ползучести** – *напряжение, при котором пластическая деформация за заданный промежуток времени достигает заданной величины*.

Предел продолжительной прочности и предел ползучести с увеличением температуры уменьшаются.

На механические характеристики материалов влияют скорость проведения испытаний, радиоактивное облучение и другие факторы, которые оцениваются экспериментально.

## 4.5 Рассеяние механических характеристик материалов

Механическим характеристикам материалов  $\sigma_B$ ,  $\sigma_T$ ,  $\delta$  и другим свойственно сравнительно большое рассеяние при испытании серии идентичных образцов, изготовленных из материала даже одной плавки. Например, предел прочности стандартных образцов из стали 38ХА составляет  $\sigma_B=950\dots 1200$  МПа. Причинами рассеяния являются различия в микроструктуре, степень дефектности металла, рассеяние размеров образцов, точность измерения нагрузок и другие факторы. Для совокупности всех плавок металла данной марки это рассеяние становится еще большим в связи с дополнительным межплавочным рассеянием механических свойств, вызванным случайными вариациями химического состава и металлургических факторов в каждой плавке.

Таким образом, механические характеристики материала являются случайными величинами, определяемыми с некоторой вероятностью.

### Проверь свои знания!

1. Как строится диаграмма растяжения?
2. Что называется пределом пропорциональности?
3. Что называется пределом упругости?
4. Что называется пределом текучести?
5. Что называется пределом прочности?
6. Как формулируется закон Гука?
7. Что называется модулем упругости?
8. Что называется коэффициентом поперечной деформации?
9. Что называется истинным пределом прочности?
10. В каких местах возникает концентрация напряжения?
11. От каких факторов зависит запас прочности?

### Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

### 5.1 Напряжение в точке

Напряжение является результатом взаимодействия частиц тела при его нагрузке. Внешние силы изменяют взаимное расположение частиц, а напряжение, которое возникает при этом, препятствует смещению частиц, ограничивая его в большинстве случаев некоторой малой величиной.

Согласно гипотезы о непрерывности материала нужно считать, что каждая частица тела в сколько угодно малой окрестности имеет бесконечное множество других частиц, которые окружают ее по всем направлениям. Расположенная в этой точке частица по-разному взаимодействует с каждой из этих соседних частиц. Поэтому в одной и той же точке по разным направлениям напряжения различны и только в очень частных случаях они одинаковые по всем направлениям.

Исследуя напряженное состояние тела в некоторой его точке  $A$ , в ее окрестности по обыкновению выделяется элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда (см. рис. 5.1). При этом начало координат объединяется с точкой  $A$ , а координатные оси направленные вдоль соответствующих ребер. К граням параллелепипеда приложены внутренние силы, которые заменяют действие удаленной части тела. Полное напряжение на каждой грани элемента представляется нормальными и касательными составляющими. При этом эти составляющие на одной грани уравниваются такими же на противоположной грани.

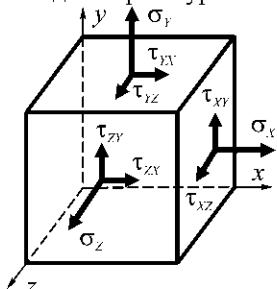


Рис. 5.1

Таким образом, на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки нагруженного тела, действуют девять компонентов напряжения.

## 5.2 Главные площадки и главное напряжение

Не все девять компонентов напряжений, которые действуют на гранях элементарного параллелепипеда, независимые. Это вытекает из условия равновесия элемента относительно его вращающих моментов (см. рис. 5.1). Из анализа условия равновесия (благодаря свойству парности касательного напряжения) вытекает, что число независимых компонентов напряжения в каждой точке тела уменьшается с девяти до шести.

При изменении ориентации граней выделенного элемента меняется также действующие на его гранях напряжения. При этом можно выявить такие площадки, на которых касательное напряжение равняется нулю. Площадки, на которых касательного напряжения нет, называются главными площадками, а нормальное напряжение на этих площадках – главным напряжением. Итак, в каждой точке могут действовать три главных напряжения, которые взаимно перпендикулярны. Направления, которые параллельны главному напряжению, называются главными направлениями напряжения или главными осями в этой точке.

Главные напряжения обозначаются так:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . При этом индексы нужно расставлять так, чтобы выполнялась неравенство

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Таким образом, в точках нагруженного тела можно выделить элементарные параллелепипеды, на гранях которых действует только нормальное главное напряжение.

Напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение отличается от нуля, а два других равняются нулю, называется одноосным или линейным

(рис. 5.2, а).

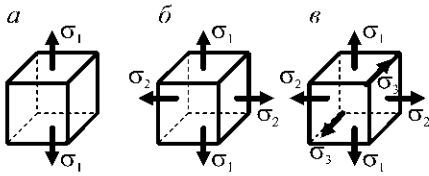


Рис. 5.2

Напряженное состояние, в котором два главных напряжения отличны от нуля, а одно равняется нулю, называется двухосным или плоским (рис. 5.2, б).

Напряженное состояние, в котором все три главных напряжения отличны от нуля, называется трехосным или объемным (рис. 5.2, в).

Кроме того, различают однородные и неоднородные напряженные состояния. В однородном напряженном состоянии напряжение одинаковое в каждой точке какого-либо сечения и всех параллельных ему сечениях. В случае однородного напряженного состояния размеры выделенных элементов не играют никакой роли, поскольку напряжение одинаковое во всех точках любой одной грани и равномерно распределено по каждой грани.

В неоднородном напряженном состоянии элемент необходимо считать бесконечно малым. Тогда предположение о равномерном распределении напряжения по его граням выполняется с точностью до малых второго порядка.

Итак, независимо от того, однородное или неоднородное напряженное состояние будет во всем теле, выделенные элементы рассматриваются находящимися в однородном напряженном состоянии.

### Проверь свои знания!

1. Сколько компонентов напряжения действует на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки нагруженного тела?
2. Меняется ли на гранях элементарного параллелепипеда действующее напряжение при изменении его ориентации?
3. На гранях каких элементарных параллелепипедов в точках нагруженного тела действует только нормальное главное напряжение?
4. Какое напряженное состояние называется одноосным или линейным, двухосным или плоским, трехосным или объемным? Какие различают другие напряженные состояния?

### Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 6 КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ

### 6.1 Задачи теорий прочности

Самой важной задачей инженерных расчетов является оценка прочности детали по известным напряженным состояниям. Эта задача наименее сложна для простых видов деформации, поскольку в этом случае значения предельного (опасного) напряжения легко установить экспериментально. Под опасным напряжением понимается такое, которое еще не разрушает деталь, т.е. не деформирует до недопустимых значений.

Рассмотрим вопрос о прочности материала при сложном напряженном со-

стоянии, когда деталь подвергается действию многих силовых факторов в различных точках. В этом случае, как показывают опыты, для одного и того же материала опасное состояние может наступить при разных соотношениях этих силовых факторов. Поэтому экспериментально установить предельное состояние сложно как из-за трудности постановки опытов, так и из-за большого объема испытаний.

Другим путем решить задачу можно, если установить критерий прочности. Для этого вводится гипотеза о преобладающем влиянии на прочность материала того или другого фактора: полагается, что нарушение прочности материала при любом напряженном состоянии наступит только тогда, когда величина этого фактора достигнет некоторого предельного значения. Предельное значение фактора, который определяет прочность, находится на основании простых, легко осуществимых опытов растяжения. Иногда пользуются также результатами опытов на кручение. Таким образом, введение критерия прочности позволяет сопоставить сложное напряженное состояние с простым, например, с одноосным растяжением, и установить при этом такое эквивалентное (расчетное) напряжение, которое в обоих случаях дает одинаковый коэффициент запаса.

Под коэффициентом запаса в общем случае напряженного состояния понимают число  $n$ , которое показывает, во сколько раз надо одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния, чтобы он стал предельным.

Выбранная указанным способом гипотеза часто называется механической теорией прочности.

## **6.2 Классические критерии прочности (теории прочности)**

Ниже рассмотрены некоторые из механических теорий прочности.

**Критерий наибольшего нормального напряжения** (первая теория прочности). Согласно этой теории в качестве критерия прочности принимается величина наибольшего нормального напряжения, которое устанавливается при простом растяжении или сжатии образцов из этого материала.

Таким образом, критерий наибольшего нормального напряжения из трех главных напряжений учитывает лишь одно – наибольшее, считая, что два других не влияют на прочность.

Экспериментальная проверка показывает, что эта теория прочности не отражает условий перехода материала в пластическое состояние и дает при некоторых напряженных состояниях удовлетворительные результаты лишь для очень хрупких материалов (например, для камня, кирпича, керамики, инструментальной стали и тому подобное).

**Критерий наибольших линейных деформаций** (вторая теория прочности). Согласно этой теории в качестве критерия прочности принимается наибольшая по абсолютной величине линейная деформация, которая определяется при простом растяжении или сжатии образцов из этого материала.

Экспериментальная проверка этой теории согласовывается в ряде случаев лишь для хрупкого состояния материала (например, для легированного чугуна и высокопрочных сталей после низкого отпуска). Применение второй теории прочности недопустимо для материалов, которые не подчиняются закону Гука



или которые находятся за пределом пропорциональности.

**Критерий наибольшего касательного напряжения** (третья теория прочности). Согласно этой теории в качестве критерия прочности принимается величина наибольшего касательного напряжения, которое устанавливается при простом растяжении.

Третья теория прочности вообще хорошо подтверждается опытами для материалов, которые одинаково работают на растяжение и сжатие. Недостаток ее заключается в том, что она не учитывает некоторых особенностей объемного напряженного состояния, который в некоторой мере все же так влияет на прочность материала.

**Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения** (четвертая теория прочности). Согласно этой теории в качестве критерия прочности принимается количество удельной энергии формоизменения, которая накоплена деформированным элементом и которая достигает своего предельного значения. Это состояние определяется при растяжении в момент текучести.

Опыты подтверждают четвертую теорию для пластических материалов, которые одинаково работают на растяжение и сжатие. Появление в материале малых пластических деформаций четвертой теорией определяется точнее, чем третьей. Эта теория не имеет ограничений, которые связаны с областью применимости закона Гука, и дает возможность установить условия начала не только пластических деформаций, но и разрушения.

**Критерий Мора** основан на предположении, что прочность материалов в общем случае напряженного состояния зависит главным образом от величины и знака наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных нормальных напряжений. Опыты с медными, никелевыми и чугунными образцами показывают, что погрешность, связанная с тем, что не учитывается напряжение  $\sigma_2$ , не превышает 15 %.

Теория Мора основана целиком на опытных данных и не нуждается в дополнительной экспериментальной проверке. Однако предельные значения напряжений для каждого материала определяется в результате ряда сложных опытов с плоскими и объемными напряженными состояниями, что, собственно, и ограничивает ее применение.

О применимости той или другой теории прочности для практических расчетов можно сказать следующее.

Разрушение материалов происходит путем отрыва за счет напряжения растяжения или удлинений и путем среза за счет наибольшего касательного напряжения. При этом разрушение отрывом может происходить при очень малых остаточных деформациях или совсем без них (хрупкое разрушение). Разрушение путем среза имеет место лишь после некоторой остаточной деформации (вязкое разрушение). Отсюда ясно, что первую и вторую теории прочности, которые отражают разрушение отрывом, можно применять лишь для материалов, которые находятся в хрупком состоянии. Третью и четвертую теории прочности следует применять для материалов, которые находятся в пластическом состоянии.

Теория прочности Мора позволяет установить сопротивление разрушению материалов, которые имеют разные сопротивления растяжению и сжатию.

Для практических расчетов рекомендуется четвертая или третья теории прочности для материалов, которые одинаково оказывают сопротивление растя-

жению и сжатию, и теорию Мора – для материалов, которые по-разному оказывают сопротивление растяжению и сжатию, то есть для хрупких материалов (для них возможно применение и второй теории прочности).

Нужно подчеркнуть, что состояние материала (хрупкое или пластическое) определяется не только его свойствами, но и видом напряженного состояния, температурой и скоростью нагружения. Как показывают опыты, пластические материалы при определенных условиях нагружения и температуры ведут себя, как хрупкие, в то же время хрупкие материалы в определенных напряженных состояниях могут вести себя как пластические. Так, например, при напряженных состояниях, близких ко всестороннему равномерному растяжению, пластические материалы разрушаются, как хрупкие. Такие напряженные состояния принято называть «жесткими». Очень «мягкими» являются напряженные состояния, близкие ко всестороннему сжатию. В этих случаях хрупкие материалы могут вести себя, как пластические.

Следует отметить, что перечисленные теории прочности непригодны для расчетов прочности в случае всестороннего сжатия. Влияние типа напряженного состояния может быть учтено приблизительно с помощью диаграмм механического состояния.

**Новые теории прочности.** Недостатки рассмотренных теорий, а также появление новых, в том числе искусственных, материалов нуждались в разработке новых теорий прочности, большинство из которых основаны на выборе такой формы предельной поверхности, при которой можно в полной мере учесть особенности сопротивления этих материалов в условиях сложного напряженного состояния.

**Теория Ягна.** Ю. Ягн предложил предельную поверхность принять в виде полинома второго порядка, симметричного по отношению ко всем трем главным напряжениям. Эта теория позволяет учесть неодинаковое сопротивление материала растяжению и сжатию, а также сопротивление материала сдвигу.

**Теория Писаренко и Лебедева** опирается на то, что наступление предельного состояния обусловлено способностью материала оказывать сопротивление за счет как касательного, так и нормального напряжения. Поэтому в этой теории предложено искать критерии прочности в виде инвариантных по отношению к напряженному состоянию функций касательного напряжения и максимального нормального напряжения.

Для материалов, которые находятся в пластическом состоянии, теория становится как четвертая теория прочности, для идеально хрупкого материала – как первая теория прочности, а для подавляющего большинства реальных материалов – как теория прочности Мора.

