

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

СТАХАНОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ФИЛИАЛ)

ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

КАФЕДРА ОБЩЕИНЖЕНЕРНЫХ ДИСЦИПЛИН

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**  
**по дисциплине**

**«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»**

**для студентов направления подготовки**

**Профессиональное обучение (по отраслям),**

профили «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение»,  
«Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Под-  
земная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханиче-  
ское оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и  
руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» (в  
2-х частях).

**Часть 2.2 Сопротивление материалов**

**Конспект лекций по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика»** для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» (в 2-х частях). **Часть 2.2. Соппротивление материалов.** /Сост.: В.И. Сафонов. – **Стаханов:** ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», 2023. – 69 с.

В конспекте лекций изложены основные разделы дисциплины «Соппротивление материалов» курса «Теоретическая и прикладная механика». Для иллюстрации изложенного теоретического материала приведены многочисленные примеры задач с решениями. Для контроля усвоения материала представлены контрольные вопросы, которые делают конспект полезным при самостоятельном изучении дисциплины.

Предназначены для студентов профиля «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело».

Составитель: доц. Сафонов В.И.

Ответственный за выпуск: доц. Сафонов В.И.

Рецензент: доц. Петров А.Г.

## СОДЕРЖАНИЕ

9	КРУЧЕНИЕ	4
9.1	Определение крутящих моментов	4
9.2	Построение эпюры крутящих моментов	4
9.3	Расчеты на прочность и жесткость при кручении	5
	Проверь свои знания!	12
	Литература	13
10	ИЗГИБ	13
10.1	Понятие об изгибе	13
10.2	Опоры балки при изгибе	14
10.3	Внутренние усилия при изгибе	16
10.4	Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	18
10.5	Закономерности построения эпюр $Q$ и $M_{изг}$	25
10.6	Нормальные напряжения при изгибе	26
10.7	Расчеты на прочность при изгибе по нормальным напряжениям	27
10.8	Расчеты на прочность при изгибе по касательным напряжениям	28
10.9	Определение перемещений при изгибе	33
10.10	Определение перемещений в балках по методу начальных параметров	33
10.11	Понятие о составных балках	34
	Проверь свои знания!	35
	Литература	36
11	СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	36
11.1	Общие понятия о сложном сопротивлении	36
11.2	Косой изгиб	37
11.3	Изгиб с растяжением (сжатием)	42
11.4	Внецентренное сжатие	44
11.5	Изгиб с кручением	45
	Проверь свои знания!	48
	Литература	48
12	УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ	48
12.1	Критическая сила и критическое напряжение	48
12.2	Расчеты сжатых стержней на устойчивость	51
	Проверь свои знания!	56
	Литература	57
13	ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ	57
13.1	Динамические нагрузки при поступательном движении системы	57
13.2	Динамические нагрузки при вращательном движении системы	58
13.3	Динамические нагрузки при ударе	59
	Проверь свои знания!	63
	Литература	64
14	ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАПРЯЖЕНИИ	64
14.1	Явление усталости	64
14.2	Определение предела выносливости	65
14.3	Влияние различных факторов на усталостное сопротивление	66
	Проверь свои знания!	67
	Литература	67
	Литература	68

## 9 КРУЧЕНИЕ

Кручению подвергаются тела, которые называются валом.

**Кручение** – вид деформирования, когда в поперечных сечениях вала возникает лишь один силовой фактор – крутящий момент. Вал, который работает исключительно на кручение и не испытывает никаких иных нагрузок, называется торсионным валом. Внешними нагрузками при кручении являются пары сил, которые приложены к валу так, что плоскости их действия перпендикулярны его продольной оси.

Основная единица измерения крутящего момента – Н·м.

### 9.1 Определение крутящих моментов

Если известны передаваемые валом мощность  $N$  (измеряется в кВт или л.с.) и частота его вращения  $n$  (измеряется в мин<sup>-1</sup>) или угловая скорость  $\omega$  (измеряется в с<sup>-1</sup>), то крутящий момент  $M_K$  в сечении вала может быть вычислен по формуле

$$M_K = 9,549 \frac{N[\text{кВт}]}{n[\text{ммин}^{-1}]} = \frac{N[\text{кВт}]}{\omega[\text{с}^{-1}]} = 7,0288 \frac{N[\text{л.с.}]}{n[\text{ммин}^{-1}]} = 0,736 \frac{N[\text{л.с.}]}{\omega[\text{с}^{-1}]} \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### 9.2 Построение эпюры крутящих моментов

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях валов или стержней, определяются приложенным внешним крутящим моментом с использованием метода сечений.

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к валу, по одну сторону от рассматриваемого сечения.

При расчетах на прочность и жесткость вала знак крутящего момента не имеет значения, но при построении эпюр крутящих моментов полагается, что крутящий момент будет положительным, если при взгляде в торец части вала, которая рассматривается, действующий на него момент со стороны отсеченной и отброшенной части вала будет направлен по ходу часовой стрелки (см. рис. 9.1).

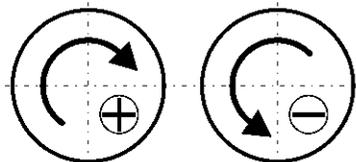


Рис 9.1

График, показывающий закон изменения крутящих моментов вдоль вала, называется эпюрой крутящих моментов.

В качестве примера построим эпюры крутящих моментов, действующих на вал, который с помощью четырёх шкивов передает мощность к отдельным узлам машины (см. рис. 9.2). Крутящие моменты, действующие на вал через шкивы, равны:  $M_1 = 400$  Н·м;  $M_2 = 900$  Н·м;  $M_3 = 700$  Н·м;  $M_4 = 200$  Н·м. Трением в подшипниках пренебречь.

Определим крутящие моменты в сечениях 1, 2, 3, рассматривая равновесие соответствующих частей вала.

$$\text{Сечение 1: } -M_1 + M_{K1} = 0 \Rightarrow M_{K1} = M_1 = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Сечение 2: } -M + M_2 + M_{K2} = 0 \Rightarrow M_{K2} = M_1 - M_2 = 400 - 900 = -500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Сечение 3: } -M_1 + M_2 - M_3 + M_{K3} = 0 \Rightarrow M_{K3} = M_1 - M_2 + M_3 =$$

$$= 400 - 900 + 700 = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

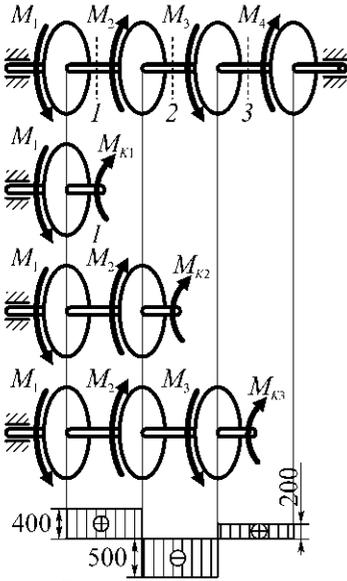


Рис. 9.2

По найденным значениям крутящих моментов в произвольно выбранном масштабе строим эпюру крутящих моментов, откладывая положительные ординаты вверх от оси, а отрицательные – вниз.

Крутящие моменты на каждом участке рассмотренного вала является величиной постоянной. В сечениях, где через шкивы к валу приложены сосредоточенные внешние моменты, на эпюре наблюдаются скачки на величину этих моментов.

Из анализа эпюры следует, что самый большой крутящий момент в сечениях вала равен 500 Н·м (хотя к валу приложен момент  $M_2 = 900 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ). Эту величину необходимо использовать при расчетах на прочность и жесткость при кручении.

### 9.3 Расчеты на прочность и жесткость при кручении.

В основе расчетов на прочность и жесткость при кручении валов круглого поперечного сечения положены следующие четыре допущения:

1. Поперечные сечения вала остаются плоскими и нормальными как до деформирования, так и после него. Они поворачиваются на некоторые углы вокруг оси вала.
2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину.
3. Расстояния между поперечными сечениями вала не меняются.
4. Материал вала при деформировании подчиняется закону Гука.

Касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения (рис. 9.3) определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_K}{I_P} \rho,$$

где  $M_K$  – крутящий момент в сечении;

$I_P$  – полярный момент инерции поперечного сечения; для вала круглого поперечного сечения  $I_P = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ ; для вала кольцевого поперечного сечения

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4); \quad \alpha = \frac{d}{D};$$

$\rho$  – расстояние от центра веса поперечного сечения до точки, в которой определяется напряжения.

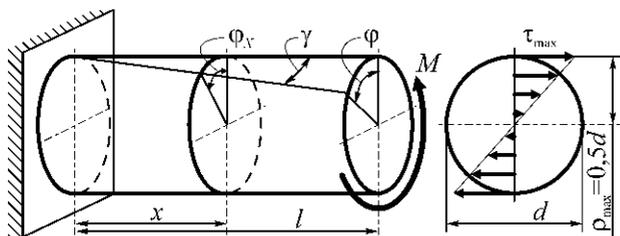


Рис. 9.3

Максимальные касательные  $\tau_{\max}$  напряжения наблюдаются в точках, которые находятся на самом большом расстоянии от центра вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P},$$

где  $W_P$  – момент сопротивления кручению, для круглого и кольцевого поперечных сечений соответственно

$$W_{P \text{ круг}} = \frac{I_P}{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3;$$

$$W_{P \text{ кольцо}} = \frac{I_P}{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4).$$

**Расчеты на прочность** при кручении основаны на условии прочности при кручении, в котором допускается, что напряжения, возникающие в поперечных сечениях вала, не превышают допустимых:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  – допустимое напряжение для материала вала при кручении.