Экспериментальная проверка рассмотренной теории показала, что теория Писаренко и Лебедева хорошо согласовывается с результатами испытаний широкого класса конструкционных материалов.

**Диаграммы механического состояния** (критерий Я.Б. Фридмана). Влияние типа напряженного состояния на характер нарушения прочности материалов приблизительно можно учесть с помощью диаграмм механического состояния, которые учитывают разный вид разрушений и особенности характеристик материала в напряженном состоянии. Критерий Фридмана позволяет приблизительно

установить вид разрушения и выбрать, таким образом, соответствующую теорию прочности – теорию Мора, четвертую, третью, вторую или первую.

### **Проверь свои знания!**

1. Какие существуют виды напряженного состояния материала?
2. Чему равна сумма нормального напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам?
3. По каким площадкам возникает наибольшее и наименьшее нормальное напряжение?
4. Как графически определяется напряжения в наклонных площадках в случае плоского напряженного состояния?
5. Чему равно наибольшее касательное напряжение в случае плоского напряженного состояния?
6. Как найти максимальное касательное напряжение в случае объемного напряженного состояния?
7. Как формулируется первая теория прочности?
8. Как находится расчетное напряжение по второй теории прочности?
9. Зависит ли расчетное напряжение по третьей теории прочности от величины  $\sigma_2$ ?
10. Какая часть потенциальной энергии деформации учитывается при составлении расчетного уравнения по четвертой теории прочности?

### **Литература**

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## **7 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ**

### **7.1 Продольная сила**

**Растяжение (сжатие)** – такой простой вид деформирования, при котором внешние силы приложены вдоль продольной оси стержня, а в его поперечном сечении возникает нормальная (продольная) сила.

**Центральное растяжение (сжатие)** – такой простой вид деформирования, при котором в поперечном сечении стержня возникает только продольная сила (растягивающая или сжимающая), а все другие внутренние усилия отсутствуют. Продольные силы, растягивающие стержень, принято считать положительными (они направлены от рассматриваемого сечения), а силы сжимающими – отрицательными (они направлены к сечению).

График, на котором показано изменение продольных сил вдоль оси стержня, называется эпурой продольных сил  $N$  (или сокращенно «эпурой  $N$ »). Порядок построения эпюры продольных сил рассмотрим на примере.

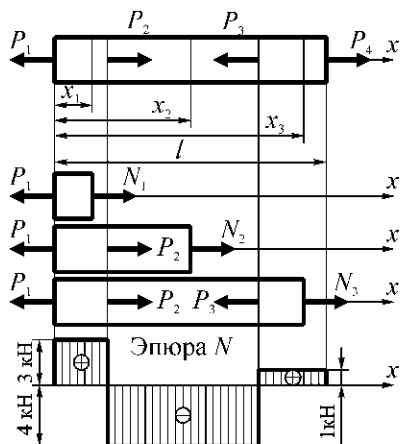


Рис. 5.1

*Прим.* Все обозначения для каждого из участков имеют соответствующий численный индекс.

Длину в пределах каждого участка определим соответствующей координатой  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  (на рисунке показана некоторая «средняя» длина соответствующих участков).

Для определения продольных сил применим метод сечений. На каждом участке делаем сечение, отбрасываем одну из частей (например, правую). Действие отброшенной части на оставшуюся часть заменяем продольной силой. Продольную силу направляем от сечения (в сторону отброшенной части). Составляем уравнение равновесия оставшейся части, из которого определяем соответствующую продольную силу.

Для каждого из трех участков:

$$\sum P_x = 0; N(x_1) - P_1 = 0; \Rightarrow N(x_1) = P_1 = 3 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$\sum P_x = 0; N(x_2) - P_1 + P_2 = P; \Rightarrow N(x_2) = P_1 - P_2 = 3 - 7 = -4 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$\sum P_x = 0; N(x_3) = -P_1 + P_2 - P_3; \Rightarrow N(x_3) = -P_1 + P_2 - P_3 = 3 - 7 + 5 = 1 \text{ кН} = \text{const.}$$

Ось эпюры всегда проводятся параллельно оси стержня.

Дальше выбирается масштаб, положительные продольные силы откладываются вверх от оси, отрицательные – вниз от оси. Затем эпюры штрихуются линиями, перпендикулярными к оси эпюры. На эпюру проставляются числа, которые показывают величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке наносится знак продольной силы.

*Прим.* На рис. 5.1 – три «левых» отрезка стержня построены для того, чтобы объяснить то, как определяются уравнения равновесия, но они при построении эпюры, как правило, не изображаются.

**Пример 7.1.** Для стержня построить эпюру продольных сил, если  $P_1 = 3 \text{ кН}$ ,  $P_2 = 7 \text{ кН}$ ,  $P_3 = 5 \text{ кН}$ ,  $P_4 = 1 \text{ кН}$  (рис. 5.1).

Решение. Стержень разбиваем на 3 участка.

*Прим.* В данном примере стержень условно имеет 3 участка, которые выделены по признаку места приложения внешних усилий, а именно: участок 1 – от левого конца стержня с приложенной силой  $P_1$  до точки приложения силы  $P_2$ ; участок 2 – от точки приложения силы  $P_2$  до точки приложения силы  $P_3$ ; участок 3 – от точки приложения силы  $P_3$  до точки приложения силы  $P_4$ .

## 7.2 Деформации и напряжение при растяжении и сжатии

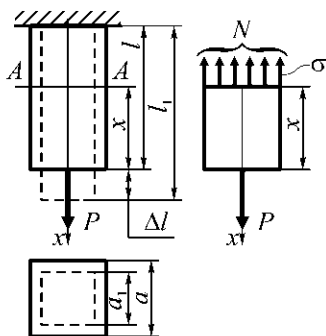


Рис. 7.2

Рассмотрим невесомый стержень квадратного сечения, верхний конец которого жестко закреплен, а к нижнему концу приложена сила  $P$  (см. рис. 7.2). Площадь сечения стержня равна  $F$ .

Под действием силы  $P$  стержень удлиняется на некоторую величину  $\Delta l$ , которая называется абсолютным (полным) удлинением (абсолютной продольной деформацией или линейной деформацией):

$$\Delta l = l_1 - l,$$

где  $l$  – длина стержня до приложения сил,

$l_1$  – длина стержня после приложения сил.

При растяжении  $\Delta l > 0$ , а при сжатии  $\Delta l < 0$ .

Отношение абсолютной деформации к первоначальной длине называется относительной деформацией:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{или} \quad \varepsilon\% = \frac{\Delta l}{l} 100\%.$$

При растяжении  $\varepsilon > 0$ , а при сжатии  $\varepsilon < 0$ .

Нормальные напряжения при растяжении (сжатии) распределяются равномерно по поперечному сечению стержня.

Для определения напряжений необходимо сделать сечение  $A-A$  и отбросить верхнюю часть стержня. Действие верхней отброшенной части на нижнюю заменяется внутренними силами (напряжениями). Равнодействующая внутренних сил равняется продольной силе  $N$ , действующей в сечении.

Рассмотрим равновесие нижней части стержня. Для этого спроецируем все действующие силы на ось  $x$ , составим уравнение равновесия и из него определим значение нормальной силы  $N$ :

$$P - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = +P.$$

Знак «+» указывает на то, что стержень растянут.

При равномерном распределении напряжений продольную силу  $N$  также можно определить по формуле

$$N = \sum \sigma = \sigma F.$$

Из последнего уравнения можно установить значение напряжения:

$$\sigma = \frac{N}{F}.$$

Знак напряжения устанавливается в зависимости от вида деформации: при растяжении напряжения  $\sigma$  положительное, при сжатии – отрицательное.

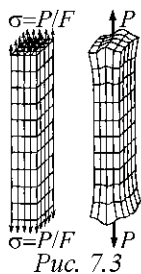


Рис. 7.3

Следует отметить, что все выше приведенные соображения выполнены в предположении, что стержень растянут силами, равномерно распределенными по его поперечному сечению (см. рис. 7.3). При растяжении сосредоточенными силами, как показывают эксперименты и расчеты методами теории упругости, сечения стержня вблизи мест приложения внешних сил искривляются и возникают большие местные деформации и напряжения.

Однако на некотором расстоянии от мест приложения внешних сил наблюдается быстрое затухание местных деформаций, а распределение напряжения уже не зависит от способа приложения этих сил. Статически эквивалентные силы вызывают одинаковое напряженно-деформированное состояние, о чем указывается в принципе Сен-Венана. В инженерных расчетах эффекты местных напряжений учитываются введением в расчетные формулы сопротивления материалов корректирующих коэффициентов, которые получаются из уточненных расчетов или модельных и натуральных экспериментов.

### 7.3 Закон Гука

В ходе многочисленных исследований установлено, что нормальные напряжения при растяжении (сжатии) прямопропорциональны относительной деформации. Эта взаимосвязь носит название закона Гука, который его установил: *между напряжением и малой деформацией существует линейная зависимость* (иначе: относительная продольная деформация прямопропорциональна нормальному напряжению), то есть:

$$\sigma = \varepsilon E,$$

где  $E$  – коэффициент пропорциональности, который называется модулем упругости первого рода, или модулем продольной упругости.

Подставив в формулу закона Гука выражения  $\sigma = \frac{N}{F}$  и  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , получим:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}.$$

Последняя формула выражает закон Гука для абсолютной деформации. Произведение  $EF$  в знаменателе формулы называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии).

Величину  $EF/l$  называется жесткостью стержня.

**Пример 7.2.** Определить удлинение стержня болта в результате затягивания соединения усилием  $P$  (см. рис. 7.4), необходимым для качественной сборки.

Решение. Продольная сила  $N = P$ , которая возникает в процессе затягивания, вызывает растяжение болта. Учитывая ступенчатую форму его стержня, можно записать такое уравнение:

$$\Delta l = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Pl_2}{EF_2} = \frac{P}{E} \left( \frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = \frac{P}{E} \left( \frac{4l_1}{\pi d_1^2} + \frac{4l_2}{\pi d_2^2} \right),$$

где  $l_1$ ,  $d_1$  и  $l_2$ ,  $d_2$  – соответственно длина и диаметр первого и второго участков стержня болта.

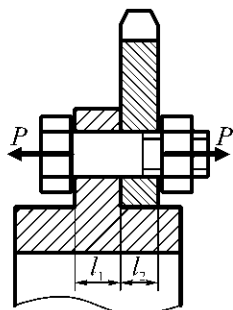


Рис. 7.4.

Кроме продольной деформации при действии на стержень сжимающей и растягивающей силы наблюдается также поперечная деформация стержня. При сжатии стержня его поперечные размеры увеличиваются, а при растяжении – уменьшаются. Если поперечный размер до действия растягивающей силы обозначить через  $a$ , а во время ее действия обозначить через  $a_1$  (см. рис. 7.2), то абсолютную поперечную деформацию стержня можно определить по формуле:  $\Delta a = a_1 - a$ .

Отношение абсолютной поперечной деформации к первоначальному размеру называется относительной поперечной деформацией, то есть

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} \quad \text{или} \quad \varepsilon\% = \frac{\Delta a}{a} 100.$$

Относительная поперечная деформация для изотропного материала во всех направлениях одинаковая.

При напряжениях, которые не превышают предела упругости (то есть – не приводят к возможному разрушению стержня), относительная поперечная деформация  $\varepsilon'$  прямо пропорциональна относительной продольной деформации, но имеет обратный знак, то есть

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности (называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона) представляет собой отношение относительной поперечной деформации к продольной, взятое по абсолютной величине, то есть

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Коэффициент Пуассона  $\mu$  вместе с модулем упругости  $E$  характеризует упругие свойства материала. Для разных материалов он имеет значение от нуля (для пробки) до величины, близкой к 0,5 (для резины, парафина). Для стали коэффициент Пуассона равен 0,25...0,30.

Рассмотрим произвольное сечение на первом участке, составляем для правой части стержня, которая осталась, уравнение равновесия, из которого найдем значение продольной силы (продольную силу  $N$  всегда направляем от сечения в сторону отброшенной части стержня):

$$\sum X_1 = 0: P_1 - N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = P_1 = 30 \text{ кН}.$$

Рассмотрим произвольные сечения на других участках стержня, составляем для каждой правой его части (которая осталась) уравнение равновесия, из которых определим значение продольной силы:

$$\sum X_2 = 0: P_1 - N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = P_1 = 30 \text{ кН};$$

$$\sum X_3 = 0: P_1 - P_2 - N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = P_1 - P_2 = 30 - 70 = -40 \text{ кН};$$

$$\sum X_4 = 0: P_1 - P_2 - N_4 = 0 \Rightarrow N_4 = P_1 - P_2 = 30 - 70 = -40 \text{ кН};$$

$$\sum X_5 = 0: P_1 - P_2 + P_3 - N_5 = 0 \Rightarrow N_5 = P_1 - P_2 + P_3 = 30 - 70 + 150 = 110 \text{ кН}.$$

*Прим.* Отрицательное значение продольной силы указывает на то, что в

действительности продольная сила направлена к сечению, а соответствующий участок подвергается сжатию.

*Прим.* Применяя метод сечений, можно было бы отбрасывать правую часть стержня и оставлять левую, но тогда решение необходимо начинать с определения реакции заделки.

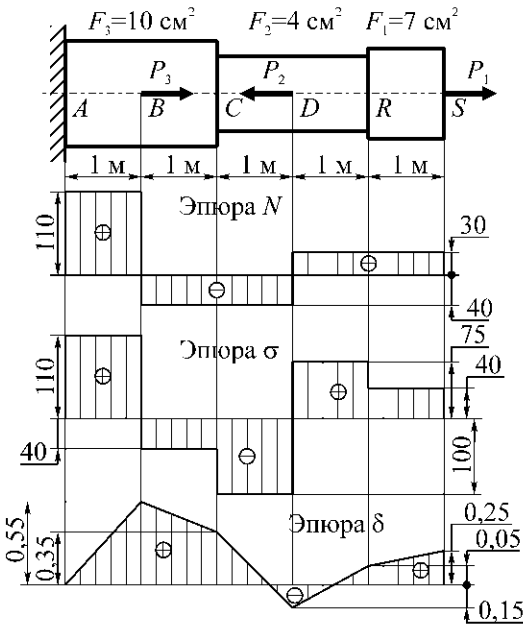


Рис. 7.5

Строим эпюру продольных сил. В местах приложения сосредоточенных сил на эпюре наблюдаются «скачки» – ступенчатые изменения ординат. Эпюра штрихуется, указываются численные значения её характерных точек и указываются её положительный и отрицательный участки.