**Расчеты на жесткость** при кручении основаны на условии жесткости при кручении, в котором допускается, что угол закручивания отдельных участков вала не превышает допустимого:

$$\varphi [\text{рад}] = \frac{M_K l}{G I_P} \leq [\theta];$$

$$\varphi^\circ [\text{град}] = \frac{180 M_K l}{G I_P \pi} \leq [\theta^\circ],$$

где  $l$  – длина участки вала;

$G$  – модуль упругости второго рода материала вала;

$[\theta]$  – допустимый угол закручивания.

Относительный угол закручивания (угол закручивания одного метра длины вала) определяется по формуле:

$$\theta [\text{рад}] = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_K}{G I_P};$$

$$\theta^\circ [\text{град}] = \frac{180 M_K}{G I_P \pi}.$$

**Пример 9.1.** На валу жестко закреплены четыре шкива (рис. 9.4). На первый шкив от двигателя передается мощность  $N_1 = 48$  кВт. С трех других шкивов снимаются мощности соответственно  $N_2 = 22$  кВт,  $N_3 = 14$  кВт,  $N_4 = 12$  кВт. Определить из расчетов на прочность и жесткость диаметры двух валов различного конструктивного исполнения – сплошного сечения и кольцевого сечения с отноше-

нием внутреннего диаметра к внешнему  $\alpha = 0,7$ . Принять  $[\tau] = 25$  МПа,  $[\theta] = 0,3$  град/м,  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Вал оборачивается с угловой скоростью  $\omega = 23$  советов/с.

Решение. Определим значение моментов, которые передаются каждым со шкивов:

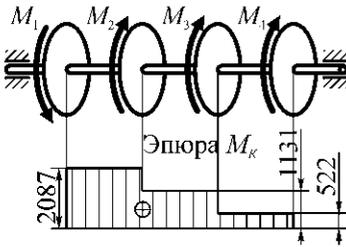


Рис. 9.4

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{48000}{23} = 2087 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = \frac{N_2}{\omega} = \frac{22000}{23} = 956 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{14000}{23} = 609 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = \frac{N_4}{\omega} = \frac{13000}{23} = 522 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построим эпюру крутящих моментов, на которой определим наибольшее абсолютное значение крутящего момента  $M_{K \max} = 2087$  Н·м.

Определим необходимый момент сопротивления кручению вала из расчета на прочность:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K \max}}{W_P} \leq [\tau] \Rightarrow W_P = \frac{M_{K \max}}{[\tau]} = \frac{2087}{25 \cdot 10^6} = 8,348 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Определим диаметр  $d_K$  вала круглого поперечного сечения, внешний  $D$  и внутренний  $d$  диаметры вала кольцевого поперечного сечения из расчета на прочность:

$$W_P \approx 0,2d_K^3 \Rightarrow d_K = \sqrt[3]{\frac{W_P}{0,2}} = \sqrt[3]{\frac{8,348 \cdot 10^{-5}}{0,2}} = 0,075 \text{ м};$$

$$W_P = 0,2D^3(1 - \alpha^4) \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{W_P}{0,2(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{8,348 \cdot 10^{-5}}{0,2(1 - 0,7^4)}} = 0,082 \text{ м};$$

$$d = \alpha D = 0,7 \cdot 0,082 = 0,057 \text{ м}.$$

Определим необходимый полярный момент инерции сечения вала из расчета на жесткость:

$$\theta = \frac{M_K \cdot 180^\circ}{G I_P \pi} \leq [\theta] \Rightarrow I_P = \frac{M_K \cdot 180^\circ}{G [\theta] \pi} = \frac{2087 \cdot 180^\circ}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,3 \pi} = 4,98 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Определим диаметр  $d_K$  вала круглого поперечного сечения, внешний  $D$  и внутренний  $d$  диаметры вала кольцевого поперечного сечения из расчета на жесткость:

$$I_P = 0,1d_K^4 \Rightarrow d_K = \sqrt[4]{\frac{I_P}{0,1}} = \sqrt[4]{\frac{4,98 \cdot 10^{-6}}{0,1}} = 0,084 \text{ м};$$

$$I_P = 0,1D^4(1 - \alpha^4) \Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{I_P}{0,1(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{4,98 \cdot 10^{-6}}{0,1(1 - 0,7^4)}} = 0,090 \text{ м};$$

$$d = \alpha D = 0,7 \cdot 0,090 = 0,063 \text{ м}.$$

Вычисленные размеры поперечного сечения вала из расчета на жесткость

больше, чем из расчета на прочность, поэтому именно они должны быть приняты для изготовления вала.

Нетрудно убедиться в том, что, если первый шкив расположить не на конце вала, то расчетный крутящий момент, который будет действовать на вал, уменьшится (убедитесь в этом самостоятельно). Поэтому можно сделать вывод о том, что ведущий шкив необходимо располагать между ведомыми шкивами, передающими мощности рабочим машинам, так, чтобы моменты, которые передают участкам вала слева и справа от него, были по возможности одинаковыми.

**Пример 9.2.** Для вала (см. рис. 9.5) определить диаметры отдельных его участков из условия прочности на кручение при заданном запасе прочности  $n$  и величину углов закручивания на отдельных участках, если  $a = 0,5$  м,  $\omega = 50$  с<sup>-1</sup>,  $n = 2,5$ ; мощности, которые передаются шкивами 1, 2, 3 и 4 соответственно  $N_1 = 20$  кВт,  $N_2 = 60$  кВт,  $N_3 = 30$  кВт,  $N_4 = 40$  кВт; материал вала – Ст20, для которого  $[\tau] = 160$  МПа,  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа,  $[\theta] = 2,5^\circ/\text{м}$ .

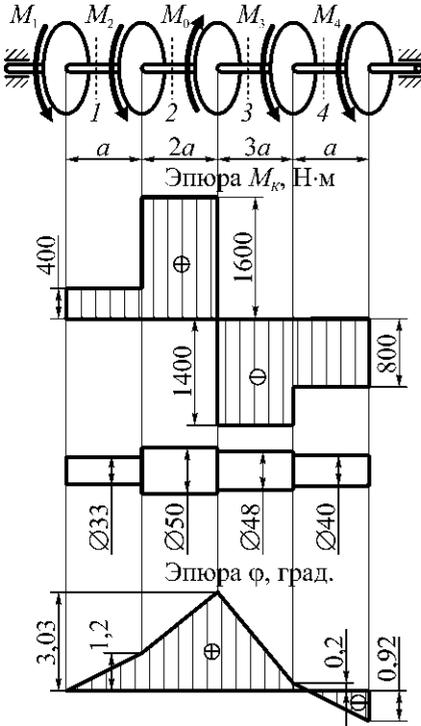


Рис. 9.5

Решение. Определим мощность, передаваемую шкивом  $\theta$  (к нему приложен момент  $M_0$ );

$$\begin{aligned} \sum N &= 0: -N_1 - N_2 + N_0 - N_3 - N_4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_0 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \\ &= 20 + 60 + 30 + 40 = 150 \text{ кВт}. \end{aligned}$$

Определим крутящие моменты, передаваемые каждым шкивом по общей

формуле  $M = \frac{N}{\omega}$ :

$$M_0 = \frac{150}{50} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_1 = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = \frac{60}{50} = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = \frac{30}{50} = 0,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = \frac{40}{50} = 0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

*Прим.* В этих формулах числитель представлен значениями мощности, которая выражена в кВт, поэтому результат – крутящие моменты – выражены в кН·м.

Построим эпюры крутящих моментов  $M_k$ , для чего определим крутящие

моменты, действующие на отдельных участках вала.

Для определения крутящих моментов на отдельных участках вала разобьем его на участки. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние крутящие моменты. Методом сечений определяем эти крутящие моменты на каждом участке.

При составлении уравнений равновесия предполагаем, что крутящий момент, который рассматривается, положительный, то есть – направлен по ходу часовой стрелки, а окончательно знак рассматриваемого крутящего момента получим при решении.

$$\text{Сечение 1: } \sum M = 0: -M_1 + M_{K1} = 0 \Rightarrow M_{K1} = M_1 = 400 \text{ Н}\cdot\text{м} = \text{const.}$$

$$\text{Сечение 2: } \sum M = 0: -M_1 - M_2 + M_{K2} = 0 \Rightarrow M_{K2} = M_1 + M_2 = 400 + 1200 = 1600 \text{ Н}\cdot\text{м} = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \text{Сечение 3: } \sum M = 0: -M_1 + M_2 + M_0 + M_3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{K3} = M_1 + M_2 - M_0 = 400 + 1200 - 3000 = -1400 \text{ Н}\cdot\text{м} = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Сечение 4: } \sum M = 0: -M_1 - M_2 + M_0 - M_3 + M_{K4} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{K4} = M_1 + M_2 - M_0 + M_3 = 400 + 1200 - 3000 + 600 = -800 \end{aligned}$$

Н·м = const.

Строим эпюру  $M_K$ , для чего параллельно оси вала проводим «нулевую» линию и по назначенному масштабу откладываем от нее вычисленные крутящие моменты (см. рис. 9.4).