Нормальные напряжения в пределах каждого участка вычисляется по формуле  $\sigma = \frac{N}{F}$ :

$$\sigma = \frac{N}{F} :$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{30 \cdot 10^3}{7,5 \cdot 10^{-4}} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{30 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 75 \cdot 10^6 \text{ Па} = 75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_2} = \frac{-40 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = -100 \cdot 10^6 \text{ Па} = -100 \text{ МПа};$$

**Пример 7.3.** Для стального стержня построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений по длине стержня (рис. 7.5).

*Решение.* Разделим стержень на 5 участков, начиная от правого свободного конца (границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы, а также места изменения размеров поперечного сечения; при построении лишь эпюры продольных сил стержень достаточно разделить на три участка).

При вычислении продольных сил применяем метод сечений, при этом оставляем правую и отбрасываем левую часть стержня (это позволяет не определять реакцию заделки).



$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_3} = \frac{-40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -40 \cdot 10^6 \text{ Па} = -40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{F_3} = \frac{110 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 110 \cdot 10^6 \text{ Па} = 110 \text{ МПа};$$

Строится эпюра напряжений. В местах приложения сосредоточенных сил и в местах изменения значения поперечного сечения стержня на эпюре наблюдаются «скачки» – скачкообразные изменения ординат. Эпюра штрихуется, указываются численные значения её характерных точек и обозначаются её положительный и отрицательный участки.

Перемещение участков стержня вычисляется по формуле, которая описывает закон Гука:  $\delta = \Delta l = \frac{Nl}{EF}$ . Для построения эпюры перемещений достаточно определить перемещение сечений, которые совпадают с границами участков (между указанными сечениями эпюра  $\delta$  линейная).

Построение эпюры перемещений начинается с левого неподвижного сечения  $A$ :  $\delta_A = 0$ . Перемещение соответствующего сечения равно изменению длины участка под действием продольной силы, действующей на этом участке стержня.

Для сечения  $B$  участка  $AB$ :

$$\delta_B = \Delta l_{AB} = \frac{N_5 l_5}{EF_3} = \frac{110 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Перемещение сечения  $C$  равно алгебраической сумме перемещения сечения  $B$  и удлинению участка  $BC$  стержня:

$$\delta_C = \frac{N_5 l_5}{EF_3} + \frac{N_4 l_4}{EF_3} = \delta_B + \frac{N_4 l_4}{EF_3} = 5,5 \cdot 10^{-4} + \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Аналогично определяется перемещение всех сечений стержня:

$$\delta_D = \delta_C + \frac{N_3 l_3}{EF_2} = 3,5 \cdot 10^{-4} + \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_R = \delta_D + \frac{N_2 l_2}{EF_2} = -1,5 \cdot 10^{-4} + \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_S = \delta_R + \frac{N_1 l_1}{EF_1} = 0,25 \cdot 10^{-4} + \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7,5 \cdot 10^{-4}} = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

*Прим.* Тангенс угла наклона линии эпюры перемещений к оси абсцисс пропорционален нормальному напряжению, которое возникает в поперечном сечении данного участка. Например, для первого участка:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\delta_R - \delta_S}{l} = \frac{\Delta l_1}{l} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}.$$

#### 7.4 Допустимые напряжения

В СМ приняты величины, которые характеризуют предельные или допустимые значения, обозначать в квадратных скобках, например, допустимое нор-

мальное напряжение  $[\sigma]$ , допустимое касательное напряжение  $[\tau]$ , допустимая сила  $[P]$ .

Допустимые напряжения при растяжении и сжатии данного материала (например, для стали) в случае, когда они одинаковые, обозначают  $[\sigma]$ . Если величины допустимых напряжений разные (строительный кирпич), то принимаются следующие обозначения:

$[\sigma_P]$  или  $[\sigma]_P$  – допустимое напряжение при растяжении;

$[\sigma_{СЖ}]$  или  $[\sigma]_{СЖ}$  – допустимое напряжение при сжатии.

### 7.5 Коэффициент запаса прочности при растяжения и сжатия

Для того, чтобы деталь работала надежно, без поломок, необходимо обеспечить, чтобы напряжения, которые возникают в ней, не превышали допустимых или опасных. Поэтому величина допустимого напряжения  $[\sigma]$  должна составлять некоторую часть от величины напряжения, которое является опасным (предельным) для данного материала при конкретных условиях его работы в конструкции. Эта часть определяется коэффициентом запаса  $[n]$ .

**Коэффициент запаса прочности** – это число, которое указывает, во сколько раз нужно увеличить значение силовых факторов, чтобы достичь предельного состояния конструкции, её элементов или деталей.

Так как хрупкие материалы (например, стекло) разрушаются при незначительных остаточных деформациях, то опасным (предельным) напряжением для них принято считать напряжение, которое отвечает моменту разрушения, то есть пределу прочности  $\sigma_B$ . Напряжения, которые допускается, для хрупких материалов определяется как часть предела прочности:

$$\text{при растяжении} \quad [\sigma_P] = \frac{\sigma_{B.P}}{[n_B]};$$

$$\text{при сжатии} \quad [\sigma_{CT}] = \frac{\sigma_{B.СЖ}}{[n_B]}.$$

Пределы прочности хрупких материалов при растяжении и сжатии различны по величине: при сжатии они значительно выше, чем при растяжении, то есть  $\sigma_{B.СЖ} > \sigma_{B.P}$ .

Разрушение пластических материалов при растяжении происходит при значительных остаточных деформациях, а интенсивный рост деформации начинается при напряжениях, которые отвечают пределу текучести материала. В этом случае опасным (предельным) напряжением принято считать предел текучести  $\sigma_T$  и назначать допускаемое напряжение как некоторую его часть, то есть

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}.$$

Для пластических материалов, которые не имеют площадки текучести, опасным (предельным) напряжением принято считать некоторую часть условного предела текучести, то есть

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{[n_T]}.$$

Допустимые напряжения при сжатии для пластичных материалов принимаются такими же, как и при растяжении, поэтому их величина при растяжения и сжатия одинаковые.

В четыре последние формулы входят коэффициенты  $n_B$  и  $n_T$ , которые представляют собой коэффициенты запасы прочности. Так как допустимые напряжения меньше опасного, то коэффициенты запаса прочности всегда больше единицы.

При назначении коэффициента запаса прочности необходимо учитывать род применяемого материала, точность расчетов, характер действующей нагрузки, особенности конструкции, условия работы и экономические факторы.

Для материалов однородных, пластических и имеющих достаточно постоянные механические свойства, коэффициент запаса  $[n_T]$  можно назначить сравнительно низким; для материалов хрупких, неоднородных, предел прочности которых колеблется в широких границах (чугун, камень), коэффициент запаса прочности  $[n_B]$  следует принимать более высоким. При статическом действии нагрузок для мало- и среднеуглеродистой сталей значения  $[n_B]$  можно принимать равным 1,4... 1,8, для чугуна – 3... 4,5, для хрупких однородных материалов типа легированных закаленных сталей – 2,5... 4.

Для капитальных сооружений коэффициент запаса прочности должен быть принят более высоким, чем для сооружений временных.

В некоторых конструкциях необходимо стремиться к уменьшению веса. В этих случаях уменьшения коэффициента запаса прочности  $[n_B]$  должно компенсироваться большей точностью расчетов и высоким качеством применяемых материалов.

Коэффициент запаса прочности  $[n_B]$  должен быть принят более высоким при динамическом действии нагрузок, чем при их статическом действии.

В отдельных случаях разрешается превышать допустимое напряжение (или коэффициент запаса прочности) на 5%, если это обосновано конструктивными соображениями.

## 7.6 Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

При осевом растяжении и сжатии прочность стержня будет обеспечена, если для любого поперечного сечения соблюдается условие

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$$

где  $N$  – абсолютная величина продольной силы в сечении;

$F$  – площадь поперечного сечения;

$[\sigma]$  – допустимое напряжение при растяжении или сжатии для материала, из которого изготовлен стержень.

Последнее выражение называется «условие прочности при растяжении или сжатии» и выражает условие прочности стержня при растяжении или сжатии, которое состоит в том, что действительное (расчетное) наибольшее напряжение (в элементе конструкции не должно превышать допустимое напряжение  $[\sigma]$ ).

В реальных конструкциях стержни не всегда имеют постоянное поперечное сечение  $F$  по длине (ступенчатый стержень). Иногда стержни соединяются друг с другом, что приводит к местным ослаблениям сечений. Иногда в стержнях

просверливают отверстия под заклепки, болты, поэтому в условии прочности в таких случаях следует вводить наименьшую площадь поперечного сечения с самым большим ослаблением (такую площадь называют рабочей площадью). Если продольная сила и/или поперечное сечение стержня по длине непостоянные, тогда необходимо найти сечение, в котором возникают самые большие напряжения (это сечение называется опасным), составить для него условие прочности и решить его.

Условие прочности используется при решении трех видов задач, которые приведены ниже.

**1. Проверка прочности** (проверочный расчеты). При заданных нагрузке (известной продольной силе)  $N$  и площади поперечного сечения  $F$  определяется напряжение, сравнивается с допустимой и делается вывод о возможности дальнейшей эксплуатации проверяемой детали:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

Если неравенство выполняется с точностью менее, чем  $\pm 5\%$ , то расчеты полагаются допустимыми.

Для деталей машин расчеты часто проводят в следующем порядке.

Исходя из известных значений опасного напряжения ( $\sigma_B$  или  $\sigma_T$ ) и вычисленного значения фактического напряжения  $\sigma$  определяется фактический коэффициент запаса прочности, а затем он сравнивается с заданным коэффициентом запаса прочности. При этом должно выполняться неравенство  $n_T > [n_T]$ .

**2. Подбор сечений** (проектный расчет). Из условия прочности  $\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$

можно определить необходимые размеры поперечного сечения проектируемой детали:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Для предельного случая эта формула примет такой вид:

$$F = \frac{N}{[\sigma]}.$$

**3. Определение допустимой нагрузки.** Этот вид расчетов выполняется для существующих конструкций.

Значение продольной допустимой силы  $[N]$  можно определить из условия прочности при известных материале стержня и размерах его поперечного сечения:

$$[N] \leq [\sigma] F.$$

**Пример 7.4.** Определить для стальной бурильной штанги круглого поперечного сечения диаметром 30 мм и длиной  $l = 3$  м максимальное осевое усилие подачи, которое можно приложить к ней, величину её продольной деформации и относительного изменения площади поперечного сечения. Принять  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $[\sigma] = 200$  МПа,  $\mu = 0,28$ .

Решение. Площадь поперечного сечения штанги составляет

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(30 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Максимальное осевое усилие подачи, которое можно приложить к штанге, определяется из условия прочности:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma] \Rightarrow P = F[\sigma] = 7,07 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^6 = 1,41 \cdot 10^5 \text{ Па} = 141 \text{ кПа}.$$

Продольная деформация (укорочение) штанги составит

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} = \frac{1,41 \cdot 10^5 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7,07 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

или

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{200 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} 3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Определим относительное изменение площади поперечного сечения штанги.

Относительная продольная деформация в соответствии с законом Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{200 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} = 1 \cdot 10^{-3}.$$

Относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -0,28 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = -2,8 \cdot 10^{-4}.$$

Площадь поперечного сечения деформированной штанги

$$F' = F + \varepsilon'F = F(1 - \varepsilon') = 7,07 \cdot 10^{-4}(1 - 2,8 \cdot 10^{-4}) = 7,068 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Относительное изменение площади поперечного сечения штанги составит

$$\frac{F' - F}{F} = \frac{7,068 \cdot 10^{-4} - 7,07 \cdot 10^{-4}}{7,07 \cdot 10^{-4}} = 2,8 \cdot 10^{-4}.$$

*Прим.* Изменение площади поперечного сечения штанги в результате её сжатия определяется исходя из первоначальной площади поперечного сечения.

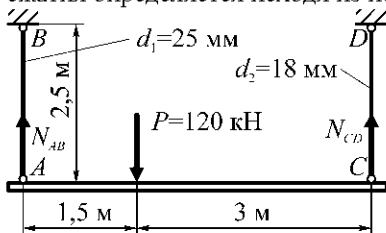


Рис. 7.6

**Пример 7.5.** Балка подвешена на двух стальных стержнях и нагружена силой  $P = 120 \text{ кН}$  (рис. 7.6). Проверить прочность стержней, если для их материала  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Решение. Определим усилие в стержнях  $AB$  и  $CD$  из уравнений равновесия системы:

$$\sum M_A = 0: N_{CD} \cdot 4,5 - P \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow N_{CD} = \frac{P \cdot 1,5}{4,5} = \frac{120 \cdot 1,5}{4,5} = 40 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0: -N_{AB} \cdot 4,5 - P \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_{AB} = \frac{P \cdot 3}{4,5} = \frac{120 \cdot 3}{4,5} = 80 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y = 0 = N_{AB} + N_{CD} - P = 80 + 40 - 120 = 0$ .

Установим верность условия прочности для стержней:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{80 \cdot 10^3}{\frac{\pi \cdot (25 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = 1,63 \cdot 10^8 \text{ Па} = 163 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{40 \cdot 10^3}{\frac{\pi \cdot (18 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = 1,57 \cdot 10^8 \text{ Па} = 157 \text{ МПа}.$$

Условие прочности  $\sigma_{AB} = 163 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$  не выполняется, то есть – прочность стержня  $AB$  недостаточная. Условие прочности  $\sigma_{CD} = 157 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$  выполняется, то есть – прочность стержня  $CD$  достаточная.