Определим диаметры вала на отдельных участках из условия прочности. Для этого с учетом коэффициента запаса прочности  $n$  определим допускаемое напряжение в материале вала:

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{n} = \frac{160 \cdot 10^6}{2,5} = 64 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Учитывая, что диаметр вала и момент сопротивления кручению связаны зависимостью  $W_p \approx 0,2d^3$ , из условия прочности при кручении имеем:

$$\tau = \frac{M_K}{W_p} = \frac{M_K}{0,2d^3} \leq [\tau] \Rightarrow d \geq 3 \sqrt{\frac{M_K}{0,2[\tau]}}.$$

Тогда для каждого из четырех участков вала его наименьший диаметр  $d$  будет равен:

$$d_1 = 3 \sqrt{\frac{M_{K1}}{0,2[\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{400}{0,2 \cdot 64 \cdot 10^6}} = 0,032 \text{ м,}$$

$$d_2 = 3 \sqrt{\frac{M_{K2}}{0,2[\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{1600}{0,2 \cdot 64 \cdot 10^6}} = 0,05 \text{ м,}$$

$$d_3 = 3 \sqrt{\frac{M_{K3}}{0,2[\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{1400}{0,2 \cdot 64 \cdot 10^6}} = 0,048 \text{ м,}$$

$$d_4 = 3 \sqrt{\frac{M_{K4}}{0,2[\tau]}} = 3 \sqrt{\frac{800}{0,2 \cdot 64 \cdot 10^6}} = 0,04 \text{ м.}$$

Определим углы закручивания  $\varphi$  и относительные углы закручивания  $\theta$  на

отдельных участках вала:

$$\varphi_{AB}^{\circ} = \frac{M_{K1} l_{AB}}{GI_{P1}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{400 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,032^4} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = 1,37^{\circ};$$

$$\theta_{AB}^{\circ} = \frac{\varphi_{AB}}{l_{AB}} = \frac{1,37}{0,5} = 2,74^{\circ}/\text{м};$$

$$\varphi_{BC}^{\circ} = \frac{M_{K2} l_{BC}}{GI_{P2}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{1600 \cdot 1,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,05^4} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = 1,83^{\circ};$$

$$\theta_{BC}^{\circ} = \frac{\varphi_{BC}}{l_{BC}} = \frac{1,83}{2 \cdot 0,5} = 1,83^{\circ}/\text{м};$$

$$\varphi_{CD}^{\circ} = \frac{M_{K3} l_{CD}}{GI_{P3}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{-1400 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,048^4} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = -2,83^{\circ};$$

$$\theta_{CD}^{\circ} = \frac{\varphi_{CD}}{l_{CD}} = \frac{2,83}{3 \cdot 0,5} = 1,89^{\circ}/\text{м};$$

$$\varphi_{DE}^{\circ} = \frac{M_{K4} l_{DE}}{GI_{P4}} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{-800 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,04^4} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = -1,12^{\circ};$$

$$\theta_{DE}^{\circ} = \frac{\varphi_{DE}}{l_{DE}} = \frac{1,12}{0,5} = 2,24^{\circ}/\text{м}.$$

На участках вала  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$  необходимая жесткость обеспечивается ( $\theta < [\theta]$ ), а на участке  $AB$  необходимая жесткость не обеспечивается ( $\theta > [\theta]$ ). Поэтому диаметр вала на участке  $AB$  необходимо определять из условия жесткости:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 = \frac{M_{K1}}{GI_{P1}} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\theta]; \\ I_{P1} \approx 0,1 d_1^4, \end{aligned} \right\} \Rightarrow d_1 = \sqrt[4]{\frac{M_{K1} \cdot 180}{G \cdot 0,1 [\theta] \pi}} = \sqrt[4]{\frac{400 \cdot 180}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 2,5 \pi}} = 0,033 \text{ м}.$$

Тогда угол закручивания вала на участке  $AB$  составит:

$$\varphi_{AB}^{\circ} = \frac{M_{K1} l_{AB}}{GI_{P1}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{400 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,033^4} \cdot \frac{180}{\pi} = 1,2^{\circ}.$$

Определяем угол поворота характерных сечений. За неподвижное сечение принимаем сечение  $A$ :

$$\varphi_A^{\circ} = 0^{\circ};$$

$$\varphi_B^{\circ} = \varphi_{AB}^{\circ} = 1,2^{\circ};$$

$$\varphi_C^{\circ} = \varphi_B + \varphi_{BC} = 1,2 + 1,83 = 3,03^{\circ};$$

$$\varphi_D^{\circ} = \varphi_C + \varphi_{CD} = 3,03 + (-2,83) = 0,2^{\circ};$$

$$\varphi_E^{\circ} = \varphi_D + \varphi_{DE} = 0,2 + (-1,12) = -0,92^{\circ}.$$

Строим эпюру  $\varphi$ , для чего параллельно оси вала проводим «нулевую» линию и по назначенному масштабу откладываем от нее вычисленные углы закручивания (см. рис. 9.4).

**Пример 9.3.** Стальной вал длиной  $l=1$  м передает мощность  $N=160$  л.с. при

частоте вращения  $n=2200 \text{ мин}^{-1}$ . Определить из условия прочности и жесткости диаметр вала  $D_0$  круглого поперечного сечения, внешний  $D$  и внутренний  $d$  диаметры кольцевого поперечного сечения вала, если допустимые значения напряжения в материале вала  $[\tau] = 70 \text{ МПа}$  и относительного угла закручивания  $[\theta] = 0,3/\text{м}$ , модуль упругости материала вала  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ , отношение внутреннего диаметра к внешнему  $\alpha = d/D = 0,9$ , плотность материала  $\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3$ . Сравнить оба варианта по затратам материала.