**Пример 7.6.** Крышка гидроцилиндра крепится с помощью болтов диаметром  $d = 20 \text{ мм}$  (см. рис. 7.7). Давление в поршневой полости цилиндра  $q = 15 \text{ МПа}$ , рабочей диаметр цилиндра  $D = 200 \text{ мм}$ . Определить число болтов, которыми необходимо прикрепить крышку к цилиндру, если для материала болтов  $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ .

Решение. Рабочая площадь поршня и крышки составляет

$$F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (200 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 0,0314 \text{ м}^2.$$

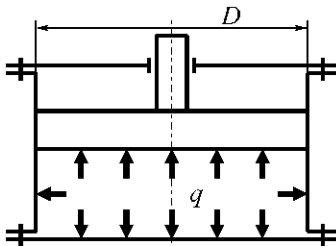


Рис. 7.7

Усилие  $N$ , которое действует на поршень и крышку цилиндра

$$N = Fq = \frac{\pi D^2}{4} q = \frac{\pi 0,2^2}{4} 15 \cdot 10^6 = 4,71 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Определим необходимое количество болтов  $n_B$  для крепления крышки цилиндра к цилиндру:

– площадь  $F_B$  поперечного сечения болта представляет

$$F_B = \frac{\pi d_B^2}{4} = \frac{\pi (20 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

– допустимая сила  $N_B$  на один болт (с условия прочности)

$$N_B = F_B [\sigma] = \pi \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 10^6 = 2,512 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$n_B = \frac{N}{N_B} = \frac{4,71 \cdot 10^5}{2,512 \cdot 10^4} = 18,75 \text{ шт.}$$

Принимаем  $n_B = 19$  шт.

**Пример 7.7.** Груз какой массы можно поднять с помощью стального каната, который сплетается из шести стренг. В каждой стренге 22 провода диаметром 1,6 мм и 15 проводов диаметром 1,12 мм. Предел прочности материала проволок  $\sigma_B = 1200 \text{ МПа}$ . Принять коэффициент запаса прочности  $[n] = 7,5$ .

Решение. Определим площадь поперечного сечения каната:

$$F = \left[ 22 \frac{\pi (1,6 \cdot 10^{-3})^2}{4} + 15 \frac{\pi (1,12 \cdot 10^{-3})^2}{4} \right] 6 = 3,54 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Определим максимальный вес груза, поднимаемый с помощью каната:

$$[P] = \frac{F[\sigma]}{[n]} = \frac{3,54 \cdot 10^{-4} \cdot 1200 \cdot 10^6}{7,5} = 5,664 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

$$\text{Максимальная масса груза представляет } [m] = \frac{[P]}{g} = \frac{5,664 \cdot 10^4}{9,81} = 5774 \text{ кг.}$$

**Пример 7.8.** Абсолютно жесткий брус  $AB$  шарнирно закреплен в точке  $A$ , а в точке  $C$  поддерживается стальным стержнем  $CD$  (см. рис. 7.8). К концу  $B$  бруса приложенная сила  $P = 50$  кН. Из условия прочности определить диаметр круглого поперечного сечения стержня  $CD$ , если допустимое напряжение его материала  $[\sigma] = 200$  МПа. Также определить вертикальное перемещение  $\delta B$  точки  $B$ .

Решение. Определим реакцию стержня  $CD$ , для чего составляем уравнение равновесия бруса (достаточно составить уравнение суммы моментов всех сил относительно точки  $A$ ):

$$\sum M_A = 0: -3P + 2N_{CD} \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow N_{CD} = \frac{3P}{2 \sin 30^\circ} = \frac{3 \cdot 50}{2 \sin 30^\circ} = 150 \text{ кН;}$$

Определим площадь поперечного сечения и диаметр стержня  $CD$  из условия прочности:

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} \leq [\sigma] \Rightarrow F_{CD} = \frac{N_{CD}}{[\sigma]} = \frac{150 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$F_{CD} = \frac{\pi d_{CD}^2}{4} \Rightarrow d_{CD} = \sqrt{\frac{4F_{CD}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7,5 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,031 \text{ м.}$$

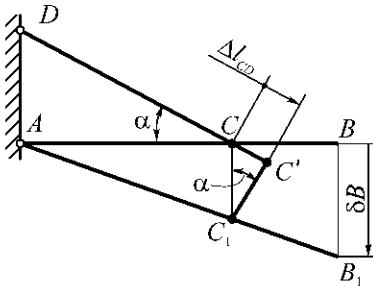
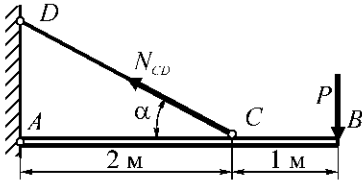


Рис. 7.8

Для определения перемещения  $\delta C$  точки  $C$  мысленно разъединим стержень  $CD$  и определим его длину  $DC'$  в растянутом состоянии. Чтобы найти новое положение точки  $C$  необходимо точку  $C'$  стержня  $CD$  и точку  $C$  бруса  $AB$  свести вместе путем вращения их вокруг шарниров  $D$  и  $A$  соответственно. Точки  $C$  и  $C'$  будут перемещаться по дугам (эти дуги вследствие их малости приняты прямыми  $C'C_1$  и  $CC_1$ , которые перпендикулярны соответственно тяге  $CD$  и брусу  $AB$ ).

Длина тяги в соответствии с расчетной схемой представляет

$$l_{CD} = \frac{|AC|}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = 2,31 \text{ м.}$$

Удлинение тяги  $CD$   $\Delta l_{CD}$  (на схеме эта величина, а также  $\delta b$  показаны односторонней стрелкой) представляет

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{E_{CD} F_{CD}} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 2,31}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,031} = 5,61 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Точка  $C$  перемещается по дуге круга с центром в точке  $A$ . Так как перемещение точки  $C$  малое, то можно считать, что она перемещается по прямой линии вертикально. То же самое можно сказать и о точке  $B$ .

Точка пересечения этих перпендикуляров (точка  $C_1$ ) и даёт новое положение точки  $C$  после деформации стержня  $CD$ . Перемещение  $\delta C$  определим из прямоугольного треугольника  $CC_1C$ :

$$\delta C = |CC_1| = \frac{\Delta l_{CD}}{\sin 30} = \frac{5,61 \cdot 10^{-5}}{\sin 30} = 1,122 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Перемещение  $\delta B$  точки  $B$  определим, рассмотрев подобные треугольники  $ACC_1$  и  $ABB_1$ :

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CC_1|}{|BB_1|} \Rightarrow |BB_1| = \delta B = \frac{|AB| |CC_1|}{|AC|} = \frac{3 \cdot 1,122 \cdot 10^{-4}}{2} = 1,683 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

**Пример 7.9.** Определить работоспособность симметричной стержневой системы и перемещение её шарнира  $A$ , если нагрузка  $P = 30 \text{ кН}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $h = 2 \text{ м}$  (см. рис. 7.9). Площадь поперечного сечения стержней  $F = 100 \text{ мм}^2$ , а для их материала модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^4 \text{ МПа}$  и допустимое напряжение  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ .

Решение. Определим усилия в стержнях, для чего составляем уравнение статики и решим их:

$$\sum x_k = 0: -N_{AB} \sin(\alpha/2) + N_{AC} \sin(\alpha/2) = 0;$$

$$\sum y_k = 0: N_{AB} \cos(\alpha/2) + N_{AC} \cos(\alpha/2) - P = 0.$$

Решив уравнение совместно, получим:

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos(\alpha/2)} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cos(60/2)} = 1,73 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Установим работоспособность системы, для чего определим напряжения, которые возникают в стержнях под действием нагрузки:

$$\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = \frac{P}{F} = \frac{17,3 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^{-6}} = 1,73 \cdot 10^8 \text{ МПа.}$$

Полученное значение напряжения не превышает допустимого напряжения, то есть  $\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = 1,73 \cdot 10^8 < 1,8 \cdot 10^8$ . Отсюда следует, что система работоспособна.

Определим перемещение точки  $A$  под действием нагрузки, для чего находим удлинение стержней:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l = \frac{N_{AB} l_{AB}}{EF} = \frac{N_{AB} \left( \frac{h}{\cos(\alpha/2)} \right)}{EF} = \frac{1,73 \cdot 10^4 \left( \frac{2}{\cos(60/2)} \right)}{2 \cdot 10^{11} \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-3}$$

м. Построим схему перемещения точки  $A$ . Для этого на продолжении стержней откладываем в произвольном масштабе отрезки  $\delta l$ , которые изображают удлинение стержней. Из полученных точек  $A'$  и  $A''$  проводим перпендикуляры к направлению стержней, которые пересекаются на линии симметрии системы. Перемещение  $\delta a$  шарнира  $A$  соответствует отрезку  $AA_1$ , который определяется из треугольника  $AA'A_1$  или  $AA''A_1$ :



$$\delta_A = |AA_1| = \frac{\Delta l}{\cos(\alpha/2)} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\cos(60/2)} = 2,31 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

### 7.7 Учет собственного веса стержня

В машиностроении, как правило, влияние собственного веса не учитывается, так как машиностроительные детали имеют сравнительно небольшие размеры, при которых влияние собственного веса незначительны. Однако в ряде инженерных конструкций необходимо учитывать собственный вес. Например, в случае расчетов канатов шахтных подъемов, штанг буровых установок, мостов, стен домов, плотин влияние собственного веса учитывать необходимо.

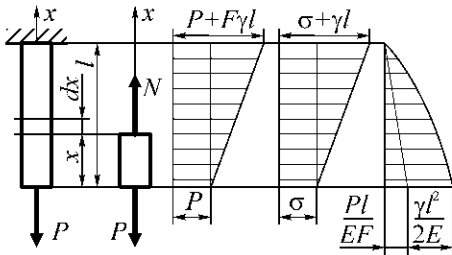


Рис. 7.10

Предположим, что прямой стержень постоянного поперечного сечения большой длины закреплен верхним концом и нагружен на свободном конце силой  $P$  (рис 7.10).

Определим закон изменения продольных сил и напряжений в поперечных сечениях стержня, а также перемещение сечений по длине стержня с учетом его собственного веса.

В сечении стержня, который находится на расстоянии  $x$  от свободного конца, продольная сила вычисляется по формуле:

$$N(x) = P + \gamma F(x).$$

где  $\gamma$  – вес единицы объема материала стержня.

Для нижнего сечения стержня, где его вес бездействует, можно записать:  $N = P$ .

Для верхнего сечения стержня, где влияние его веса на удлинение самое большое, можно записать:  $N = N_{max} = P + \gamma l$ .

Эпора продольных сил приведена на рис. 5.10.

Нормальные напряжения в сечении стержня на расстоянии  $x$  от свободного конца можно определить, если разделить продольную силу  $N(x)$  на площадь поперечного сечения:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x.$$

В нижнем сечении при  $x = 0$  напряжение вычисляется по формуле:

$$\sigma_{x=0} = \frac{P}{F}.$$

В верхнем сечении при  $x = l$  напряжения вычисляется по формуле:

$$\sigma_{x=l} = \sigma_{max} = \frac{P}{F} + \gamma l.$$

В этой формуле первое слагаемое представляет собой напряжение от силы  $P$ , второе – от собственного веса. Эпора нормальных напряжений приведена на рис. 5.10. Из анализа эпюры следует, что самое большое напряжение возникает в верхнем сечении стержня.

Условие прочности для опасного сечения имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma].$$

Из последнего уравнения можно получить формулу для подбора площади поперечного сечения стержня при расчете на прочность с учетом влияния его собственного веса:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}.$$

Если нагрузки на конце стержня нет, то есть  $P = 0$ , то напряжение в опасном сечении, вызванное только собственным весом, вычисляется по формуле:  $\sigma_{\max} = \gamma l$ . Тогда условие прочности примет вид:  $\sigma_{\max} = \gamma l \leq [\sigma]$ . Из этого условия можно определить длину стержня, при которой напряжение только от собственного веса достигает такого значения, что стержень не может нести полезной нагрузки и от собственного веса может произойти его разрыв. Эту предельно допустимую длину можно найти из условия прочности:  $l_K = \frac{[\sigma]}{\gamma}$ . Длина стержня,

при которой он разрывается от собственного веса, называется критической. Ее можно получить, если в качестве значения допустимого напряжения использовать напряжение предела прочности, то есть:  $l_K = \frac{\sigma_B}{\gamma}$ . Из последнего уравнения

следует, что предельная длина не зависит от площади поперечного сечения стержня.

Определим перемещение сечения, которое находится на расстоянии  $x$  от нижнего конца. Продольная сила в сечении равняется  $N(x) = P + \gamma fx$ . При  $F = \text{const}$  перемещение будет равняться удлинению части стержня длиной  $(l - x)$ , которая расположена выше это сечения, и определяется по формуле:

$$\delta(x) = \int_x^l \frac{N(x) dx}{EF} = \int_x^l \frac{(P + \gamma Fx) dx}{EF} = \frac{P(l-x)}{EF} + \frac{\gamma^2}{2E} (l^2 - x^2).$$

Эпюра перемещений, вычисленная по последнему уравнению, приведена на рис. 5.10.

Удлинение  $\Delta l$  стержня, или перемещение  $\delta$  нижнего конца стержня, получим, если принять в последнем уравнении  $x = 0$ :

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Здесь первое слагаемое является удлинением стержня от силы  $P$ , второе – от собственного веса.

Если полный вес стержня  $Q = \gamma l$ , то удлинение стержня составит:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}.$$

Таким образом, абсолютное удлинение стержня от собственного веса такое же, как удлинение от сосредоточенной силы, которая равняется весу стержня и приложена в его центре тяжести.

**Пример 7.10.** Для измерения глубины океана используется стальной провод

с прикрепленным на конце грузом. Определить удлинение провода при измерении Марианской впадины.

Решение. Если для изготовления провода использовать высококачественную канатную сталь, для которой  $\sigma_B = 1600$  МПа и  $\gamma = 76500$  Н/м, и не прикреплять к его нижнему концу груз, то самая большая длина провода, которую можно опустить вниз (без учета архимедовых сил) составляет:

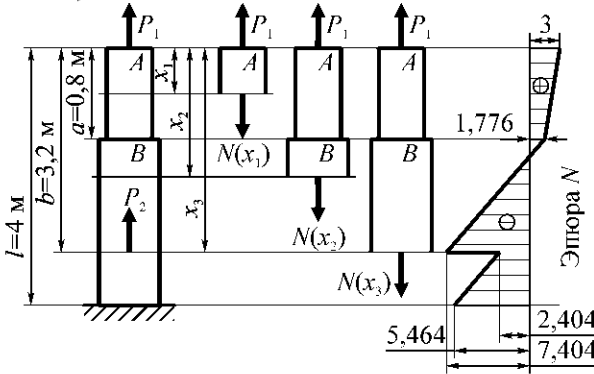
$$l_{\max} = \frac{\sigma_{BP}}{\gamma} = \frac{1600 \cdot 10^6}{76500} = 20915 \text{ м.}$$

Глубина Марианской впадины больше 11000 м. Тогда до нижнего конца провода можно прикрепить груз, изготовленный из «остатка» провода длиной приблизительно 9000 м. Если использовать провод диаметром 5 мм и площадью поперечного сечения  $\frac{(5 \cdot 10^{-3})^2 \pi}{4} = 1,96 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ , то вес груза, который можно

прикрепить к его концу, не должен превышать  $1,96 \cdot 10^{-5} \cdot 9000 \cdot 76500 = 13495$  Н. Тогда удлинение провода под действием груза и собственного веса составит:

$$\Delta l = \frac{13495 \cdot 11000}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,96 \cdot 10^{-5}} + \frac{(76500 \cdot 1,96 \cdot 10^{-5} \cdot 11000)11000}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1,96 \cdot 10^{-5}} = 61 \text{ м.}$$

**Пример 7.11.** Для заданного двухступенного стержня (рис 7.11) построить эпюру продольных сил с учетом собственного веса стержня, если  $l = 40$  м,  $a = 8$  м,  $b = 32$  м,  $F_1 = 0,02 \text{ м}^2$ ,  $F_2 = 0,05 \text{ м}^2$ ; материал стержня – сталь (для нее  $\gamma = 76,5$  кН/м<sup>3</sup>);  $P_1 = 3$  кН,  $P_2 = 5$  кН.



Решение. Разбиваем стержень на участки. Границами участков являются сечения, где приложены сосредоточенные силы и сечения с резким изменением поперечных размеров. Для каждого участка составляем уравнение равновесия рассмотренной части стержня и определяем продольные силы.

Рис. 7.11

Координату  $x$  отсчитываем от свободного (верхнего) конца.

Для первого участка:  $0 < x_1 \leq 0,8$ ;

$$\sum P_X = 0: P_1 - F_1 \gamma x_1 - N(x_1) = 0 \Rightarrow N(x_1) = P_1 - F_1 \gamma x_1.$$

При  $x_1 = 0$ :  $N(x=0) = 3$  кН.

При  $x_1 = 0,8$  м:  $N(x=0,8) = 3 - 0,02 \cdot 76,5 \cdot 0,8 = 1,776$  кН.

Для второго участка:  $0,8 < x_2 \leq 3,2$ ;

$$\sum P_X = 0: P_1 - F_1 \gamma a + F_2 \gamma (x_2 - 0,8) - N(x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x_2) = P_1 - F_1 \gamma a - F_2 \gamma (x_2 - 0,8).$$

При  $x_2 = 0,8$  м:  $N(x=0,8) = 3 - 0,02 \cdot 76,5 \cdot 0,8 = 1,776$  кН.

При  $x_2 = 3,2$  м:  $N_{(x=3,2)} = 3 - 0,02 \cdot 76,5 \cdot 0,8 - 0,05 \cdot 76,5 (3,2 - 0,8) = -7,404$  кН.

Для третьего участка:  $3,2 < x_3 \leq 4$ ;

$$\sum P_X = 0: P_1 + P_2 - F_1 \gamma a - F_2 \gamma (x_3 - 0,8) - N(x_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x_3) = P_1 + P_2 - F_1 \gamma a - F_2 \gamma (x_3 - 0,8).$$

При  $x_3 = 3,2$  м:

$$N_{(x=3,2)} = 3 + 5 - 0,02 \cdot 76,5 \cdot 0,8 - 0,05 \cdot 76,5 (3,2 - 0,8) = -2,404 \text{ кН.}$$

При  $x_3 = 4$  м:  $N_{(x=4)} = 3 + 5 - 0,02 \cdot 76,5 \cdot 0,8 - 0,05 \cdot 76,5 (4 - 0,8) = -5,464$  кН.

Выбираем удобный масштаб и строим эпюру продольных сил. Положительные продольные силы откладываем вправо от нулевой оси эпюры, а отрицательные – влево.

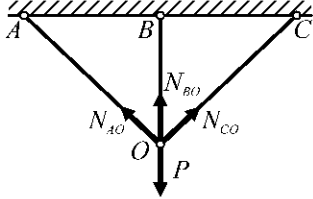


Рис. 7.12

## 7.8 Статически неопределенные системы

Статически неопределенными системами (конструкциями) называются такие системы, внутренние усилия в которых нельзя определить с помощью одних лишь уравнений равновесия. Для примера на рис. 7.12 приведенная статически неопределенная система.

Неопределенной эта механическая система является потому, что для неё можно составить лишь 2 независимых уравнения равновесия (как для плоской системы сходящихся сил), из которых определить 3 неизвестных реакции связей ( $N_{AO}$ ,  $N_{BO}$ ,  $N_{CO}$ ) невозможно.

Кроме уравнений статики при решении статически неопределенных систем можно составлять дополнительные уравнения, которые учитывают деформации элементов конструкции. Все статически неопределенные конструкции имеют так называемые лишние связи в виде упрочнений, стержней и других элементов. «Лишними» такие связи называются потому, что они не являются необходимыми для обеспечения равновесия конструкции и её геометрической неизменяемости, а обуславливаются требованиями прочности и жесткости конструкции. Число лишних неизвестных активных или реактивных сил (степень статической неопределенности системы) устанавливается различием между числом неизвестных, которые подлежат определению, и числом уравнений статики, которые можно составить для рассматриваемой системы. При одной лишней связи система называется один раз статически неопределенной, при двух – дважды статически неопределенной и т.д.

Решение статически неопределенных задач проводится в четыре этапа:

1. Решается статическая сторона задачи. Для этого указываются все неизвестные реакции и составляются уравнения равновесия.
2. Решается геометрическая сторона задачи. Для этого устанавливается связь между деформациями отдельных элементов конструкции исходя из условий общности деформации. Полученные уравнения называются уравнениями общности деформаций.
3. Решается физическая сторона задачи. Для этого в уравнениях общности деформаций выражаются деформации элементов конструкции на основании закона Гука через действующие в них неизвестных усилиях.

4. Решается синтезированная сторона задачи. Для этого решаются совместно полученные уравнения равновесия и уравнение общности деформаций, в ходе которого определяются все неизвестные усилия.

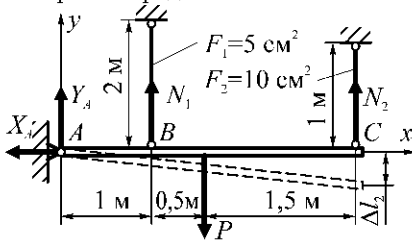


Рис. 7.13

**Пример 7.12.** Абсолютно жесткий брус  $ACC$ , шарнирно закрепленный в точке  $A$  и подвешенный на двух стальных стержнях с поперечными сечениями  $F_1 = 5 \text{ см}^2$  и  $F_2 = 10 \text{ см}^2$ , нагружен силой  $P = 300 \text{ кН}$  (рис. 7.13). Найти напряжение в стержнях при заданных условиях и определить допустимую нагрузку при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Решение. На схеме указываем опорные реакции  $R_x, R_y, N_1, N_2$ . Для полученной двумерной системы сил составляем уравнение равновесия бруса:

$$\sum X_k = 0: -R_x = 0;$$

$$\sum Y_k = 0: R_y + N_1 + N_2 - P = 0;$$

$$\sum M_A = 0: N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot 3 - P \cdot 1,5 = 0.$$

*Прим.* Полученная система сил – это система параллельных сил, поэтому достаточно было бы составить два уравнения равновесия, а именно  $\sum Y_k = 0$  и  $\sum M_A = 0$ .

В трех уравнениях равновесия четыре неизвестные силы, следовательно, задача является один раз статически неопределенной. Для составления еще одного уравнения рассмотрим деформирование конструкции.

В результате удлинения стержней брус вращается вокруг шарнира  $A$ .

Перемещение шарнира  $B$  равно удлинению  $\Delta l_1$  первого стержня, а перемещение шарнира  $C$  – удлинению  $\Delta l_2$  второго стержня. Из подобия треугольников находим:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta l_2 = 3\Delta l_1.$$

$$\text{Тогда } \frac{N_2 l_2}{EF_2} = 3 \frac{N_1 l_1}{EF_1} \Rightarrow N_2 = 3 \frac{N_1 l_1 F_2}{F_1 l_2} = 3 \frac{N_1 \cdot 2 \cdot 10}{5 \cdot 1} = 12N_1.$$

Подставив найденное выражение для  $N_2$  в последнее из уравнений равновесия, определяем  $N_1$  и  $N_2$ :

$$N_1 \cdot 1 + 12N_1 \cdot 3 - P \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{1,5P}{37} = \frac{1,5 \cdot 300 \cdot 10^3}{37} = 1,22 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$N_2 = 12N_1 = 12 \cdot 1,22 \cdot 10^4 = 1,46 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Напряжение в стержнях равны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{1,22 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-4}} = 2,44 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{1,46 \cdot 10^5}{10 \cdot 10^{-4}} = 1,46 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Найдем допустимое значение силы  $P$ . При  $P = 300 \text{ кН}$  нормальные напряжения в более нагруженном втором стержне равно  $146 \text{ МПа}$ . Поэтому, для достижения предельного значения  $\sigma_2 = [\sigma] = 160 \text{ МПа}$  силу  $P$  можно увеличить до

значения, которое определяется из уравнения:

$$[P] = 300 \cdot 10^3 \cdot \frac{160 \cdot 10^6}{146 \cdot 10^6} = 3,29 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

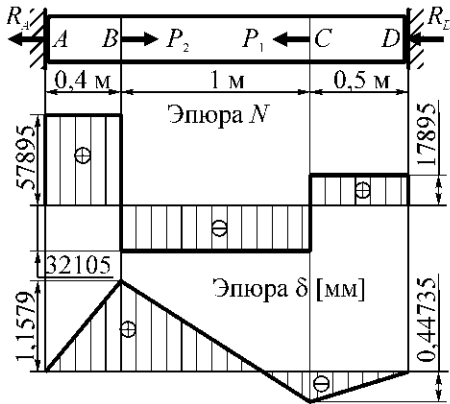


Рис. 7.14

**Пример 7.13.** Построить эпюры продольных сил и перемещений поперечных сечений для цилиндрического стержня, закреплённого обоими концами и который имеет площадь поперечного сечения  $10^{-4} \text{ м}^2$ . Кроме того, стержень нагружен силами  $P_1 = 50 \text{ кН}$ ,  $P_2 = 90 \text{ кН}$  (см. рис. 7.14).

Решение. Задача является статически неопределённой, потому что для действующей системы сил можно составить лишь одно уравнение равновесия, а неизвестны две силы – реакции связей.

Составим условие равновесия стержня и решим её относительно неизвестных реакций связей:

$$\sum X_k = 0: -R_A + P_2 - P_1 - R_D = 0 \Rightarrow R_A + R_D = P_2 - P_1 = 90 - 50 = 40 \text{ кН.}$$

Дополнительное уравнение совместности деформаций получим из условия, что сумма продольных деформаций всех участков равняется нулю (так как расстояние между жестко закрепленными сечениями A и D меняться не может, то есть суммарное удлинение стержня равняется нулю):

$$\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = 0.$$

Определим продольные деформации отдельных участков:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{EF};$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{EF} = \frac{(R_A - P_2) l_{BC}}{EF};$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{EF} = \frac{-R_D l_{CD}}{EF}.$$

Определим продольные силы на отдельных участках стержня:

$$N_{AB} = R_A;$$

$$N_{BC} = R_A - P_2;$$

$$N_{CD} = R_A + P_2 - P_1 = -R_D.$$

Тогда уравнение совместности деформаций примет вид:

$$\frac{R_A l_{AB}}{EF} + \frac{(R_A - P_2) l_{BC}}{EF} + \frac{-R_D l_{CD}}{EF} = 0 \Rightarrow 1,4R_A - 0,5R_D = 90 \text{ кН.}$$

Совместно решаем уравнение равновесия и уравнение совместности деформаций. В результате получим:  $R_A = 57,895 \text{ кН}$ ;  $R_D = -17,895 \text{ кН}$ .

*Прим.* Отрицательное значение  $R_D$  означает, что истинное её направление противоположно показанному на расчетной схеме.

Для проверки правильности выполненных расчетов спроецируем все силы на горизонтальную ось (на схеме не показана):

$$\sum X_k = -R_A + P_2 - P_1 - R_D = -57,895 + 90 - 50 + 17,895 = 0.$$

Определим значение продольных сил и вид деформации стержня, для чего подставим полученные значения  $R_A$  и  $R_D$  в уравнения продольных сил:

$$N_{AB} = R_A = 57,895 \text{ кН (растяжение);}$$

$$N_{BC} = R_A - P_2 = 57,895 - 90 = -32,105 \text{ кН (сжатие);}$$

$$N_{CD} = -R_D = 17,895 \text{ кН (растяжение).}$$

По этим значениям построим эпюру продольных сил.