Решение. Определим крутящий момент, передаваемый валом:

$$M_K = 7,0288 \frac{N}{n} = 7,0288 \frac{160}{2200} = 0,511 \text{ кН·м.}$$

Определим необходимый момент сопротивления вала кручению из условия прочности при кручении:

$$\tau = \frac{M_K}{W_P} \leq [\tau] \Rightarrow W_P = \frac{M_K}{[\tau]} = \frac{0,511 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^6} = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

В формулы, по которым определяются моменты сопротивления кручению круглого и кольцевого поперечного сечения, подставим численные значения и вычислим диаметр вала круглого сечения  $D_0$ , внешний  $D$  и внутренний  $d$  диаметры вала кольцевого сечения:

$$W_P \approx 0,2D_0^3 \Rightarrow D_0 = \sqrt[3]{\frac{W_P}{0,2}} = \sqrt[3]{\frac{7,3 \cdot 10^{-6}}{0,2}} = 0,033 \text{ м,}$$

$$W_P \approx 0,2D^3(1 - \alpha^4) \Rightarrow D \approx \sqrt[3]{\frac{W_P}{0,2(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{7,3 \cdot 10^{-6}}{0,2(1 - 0,9^4)}} = 0,047 \text{ м,}$$

$$d = \alpha D = 0,9 \cdot 0,047 = 0,042 \text{ м.}$$

Определим необходимый полярный момент инерции поперечного сечения вала кручению из условия жесткости при кручении:

$$\theta^\circ = \frac{M_K}{GI_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \Rightarrow I_P = \frac{M_K 180^\circ}{G[\theta]\pi} = \frac{0,511 \cdot 10^3 \cdot 180^\circ}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,3\pi} = 1,22 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

В формулы, по которым определяются полярные моменты инерции кручению круглого и кольцевого поперечного сечений, подставим численные значения и вычислим из условия жесткости диаметр вала круглого сечения  $D_0$ , внешний  $D$  и внутренний  $d$  диаметры вала кольцевого сечения:

$$I_P \approx 0,1D_0^4 \Rightarrow D_0 \approx \sqrt[4]{\frac{I_P}{0,1}} = \sqrt[4]{\frac{1,22 \cdot 10^{-6}}{0,1}} = 0,059 \text{ м,}$$

$$I_P = 0,1D^4(1 - \alpha^4) \Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{I_P}{0,1(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{1,22 \cdot 10^{-6}}{0,1(1 - 0,9^4)}} = 0,077 \text{ м,}$$

$$d = \alpha_D = 0,9 \cdot 0,077 = 0,069 \text{ м.}$$

Окончательно для каждого вала принимаем диаметры валов из расчета на жесткость при кручении потому, что они наибольшие из полученных и поэтому одновременно удовлетворяют как условию прочности, так и условию жесткости:  $D_0 = 0,033 \text{ м}$ ,  $D = 0,047 \text{ м}$ ,  $d = 0,042 \text{ м}$ .

Определим затраты материала, вычислив массы валов:

$$m_0 = F_0 l \gamma = \frac{\pi D_0^2}{4} l \gamma = \frac{\pi 0,033^2}{4} 1 \cdot 7800 = 6,67 \text{ кг,}$$

$$m = F l \gamma = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} l \gamma = \frac{\pi(0,047^2 - 0,042^2)}{4} 1 \cdot 7800 = 2,73 \text{ кг.}$$

Таким образом, вал кольцевого поперечного сечения легче вала круглого поперечного сечения на  $100 \cdot (6,67 - 2,73) / 6,67 = 59 \%$ .

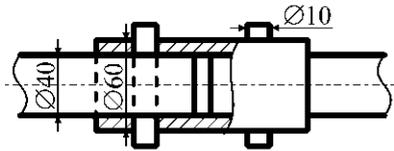


Рис. 9.6.

**Пример 9.4.** Два вала диаметром  $d_B = 0,04$  м соединены муфтой внешним диаметром  $D_M = 0,6$  м со штифтами диаметром  $d_{Ш} = 0,01$  м (рис. 9.6). Определить, что ограничивает передаваемый момент – прочность валов, муфты или штифты муфты. Принять для валов  $[\tau]_B = 40$  МПа, для муфты  $[\tau]_M = 20$  МПа, для штифтов  $[\tau]_{Ш} = 100$  МПа.

При расчетах ослабления валов и муфты отверстиями для штифтов не учитывать.