Определим перемещение поперечных сечений стержня.

Перемещения левого сечения  $\delta_A$  и правого  $\delta_D$  равняются нулю.

Вычислим перемещение сечений  $B$  и  $C$ :

$$\delta_B = \Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{EF} = \frac{57,895 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = 1,1579 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_{BC} = \delta_B + \frac{N_{BC} l_{BC}}{EF} = 1,1579 \cdot 10^{-3} + \frac{-32,105 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = -4,4735 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Проверим перемещение сечения  $D$  (оно должно равняться нулю):

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_{CD} = \delta_C + \frac{N_{CD} l_{CD}}{EF} = -4,4735 \cdot 10^{-4} + \frac{17,895 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = 0.$$

Согласно полученным данным строим эпюру перемещений.

## 7.9 Температурные и монтажные напряжения

Для стержня, который растянут (сжат) силой  $P$  и одновременно температуру которого изменили на  $\Delta t$  градусов, суммарная деформация складывается из силовой и температурной. В этом случае удлинение  $\Delta l$  стержня вычисляется по следующей формуле:

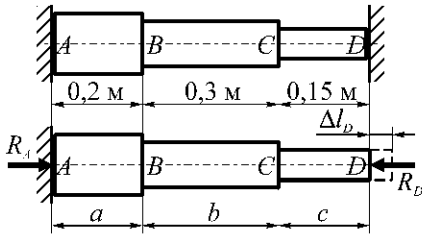
$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} - \Delta t \alpha l,$$

где  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения материала.

*Прим.* Если к стержню не приложена внешняя сила  $P$ , то последняя формула принимает вид формулы для расчетов зависимости изменения размеров тела от температуры, которая известна из курса физики:  $\Delta l = \Delta t \alpha l$ .

Экспериментально установлено, что в диапазоне температур от 0 до 400°C, модуль упругости  $E$  практически не меняется, а коэффициент  $\alpha$  практически не зависит от напряжения  $\sigma$ . При других температурах необходимо учитывать зависимость модуля упругости  $E$  и коэффициента  $\alpha$  от температуры.

При монтаже конструкции часто возникают напряжения вследствие того, что отдельные стержни могут иметь отклонения от расчетной длины из-за не точности изготовления.



**Пример 7.14.** Стальной стержень, закреплённый обоими концами между неподвижными поверхностями, нагревается от 20 до 120°C, т.е. на 100°C (рис. 7.15). Площадь поперечного сечения левой, средней и правой частей стержня соответственно 10, 7 и 5 см<sup>2</sup>. Принять  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ .

Определить напряжения и усилия в стержне, возникающие в его поперечных сечениях в результате нагревания.

Решение. При нагревании стержня он удлиняется и в его закреплёниях возникают реакции  $R_A$  и  $R_D$ . Составим уравнение равновесия и решим его:

$$\sum X_k = 0: R_A - R_D = 0 \Rightarrow R_A = R_D.$$

Для составления уравнения совместности деформаций преобразуем расчетную схему: удаляем правое закреплёние и заменяем его действие реакцией  $R_D$ .

Определяем перемещение освобождённого сечения  $D$  в результате удлинения стержня при его нагревании:

$$\Delta l_D(t^\circ) = \alpha \Delta t^\circ (a + b + c) = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 100 (0,2 + 0,3 + 0,15) = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Определяем перемещение освобождённого сечения  $D$  в результате сокращения стержня за счет действия реакции  $R_D$ :

$$\Delta l_{D(R_D)} = -\frac{R_D a}{EF_1} - \frac{R_D b}{EF_2} - \frac{R_D c}{EF_3} \Rightarrow R_D = \frac{\Delta l_{D(t^\circ)} E (F_1 + F_2 + F_3)}{a + b + c}.$$

Так как длина стержня не меняется из-за двухстороннего закреплёния, то удлинение стержня при нагревании компенсируется сокращением из-за действия осевой силы  $R_D$ , то есть  $\Delta l_{D(t^\circ)} = \Delta l_{D(R_D)}$ . Тогда осевая сила  $R_D$  может быть вычислена по формуле:

$$R_D = \frac{\Delta l_{D(t^\circ)} E (F_1 + F_2 + F_3)}{a + b + c} = \frac{7,8 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11} (10 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4})}{0,2 + 0,3 + 0,15} = 5,28 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

Определим напряжения, которые возникают в левом, среднем и правом участках стержня:

$$\sigma_{\text{лев.}} = \frac{5,28 \cdot 10^5}{10 \cdot 10^{-4}} = 5,28 \cdot 10^8 \text{ Па;}$$

$$\sigma_{\text{средн.}} = \frac{5,28 \cdot 10^5}{7 \cdot 10^{-4}} = 7,54 \cdot 10^8 \text{ Па;}$$

$$\sigma_{\text{прав.}} = \frac{5,28 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,06 \cdot 10^9 \text{ Па.}$$

Нужно подчеркнуть, что возникающие напряжения значительно превышают допустимые напряжения, принятые даже для высококачественных конструкционных сталей.



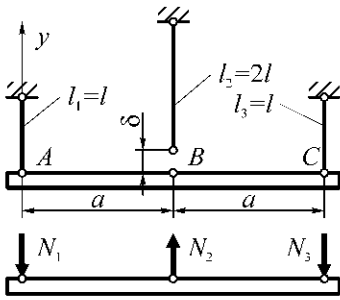


Рис. 7.16

**Пример 7.15.** На рис. 7.16 приведенная конструкция, стержни которой изготовленные из одинакового материала и имеют одинаковую площадь поперечного сечения. Из-за неточности изготовления средний стержень имеет длину на  $\delta$  меньше необходимой. При сборке системы необходимо средний стержень растянуть, чтобы иметь возможность присоединить его к балке ABC. В результате после монтажа в стержнях возникнут усилия. Определить их.

Решение. При сборке длина среднего стержня увеличится на величину  $\Delta l_2 = \delta$ , а крайние стержни сократятся на  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_3$  соответственно.

Для определения усилий в стержнях составляем уравнение равновесия системы и решим их:

$$\sum M_B = 0: N_1 a - N_3 a = 0 \Rightarrow N_1 = N_3;$$

$$\sum y_k = 0: -N_1 + N_2 - N_3 = 0 \Rightarrow N_2 = 2N_1 = 2N_3.$$

Уравнение общности деформаций имеет следующий вид:  $\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2$ . С

учетом закона Гука последнее уравнение примет вид:  $\delta = \frac{N_1 l}{EF} + \frac{N_2 2l}{EF}$ .

Решим совместно уравнение равновесия системы и уравнения общности деформаций. В результате получим:

$$N_1 = N_3 = \frac{2\delta EF}{5l}; \quad N_2 = \frac{4\delta EF}{5l}.$$

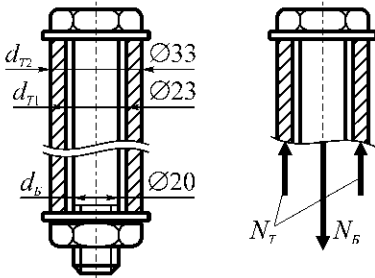


Рис. 7.17

**Пример 7.16.** Стальной болт с диаметром стержня 20 мм и шагом резьбы  $S = 2$  мм сжимает дюралюминиевую трубку длиной 200 мм (см. рис. 7.17). Определить напряжения в болте и в трубке при затягивании гайки на  $1/6$  оборота. Принять модуль упругости дюралюминиевой трубки  $-7 \cdot 10^{10}$  Па.

Решение. При затягивании гайки болт будет растягиваться, а трубка сжиматься. В болте и в трубке возникнут монтажные напряжения.

Уравнение статики для этого случая будет иметь следующий вид:

$$N_T = N_B = 0 \Rightarrow N_T = N_B.$$

Условием совместимости деформации для этой конструкции есть то, что арифметическая сумма абсолютного удлинения болта  $\Delta l_B$  и абсолютного сокращения трубки  $\Delta l_T$ , которые для этой конструкции одинаковые, равняется величине перемещения гайки, то есть:

$$\Delta l_B + \Delta l_T = \frac{S}{6}.$$

Подставляя в левую часть последнего уравнения исходные данные, в соответствии с законом Гука, получим:

$$\frac{Nl}{E_B F_B} + \frac{Nl}{E_T F_T} = \frac{S}{6} \Rightarrow N = \frac{S}{6l \left( \frac{1}{E_B F_B} + \frac{1}{E_T F_T} \right)},$$

где  $N$  – продольное усилие в болте или трубке;  
 $l$  – длина деформируемой части болта или трубки;  
 $E_B$  и  $E_T$  – соответственно модуль упругости материала болта и трубки;  
 $F_B$  и  $F_T$  – соответственно площадь поперечного сечения болта и трубки,

$$F_B = \frac{\pi d_B^2}{4} = \frac{\pi (20 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$F_T = \frac{\pi (d_{T2}^2 - d_{T1}^2)}{4} = \frac{\pi [(33 \cdot 10^{-3})^2 - (23 \cdot 10^{-3})^2]}{4} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$N = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 200 \cdot 10^{-3} \left( \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{7 \cdot 10^{10} \cdot 4,4 \cdot 10^{-4}} \right)} = 3,44 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Определим напряжения в стержне болта  $\sigma_B$  и в трубке  $\sigma_T$ :

$$\sigma_B = \frac{N_B}{F_B} = \frac{3,44 \cdot 10^4}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 1,1 \cdot 10^8 \text{ Па} = 110 \text{ МПа};$$

$$\sigma_T = \frac{N_T}{F_T} = \frac{3,44 \cdot 10^4}{4,4 \cdot 10^{-4}} = 7,8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 78 \text{ МПа.}$$

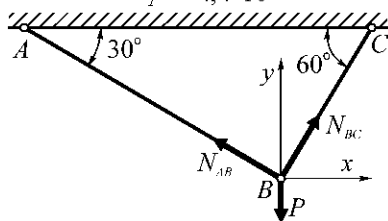


Рис. 7.18

**Пример 7.17.** Подвеска  $ABC$  состоит из двух стальных стержней  $AB$  и  $BC$  прямоугольного поперечного сечения  $6 \times 2 \text{ см}^2$  (см. рис 7.18). Какую допустимую нагрузку  $[P]$  можно безопасно приложить к узлу  $B$  подвески, если допустимое напряжение для материала стержней равно  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ .

Решение. Определим усилие в стержнях, для чего составляем уравнение равновесия:

$$\sum X = 0: \quad -N_{AB} \cos 30^\circ + N_{BC} \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0: \quad N_{AB} \sin 30^\circ + N_{BC} \cos 30^\circ - P = 0.$$

Решив эти уравнения, получим:

$$N_{AB} = 0,5 P;$$

$$N_{BC} = 0,866 P.$$

Составим условие прочности при растяжении:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \Rightarrow [N] = F[\sigma],$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня,

$$F = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см}^2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Большее усилие действует в стержне  $BC$ , поэтому допустимую величину силы  $[P]$  определим для него. Из условия равновесия:

$N_{BC} = 0,866 [P] = F [\sigma]$ . Тогда

$$[P] = \frac{F[\sigma]}{0,866} = \frac{12 \cdot 10^{-4} \cdot 140 \cdot 10^6}{0,866} = 194 \cdot 10^3 \text{ Н} = 194 \text{ кН.}$$

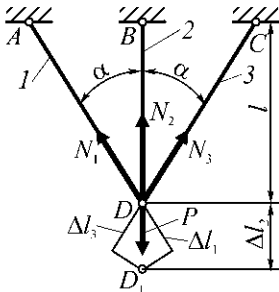


Рис. 7.19

**Пример 7.18.** Найти напряжение в стальных стержнях 1, 2 и 3 подвески (см. рис. 7.19), если  $F_1 = F_2 = F_3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $P = 100 \text{ кН}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Решение. При нагрузке подвески силой  $P$  ее узел  $D$  переместится на величину, которая равняется абсолютной деформации  $\Delta l_2$  стержня 2. Отрезок  $\Delta l_1$  в диаграмме перемещений является абсолютной деформацией стержня 1, а  $\Delta l_3$  – стержня 3, при этом  $\Delta l_1 = \Delta l_3$ . Определим усилие и напряжение в стержнях.

Составим два уравнения равновесия и одно дополнительное – уравнение совместности деформаций стержней, при котором узел  $D$  примет новое положение  $D_1$ :

$$\sum X = 0: \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_3;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - P = 0 \quad \Rightarrow \quad 2N_1 \cos \alpha + N_2 = P;$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha.$$

Согласно закону Гука можно записать:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2 \cos^2 \alpha.$$

Решим уравнение равновесия и дополнительное уравнение совместно:

$$N_1 = N_3 = P \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} = 100 \cdot 10^3 \frac{(\cos 30^\circ)^2}{1 + 2(\cos 30^\circ)^3} = 32,6 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$N_2 = P \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} = 100 \cdot 10^3 \frac{1}{1 + 2(\cos 30^\circ)^3} = 43,5 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Напряжение в стержнях:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{F} = \frac{32,6 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 6,52 \cdot 10^7 \text{ Па} = 65,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{43,5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 8,7 \cdot 10^7 \text{ Па} = 87 \text{ МПа.}$$

### Проверь свои знания!

1. Назовите основные задачи раздела «Соппротивление материалов».
2. Какие деформации называются упругими?
3. Какие деформации называются остаточными (пластическими)?
4. Что понимается под прочностью (жесткостью, устойчивостью)?
5. Что представляют собой внутренние силы?
6. В чем сущность метода сечений?
7. Какие внутренние усилия (внутренние силовые факторы) могут возникать в поперечных сечениях стержня и какие виды деформации с ними связаны?

8. Что называется напряжением в точке в данном сечении?
9. Что называется касательным и нормальным напряжением?
10. Какая размерность напряжений?
11. Какие случаи деформирования стержня называются центральным растяжением или сжатием?
12. Как определяется продольная сила в произвольном поперечном сечении стержня?
13. Что представляет собой эпюра продольных сил и как она строится?
14. Что представляет собой эпюра нормальных напряжений и как она строится?
15. Запишите формулу для определения напряжений.
16. Что представляет собой эпюра перемещений поперечных сечений и как она строится?
17. Что называется абсолютной продольной деформацией стержня?
18. Что называется относительной продольной деформацией стержня?
19. Что называется жесткостью поперечного сечения при растяжения или сжатии?
20. Запишите формулу закона Гука.
21. Запишите формулу для вычисления абсолютной и относительной деформации стержня.
22. Что называется коэффициентом поперечной деформации стержня (коэффициентом Пуассона)?
23. Как определить величину продольной силы с учетом собственного веса стержня?
24. Как определяется удлинение стержня, находящегося под действием собственного веса?
25. Что называется допустимым напряжением? Как оно назначается для пластичных и хрупких материалов?
26. Как формулируется условие прочности?
27. Что называется коэффициентом запаса прочности?
28. Какие системы (задачи) называются статически неопределенными?
29. Как решаются статически неопределенные задачи?
30. Какие напряжения называются монтажными?
31. Какие напряжения называются температурными?
32. Как находятся напряжения при изменении температуры?

## Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 8 СДВИГ И СМЯТИЕ

### 8.1 Сдвиг

**Сдвиг (срез)** – такое деформирование, при котором в поперечных сечениях стержня возникает лишь один силовой фактор – поперечная сила. Если рассматривать стержень, который подвергается сдвигу, то внешние силы, которые

действуют на него, направлены только перпендикулярно направлению его оси. В машиностроении существует множество деталей, которые работают на сдвиг (срез). На рис. 8.1 приведены схемы нагрузки некоторых из них.

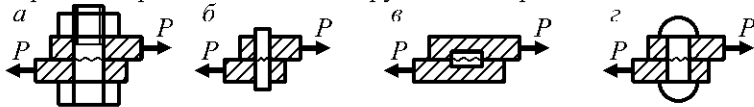


Рис. 8.1 – Детали, работающие на сдвиг (срез): а – болт, б – штифт, в – шпонка, г – заклепка.

При расчетах на прочность при сдвиге полагается, что разрушение деталей в случае их недостаточной прочности происходит в плоскости, которая совпадает с плоскостью соприкосновения элементов, которые перерезают деталь (на рис. 8.1 такие плоскости показаны волнистой линией).

К сдвигу также относится и процесс резания листа (например, металлического) ножницами. При этом лист разделяется на две отделенных детали (см. рис. 8.2).

Таким образом, при сдвиге действуют две силы  $P$ , направленные в противоположные стороны, линии действия которых не совпадают, а относительно близко расположены друг от друга, и перпендикулярны к продольной оси стержня.

Сдвиг также предшествует срезу – деформированию, сущность которого состоит в перекашивании прямых углов элементарного параллелепипеда  $ABCD$  (см. рис. 8.2). Величина  $CC_1$ , на которую сечение  $CD$  сдвигается относительно сечения  $AB$ , называется абсолютным сдвигом. Угол  $\gamma$ , на который уменьшаются прямые углы параллелепипеда, называется относительным сдвигом. При этом

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}.$$

Если угол  $\gamma$  небольшой, а это может быть в случае небольших де-

формаций или, как правило, упругих деформаций, то  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$  и тогда  $\gamma = \frac{\Delta S}{a}$ .

Если в стержне провести сечение между двумя силами и отбросить одну часть, то действие отброшенной части на оставшуюся часть необходимо заменить внутренними силами, которые будут действовать в плоскости сечения и которые равномерно распределяются по сечению (см. рис. 8.3). Таким образом, сдвиг (срез) вызывает касательные напряжения, которые можно определить по формуле:

$$\tau_{CF} = \frac{P}{F_{CF}},$$

где  $F_{CF}$  – площадь среза или площадь поперечного сечения стержня.

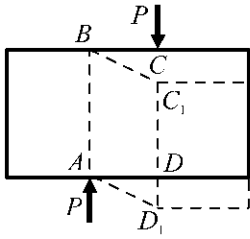


Рис. 8.2.

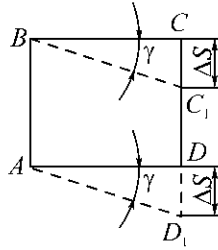
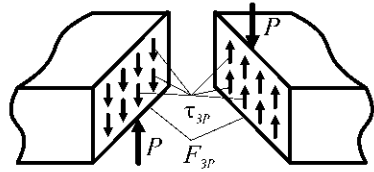


Рис. 8.3



Установлено, что напряжение  $\tau$  при сдвиге прямо пропорционально относительному сдвигу  $\gamma$ . Взаимосвязь между  $\gamma$  и  $\tau$  выражается зависимостью, которая называется законом Гука при сдвиге:  $\tau = \gamma G$ .

В этой формуле  $G$  – это модуль упругости второго рода (коэффициент пропорциональности при сдвиге), который характеризует жесткость материала при сдвиге. Как и при растяжении (сжатии) указанная зависимость справедлива при напряжениях, которые не превышают предела пропорциональности материала.

Если в последнее уравнение подставить зависимости  $\gamma = \frac{\Delta S}{a}$  и  $\tau = \frac{P}{F_{CP}}$ , то

$$\text{получим закон Гука для абсолютного сдвига: } \Delta S = \frac{Pa}{GF_{CP}}.$$

При расчетах на прочность при сдвиге (срезе) необходимо определить касательное напряжение  $\tau_{CP}$  и сравнить его с допустимым касательным напряжением. Это устанавливается из условия прочности на сдвиг (срез), которое имеет вид:

$$\tau_{CP} = \frac{P}{F_{CP}} \leq [\tau_{CP}].$$

**Пример 8.1.** Рассчитать на прочность и определить геометрические параметры заклепочного соединения двух стальных листов при приложении к конструкции силы  $P$  (см. рис. 8.4).

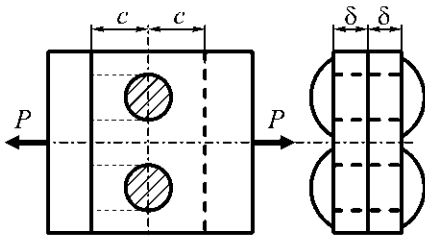


Рис. 8.4

Решение. При приложении силы  $P$  металлические листы стараются перерезать заклепки. Для работоспособности конструкции необходимо, чтобы заклепки не были разрушены, то есть необходимо, чтобы в заклепках не возникали напряжения, которые могут превысить допустимое напряжение. Такое состояние описывается условием прочности на сдвиг (срез):

$$\tau_{CP} = \frac{P}{F_{CP}} \leq [\tau_{CP}].$$

Здесь  $F_{CP}$  – площадь сечения заклепки, которая равна площади возможного разрушения. При разрушении заклепок эта площадь равна площади поперечного

сечения двух заклепок (эти площади заштрихованы), то есть

$F_{CP} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 2 = 0,5\pi d^2$ . Тогда условие прочности на сдвиг (срез) и его решение примет вид:

$$\tau_{CP} = \frac{P}{0,5\pi d^2} = \frac{2P}{\pi d^2} \leq [\tau_{CP}] \Rightarrow d = \sqrt{\frac{\pi[\tau]}{2P}}$$

Следует заметить, что конструкция может быть разрушена иным образом: если заклепки будут расположены очень близко к торцу листа (на схеме – левого или правого), то часть листа может быть «вырезана» стержнем заклепки по линиям, которые показаны тонкими пунктирными. Полагается, что каждая заклепка «вырезает» из листа параллелепипед. При этом формой плоскости разрушения листа является прямоугольник – боковая плоскость этого параллелепипеда. Длина прямоугольника условно принимается размеру от торцевого края листа до ближайшей точки контура отверстия для заклепки, то есть равной  $(c - d/2)$ , а высота – равной толщине листа  $\delta$ .

Конструкция имеет две заклепки, поэтому необходимо учитывать, что плоскостей разрушения листа четыре – по две для каждой заклепки, то есть  $F_{CP} = 2 \cdot 2(c - d/2)\delta$ . Тогда условие прочности для случая среза листа двумя заклепками примет вид:

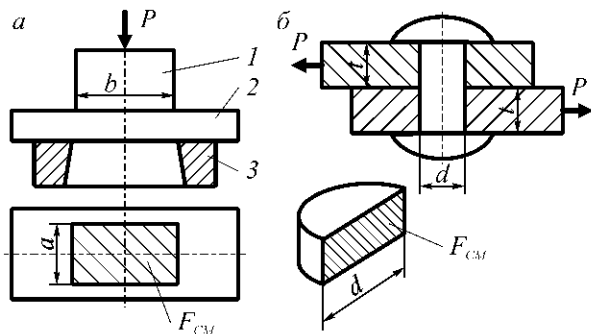
$$\tau_{CP} = \frac{P}{2 \cdot 2(c - d/2)\delta} \leq [\tau_{CP}]$$

## 8.2 Смятие

**Смятие** – такое деформирование, которое проявляется в местном сжатии поверхностей соприкосновения двух тел (деталей). При смятии в сечениях тела возникают нормальные напряжения, а сечения относительно продольной оси тела (детали) могут быть поперечными, продольными и наклонными – в зависимости от направления действия нагрузки.

На рис. 8.5 приведены два примера конструкций, в которых детали подвергаются смятию, а именно: на рис. 8.5, а, это пуансон 1, с помощью которого в детали 2 выполняется пробивание (просекание) прямоугольного отверстия, и матрица 3; на рис. 8.5, б, это заклепка, которая соединяет два листа металла, а также сами листы металла, которые соединены заклепкой.

При расчетах на прочность при смятии необходимо определить касательное напряжение  $\sigma_{CM}$  и сравнить его с допустимым касательным напряжением. Это устанавливается из условия прочности на смятие, которое имеет вид:



$$\sigma_{CM} = \frac{P}{F_{CM}} \leq [\sigma_{CM}],$$

Рис. 8.5.

где  $F_{CM}$  – расчетная площадь смятия;  
 $[\sigma_{CM}]$  – допустимое напряжение смятия.

Расчетная площадь смятия принимается равной: в случае контакта деталей своими плоскими поверхностями (см. рис. 8.5, а) – действительной площади контакта, то есть  $F_{CM} = ab$ ; в случае контакта по цилиндрической поверхности (см. рис. 8.5, б) – площади проекции поверхности контакта на диаметральную плоскость, то есть  $F_{CM} = dt$ .

**Пример 8.2.** Определить силу  $P$ , необходимую для пробивания (просечки) прямоугольного отверстия в листе, и напряжение смятия пуансона, если  $t = 8$  мм,  $a = 20$  мм,  $b = 30$  мм, предел прочности на срез материала листа  $\tau_{CP} = 250$  МПа (см. рис. 8.5, а).

Решение. Для пробивания отверстия в листе необходимо превысить допустимое напряжение для материала листа. Напряжение в листе возникает вследствие нагрузки силой  $P$ , которая и является разрушающей. Поэтому для этой задачи условие прочности примет предельное значение, то есть

$$\tau_{CP} = \frac{P}{F_{CP}} = \frac{P}{(2a + 2b)t} = [\tau_{CP}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = [\tau_{CP}](2a + 2b)t = 250 \cdot 10^6 (2 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,03) 8 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

*Прим.* Площадь среза в этом случае равна произведению периметра пробиваемого отверстия на толщину листа, то есть  $F_{CP} = (2a + 2b)t$ .

Напряжение смятия пуансона:

$$\sigma_{CM} = \frac{P}{F_{CM}} = \frac{P}{ab} = \frac{2 \cdot 10^5}{0,02 \cdot 0,03} = 3,33 \cdot 10^8 \text{ Па} = 333 \text{ МПа.}$$

**Пример 8.3.** Максимальная сила  $P$ , которая развивается прессом, равна 300 кН. Определить самые большие размеры прямоугольного отверстия с отношением сторон  $b/a = 2$ , которое можно пробить в стальных и алюминиевых листах толщиной  $t = 10$  мм (см. рис. 7.5, а). Предел прочности на срез стали  $[\tau_{(CT)}] = 320$  МПа, алюминия  $[\tau_{(АЛ)}] = 200$  МПа.

Решение. Для пробивания (просечки) отверстия в листе (задача на срез) необходимо выполнить условие:

$$\tau_{CP} = \frac{P}{F_{CP}} > [\tau],$$



где  $F_{CP}$  – площадь поверхности среза листа, равна боковой поверхности параллелепипеда размерами в проекции  $a \times b$  и высотой  $t$ ,

$$F_{CP} = 2(a + b)t = 2(a + 2a)t = 6at,$$

$$\tau_{CP} = \frac{P}{6at} > [\tau] \Rightarrow a < \frac{P}{6t[\tau]}.$$

Подставляя численные значения, получаем:

– для стального листа

$$a < \frac{P}{6t[\tau_{(CT)}]} = \frac{300 \cdot 10^3}{6 \cdot 0,01 \cdot 320 \cdot 10^6} = 0,016 \text{ м}; \quad b = 2 \cdot 0,016 = 0,032 \text{ м};$$

– для алюминиевого листа

$$a < \frac{P}{6t[\tau_{(АЛ)}]} = \frac{300 \cdot 10^3}{6 \cdot 0,01 \cdot 200 \cdot 10^6} = 0,025 \text{ м}; \quad b = 2 \cdot 0,025 = 0,05 \text{ м}.$$

**Пример 8.4.** Две стальных полосы соединены одной заклепкой (рис. 8.5, б). Определить необходимый диаметр заклепки, если  $[\tau_{CP}] = 125$  МПа,  $[\sigma_{CM}] = 175$  МПа,  $P = 5$  кН,  $t = 2,5$  мм.