Решение. Определим допускаемые моменты из условия прочности:

– валов на кручение:

$$\tau_B = \frac{M_K}{W_P} \leq [\tau]_B \Rightarrow M_K = [\tau]_B W_P \approx [\tau]_B 0,2 d_B^3 = 40 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,04^3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кНм;}$$

– муфты на кручение:

$$\begin{aligned} \tau_M = \frac{M_K}{W_P} \leq [\tau]_M &\Rightarrow M_K = [\tau]_M W_P \approx [\tau]_M 0,2 D^3 (1 - \alpha^4) = \\ &= [\tau]_M 0,2 D^3 \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) = 20 \cdot 0,2 \cdot 0,06^3 \left( 1 - \left( \frac{0,04}{0,06} \right)^4 \right) = 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ кНм,} \end{aligned}$$

– штифтов на срез:

$$\tau_{Ш} = \frac{P}{F_{ср}} \leq [\tau]_{Ш} \quad \text{или} \quad \tau_{Ш} = \frac{4P}{2\pi d_{Ш}^2} \leq [\tau]_{Ш}. \quad \text{Так как } P = \frac{2M}{d_B}, \text{ то последнее}$$

уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \tau_{Ш} = \frac{4 \cdot 2M}{2\pi d_{Ш}^2 d_B} \leq [\tau]_{Ш} &\Rightarrow M_K = \frac{[\tau]_{Ш} \pi d_{Ш}^2 d_B}{4} = \\ &= \frac{100 \cdot 10^6 \pi 0,01^2 \cdot 0,04}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ кНм.} \end{aligned}$$

Таким образом, наименее прочным элементом конструкции являются штифты.

### Проверь свои знания!

1. При каком силовом воздействии прямой брус подвергнется деформации

кручения?

2. Как определить передаваемый валом момент по заданной мощности и скорости его вращения?
3. Какое правило знаков принято для крутящего момента?
4. Что представляют собой эпюры крутящих моментов и как они строятся?
5. Какие напряжения возникают при кручении и как они направлены?
6. Какое напряжение возникает в поперечном сечении круглого стержня при кручении? Как находится его значение в произвольной точке сечения?
7. Возникает ли при кручении нормальное напряжение?
8. Запишите формулу для определения напряжения в поперечном сечении круглого вала.
9. Что называется полным и относительным углом закручивания вала?
10. Как определить полный и относительный угол закручивания вала?
11. Что называется жесткостью поперечного сечения при кручении?
12. Что называется полярным моментом сопротивления и как он определяется для круга и кольца?
13. По какой причине вал кольцевого поперечного сечения при кручении экономичнее сплошного?
14. Как выполняется расчет на прочность при кручении?
15. Как выполняется расчет на жесткость при кручении?

## Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 10 ИЗГИБ

### 10.1 Понятие об изгибе

**Изгиб** – такой вид деформации стержня, при которой в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты. Стержень, который работает на сгиб, называется балкой.

Деформация изгиба возникает при нагружении балки силами, которые перпендикулярны её продольной оси, и парами сил, которые действуют в плоскости, проходящей через ось балки.

**Чистый изгиб** – такой вид деформации, при которой в поперечных сечениях балки возникает лишь изгибающий момент.

**Поперечный изгиб** – такой вид деформации, при которой в поперечных сечениях балки возникает одновременно изгибающий момент и поперечная сила.

**Плоский изгиб** – такой вид деформации, при которой все силовые воздействия (активные и реактивные) лежат в одной плоскости.

Плоскость, которая проходит сквозь продольную ось балки и одну из главных центральных осей инерции её поперечного сечения, называется главной плоскостью инерции балки (см. рис. 10.1, а).

**Прямой изгиб** – такой вид деформации, при которой силовая плоскость (то есть плоскость действия нагрузок) совпадает с одной из главных плоско-

стей инерции балки. При прямом изгибе деформация происходит в силовой плоскости, в которой будет лежать согнутая ось балки.

**Косой изгиб** – такой вид деформации, при которой силовая плоскость (то есть плоскость действия нагрузок) не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции балки. При косом изгибе согнутая ось балки не лежит в силовой плоскости.

## 10.2 Опоры балки при изгибе

Неподвижность балки под действием нагрузок обеспечивается благодаря наличию опор, которые соединяют ее с основанием. Для обеспечения геометрической неизменности балки необходимо наложить на нее три связи. При решении задач СМ об изгибе балки необходимо определить реакции опор.

Наиболее распространенными опорами балок являются:

- жесткая заделка (см. рис. 10.2, а). При этом защемленный конец балки не может перемещаться поступательно (благодаря реактивным силам  $R_X$  и  $R_Y$ ) и поворачиваться (благодаря реактивному моменту  $M_R$ );
- шарнирная неподвижная опора (см. рис. 10.2, б). При этом поперечное сечение балки не может перемещаться поступательно (благодаря реактивным силам  $R_X$  и  $R_Y$ ), но может вращаться относительно центра шарнира;
- шарнирная подвижная опора (см. рис. 10.2, в, г). При этом поперечное сечение балки может перемещаться параллельно опорной поверхности и вращаться относительно центра шарнира, но не может двигаться вниз (рис. 10.2, в) или вниз и вверх (рис. 10.2, г) (благодаря реактивной силе  $R_Y$ ).