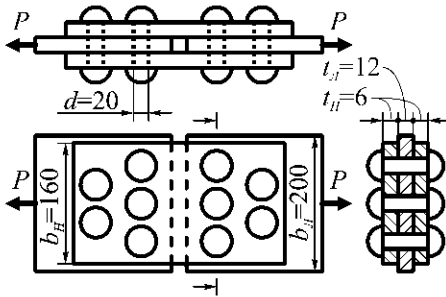


Рис. 7.6

Решение. Запишем для заданной конструкции условия прочности, из которых определим диаметр заклепки.

Условие прочности на срез:

$$\tau_{CP} = \frac{P}{F_{CP}} = \frac{P}{\pi d^2} = \frac{4P}{\pi d^2} \leq [\tau_{CP}] \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau_{CP}]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,016 \text{ м}.$$

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{CM} = \frac{P}{F_{CM}} = \frac{P}{dt} \leq [\sigma_{CM}] \Rightarrow d = \frac{P}{t[\sigma_{CM}]} = \frac{5 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 175 \cdot 10^6} = 0,011 \text{ мм}.$$

Из двух значений диаметров заклепки, полученных в результате расчетов на прочность при срезе и смятии, принимаем больший потому, что он удовлетворяет обоим условиям прочности:  $d = 0,016 \text{ м} = 16 \text{ мм}$ .

$$\tau_{CP} = \frac{P}{F_{CP}} \leq [\tau_{CP}],$$

где  $F_{CP}$  – площадь поперечного сечения заклепок,

**Пример 8.5.** Проверить прочность заклепочного соединения (рис. 7.6), если  $[\sigma_P] = 125$  МПа,  $[\tau_{CP}] = 100$  МПа,  $[\sigma_{CM}] = 240$  МПа,  $P = 200$  кН. Что ограничивает возможное увеличение нагрузки  $P$ ?

Решение. Установим все возможные условия прочности, из которых определим неизвестные параметры.

Условие прочности на срез заклепок:

$$F_{CP} = \frac{\pi d^2}{4} n_{CP} n_3,$$

$d$  – диаметр заклепки,  $d = 0,02$  м;

$n_{CP}$  – число срезов каждой заклепки,  $n_{CP} = 2$ ;

$n_3$  – число заклепок с одной стороны заклепочного соединения,  $n_3 = 5$ ,

$$F_{CP} = \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 2 \cdot 5 = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$\tau_{CP} = \frac{200 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^{-3}} = 6,37 \cdot 10^7 \text{ Па} = 63,7 \text{ МПа} \leq [\tau_{CP}] = 100 \text{ МПа}.$$

Условие прочности на смятие листов или заклепок:

$$\sigma_{CM} = \frac{P}{F_{CM}} \leq [\sigma_{CM}],$$

где  $F_{CM}$  – площадь смятия заклепок,

$$F_{CM} = d t_L n_{CM} n_3,$$

$n_{CM}$  – число площадок смятия заклепки  $n_{CM} = 1$ ;

$t_L$  – толщина листа,  $t_L = 0,012$  м;

$n_3$  – число заклепок с одной стороны заклепочного соединения,  $n_3 = 5$ ,

$$F_{CM} = 0,02 \cdot 0,012 \cdot 1 \cdot 5 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$\sigma_{CM} = \frac{200t \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-3}} = 1,67 \cdot 10^8 \text{ Па} = 167 \text{ МПа} \leq [\sigma_{CM}] = 240 \text{ МПа}.$$

Условие прочности на растяжение листов:

$$\sigma_{PL} = \frac{P}{F_{PL}} \leq [\sigma_P],$$

где  $F_{PL}$  – площадь поперечного сечения листа,

$$F_{PL} = (b_L - 3d)t_L,$$

$b_L$  – ширина листа,  $b_L = 0,20$  м,

$$F_{PL} = (0,20 - 3 \cdot 0,02) \cdot 0,012 = 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_{PL} = \frac{200 \cdot 10^3}{1,68 \cdot 10^{-3}} = 1,19 \cdot 10^8 \text{ Па} = 119 \text{ МПа} \leq [\sigma_P] = 125 \text{ МПа}.$$

Условие прочности на растяжение накладок:

$$\sigma_{PH} = \frac{P}{F_P} \leq [\sigma_P],$$

где  $F_{PH}$  – площадь поперечного сечения накладок,

$$F_{PH} = 2(b_H - 3d)t_H,$$

$b_H$  – ширина накладок,  $b_H = 0,16$  м;

$t_H$  – толщина накладок,  $t_H = 0,006$  м,

$$F_{PH} = 2(0,16 - 3 \cdot 0,02) \cdot 0,008 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_{PH} = \frac{200 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-3}} = 1,25 \cdot 10^8 = 125 \text{ МПа} = [\sigma_P] = 125 \text{ МПа}.$$

Таким образом, увеличение нагрузки на соединение ограничивает прочность накладок.

**Пример 8.6.** Два вала диаметром  $d_B = 60$  мм соединены между собой дисковой муфтой (рис 8.7). Каждую полушпунку от вращения на валу предотвращает шпонка поперечным сечением  $b_{Ш} \times h_{Ш} = 18 \times 11$  мм<sup>2</sup>.

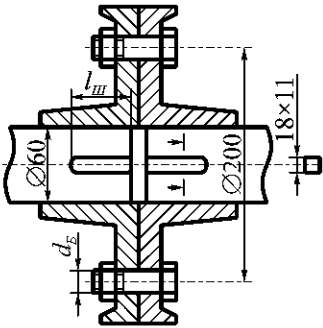


Рис. 8.7

Полумуфты скреплены четырьмя болтами диаметром  $d_B$ , которые расположены по окружности диаметром  $D = 200$  мм. Муфта передаёт мощность  $N = 30$  кВт при угловой скорости  $n = 115$  мин<sup>-1</sup>. Определить диаметр болтов  $d_B$  и длину шпонки  $l_{Ш}$ , если допустимые напряжения для материалов болта и шпонки  $[\tau_{CP}] = 30$  МПа,  $[\sigma_{CM}] = 110$  МПа.

Решение. Определим крутящий момент, который передается муфтой от одного вала к другому:

$$M_K = 9,549 \frac{N}{n} = 9,549 \cdot \frac{30 \cdot 10^3}{115} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определим силу среза  $P_B$ , которая действует на один болт:

$$M_K = P_B \frac{D}{2} \cdot 4 \Rightarrow P_B = \frac{2M_K}{4D} = \frac{2 \cdot 2500}{4 \cdot 0,2} = 6250 \text{ Н}.$$

Диаметр болта определяем из условия прочности на срез:

$$\tau_{CP} = \frac{P_B}{F_{CP}} = \frac{P_B}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau_{CP}] \Rightarrow d_B = \sqrt{\frac{4P_B}{\pi[\tau_{CP}]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6250}{\pi \cdot 30 \cdot 10^6}} = 0,016 \text{ м}.$$

Определим силу среза  $P_{Ш}$ , которая действует на шпонку:

$$M_K = P_{Ш} \frac{d_B}{2} \Rightarrow P_{Ш} = \frac{2M_K}{d_B} = \frac{2 \cdot 2500}{0,06} = 83333 \text{ Н}.$$

Определим длину шпонки из условий прочности на срез и смятие:

$$\tau_{CP} = \frac{P_{Ш}}{F_{CP}} = \frac{P_{Ш}}{b_{Ш} l_{Ш}} \leq [\tau_{CP}] \Rightarrow l_{Ш} = \frac{P_{Ш}}{b_{Ш} \tau_{CP}} = \frac{83333}{0,018 \cdot 30 \cdot 10^6} = 0,15 \text{ м};$$

$$\tau_{CM} = \frac{P_{Ш}}{F_{CM}} = \frac{P_{Ш}}{0,5 h_{Ш} l_{Ш}} \leq [\tau_{CM}] \Rightarrow l_{Ш} = \frac{P_{Ш}}{0,5 h_{Ш} \tau_{CM}} = \frac{83333}{0,5 \cdot 0,011 \cdot 30 \cdot 10^6} = 0,137 \text{ м}.$$

Из двух значений длины шпонки, которые получены в результате расчетов на прочность при срезе и смятии, принимаем большую потому, что она удовлетворяет обоим условиям прочности:  $l_{Ш} = 0,15 \text{ м} = 150 \text{ мм}$ .

*Прим.* Для уменьшения длины шпонки можно на каждом валу установить их по две штуки, тогда, в общем случае, их длина будет вдвое меньше.

**Пример 8.7.** Вал передает крутящий момент  $M_K = 27$  кН·м с помощью шлицевого соединения, основные размеры которого указаны на рис. 8.8. Высота шлица  $h = 6$  мм, ширина шлица  $b = 18$  мм, длина шлицевого соединения  $L = 100$  мм, число шлицов на валу  $n = 6$ . Определить напряжение среза и смятия шлицов вала.

### Шлицевой вал Шлицевая ступица

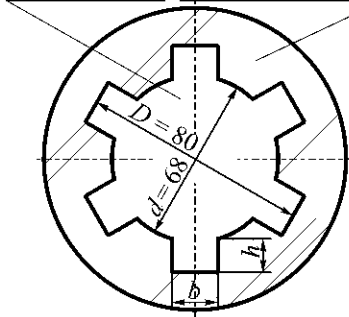


Рис. 8.8

Решение. Предполагая, что все шлицы нагружены одинаково, найдем усилие, которое приходится на один шлиц:

$$M_K = P_{\text{ш}} \frac{d}{2} n \Rightarrow P_{\text{ш}} = \frac{2M_K}{dn} = \frac{2 \cdot 27}{0,068 \cdot 6} = 1,32 \cdot 10^5$$

кН.

Определим напряжение среза и смятие:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{P_{\text{ш}}}{F_{\text{ср}}} = \frac{P_{\text{ш}}}{Lb} = \frac{132 \cdot 10^3}{0,012 \cdot 0,1} = 1,1 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$\sigma_{\text{зм}} = \frac{P_{\text{ш}}}{F_{\text{см}}} = \frac{P_{\text{ш}}}{Lh} = \frac{132 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 0,006} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

### Проверь свои знания!

1. Какое деформирование называется сдвигом?
2. Запишите закона Гука при сдвиге.
3. Запишите формулу для определения напряжений при сдвиге.
4. Запишите формулу для определения напряжений при смятии.
5. Как выполняются расчеты на прочность при сдвиге и смятии?
6. Какой модуль упругости больше:  $E$  или  $G$ ?
7. Как находится условная площадь смятия заклепки?
8. По какому сечению в заклепочном соединении проводится проверка листов на разрыв?

### Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## Литература.

1. Теоретическая и прикладная механика: Учебное пособие для студентов направления подготовки «Профессиональное обучение (по отраслям)» ( в 3-х частях). Часть 1 «Теоретическая механика»: Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им.В.Даля», 2021. - 139с.
2. Журнал лабораторных работ по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки «Профессиональное обучение (по отраслям)». Раздел «Прикладная механика». - Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. - 25с.
3. Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки «Профессиональное обучение (по отраслям)», (раздел «Прикладная механика»). - Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021.-39 с.
4. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили: «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» (в 2-х частях). Часть 1. «Теоретическая механика». - Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ», 2022. - 54 с.
5. Сопротивление материалов /Под ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. - 5-е изд., перераб. и доп. -Киев: Высшая шк., 1986. -775 с.
6. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: Учебник для техн. вузов. -5-е изд., перераб. и доп. -М.: Высшая шк., 1989. -624 с.
7. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. -544 с.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 1999. – 592 с.
9. Сборник задач по сопротивлению материалов /Под редакцией А.С. Вальмира. -М.: Наука, 1984. -408 с.
10. Справочник по сопротивлению материалов /Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.П. Матвеев. Под ред. Г.С. Писаренко. - 2-е изд., перераб. и доп. -Киев: Научная мысль, 1988. -736 с.
11. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для техн. вузов /И.Н. Миролубов, С.А. Енгаличев, Н.Д. Сергиевский и др. – 5-е изд., перераб. и доп. -М.: Высшая шк., 1985. -399 с.

## АЛФАВИТ

ЛАТИНСКИЙ				ГРЕЧЕСКИЙ			
<i>A a</i>	а	<i>N n</i>	эн	Α α	альфа	Ν ν	ню
<i>B b</i>	бе	<i>O o</i>	о	Β β	бета	Ξ ξ	кси
<i>C c</i>	цэ	<i>P p</i>	пе	Γ γ	гамма	Π π	пи
<i>D d</i>	дэ	<i>Q q</i>	ку	Δ δ	дельта	Ρ ρ	ро
<i>E e</i>	е	<i>R r</i>	эр	Ε ε	эпсилон	Σ σ	сигма
<i>F f</i>	эф	<i>S s</i>	эс	Ζ ζ	зета	Τ τ	тау
<i>G g</i>	же	<i>T t</i>	тэ	Η η	эта	Φ φ	фи
<i>H h</i>	аш	<i>U u</i>	у	Θ θ	тета	Χ χ	хи
<i>I i</i>	и	<i>V v</i>	вэ	Ι ι	йота	Υ υ	ипсилон
<i>J j</i>	йот (жи)	<i>W w</i>	дубль-вэ	Κ κ	каппа	Ψ ψ	пси
<i>K k</i>	ка	<i>X x</i>	икс	Λ λ	лямбда	Ω ω	омега
<i>L l</i>	эль	<i>Y y</i>	игрек	Μ μ	мю		
<i>M m</i>	эм	<i>Z z</i>	зет				

## УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Конспект лекций по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» (в 2-х частях). Часть 2.1. Сопротивление материалов.

С о с т а в и т е л ь:  
Валентин Иванович Сафонов

Печатается в авторской редакции.  
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать \_\_\_\_\_  
Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типограф. Гарнитура Times  
Печать офсетная. Усл. печ. л. \_\_\_\_\_. Уч.-изд. л. \_\_\_\_\_  
Тираж 100 экз. Изд. № \_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного  
университета имени Владимира Даля

*Свидетельство о государственной регистрации издательства  
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015 г.*

**Адрес издательства:** 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а  
**Телефон:** 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60  
**E-mail:** izdat.lguv.dal@gmail.com **http:** //izdat.dahluniver.ru/