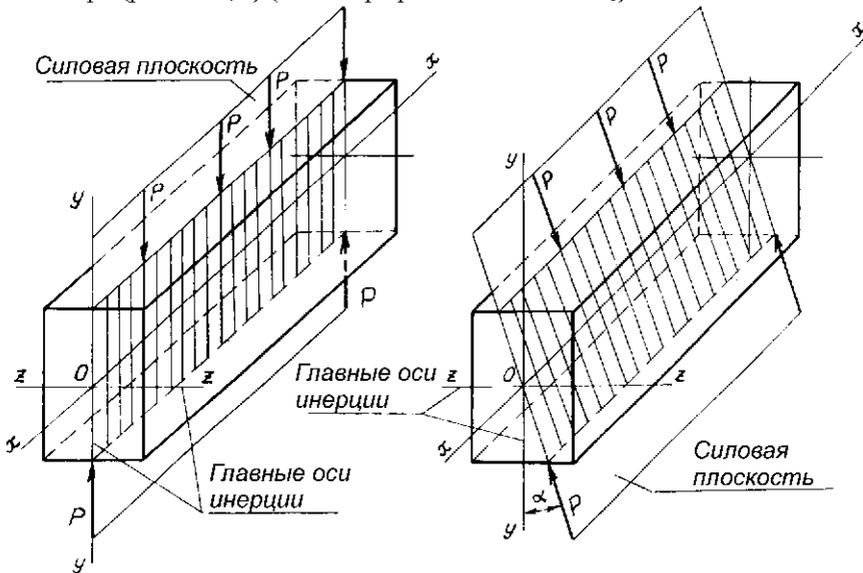


Рис. 10.1

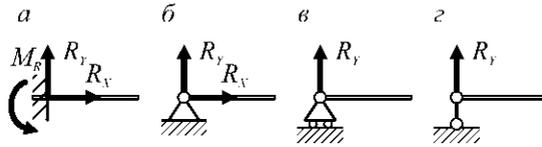


Рис. 10.2

### Пример 10.1.

Определить реакции опор однопролетной двухконсольной балки (см. рис. 10.3).

Решение. Обозначим реакции опор балки  $Y_A$ ,  $X_A$  и  $R_B$ .

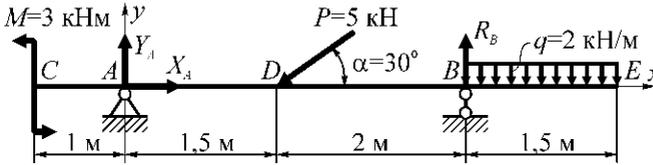


Рис. 10.3

Для полученной двумерной (плоской) системы сил составим три уравнения равновесия, из которых и определим неизвестные реакции опор.

$$\sum P_X = 0: \quad X_A - P \cos \alpha = 0 \Rightarrow X_A = P \cos \alpha = 5 \cdot \cos 30 = 4,33 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: \quad M - (P \sin \alpha) \cdot 1,5 + R_B \cdot 3,5 - q \cdot 1,5 \cdot 4,25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{-M + P \sin 30 \cdot 1,5 + q \cdot 1,5 \cdot 4,25}{3,5} = \frac{-3 + 5 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,5 \cdot 4,25}{3,5} = 3,86 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: \quad M - Y_A \cdot 3,5 + P \sin \alpha \cdot 2 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_A = \frac{M + P \sin \alpha \cdot 2 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75}{3,5} = \frac{3 + 5 \cdot 0,5 \cdot 2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 0,75}{3,5} = 1,64 \text{ кН}.$$

Выполним проверку правильности вычислений, для чего составим уравнение суммы проекций всех сил на ось  $y$ , при подстановке числовых значений в которое должен быть получен ноль:

$$\sum P_Y = R_A - P \sin \alpha + R_B - q \cdot 1,5 = 1,64 - 5 \cdot 0,5 + 3,86 - 2 \cdot 1,5 = 0.$$

*Прим.* Если в результате вычислений какая-либо реакция окажется отрицательной, то на расчётной схеме необходимо изменить её направление на обратное и считать положительной.

*Прим.* Если все нагрузки, действующие на балку, перпендикулярны оси балки, то  $X_A = 0$  и уравнение  $\sum P_X = 0$  не будет иметь смысла.

*Прим.* При решении этой задачи составлялись три уравнения:  $\sum P_X = 0$ ;  $\sum M_A = 0$ ;  $\sum M_B = 0$ . Но может быть составлена иная система уравнений равновесия (см. раздел «Статика. Равновесие плоской системы сил» дисциплины «Теоретическая механика»).

**Пример 10.2.** Для консольной балки (рис. 10.4) определить опорные реакции.

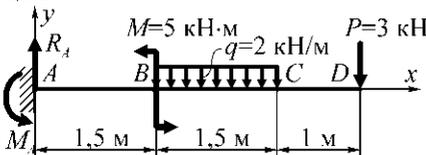


Рис. 10.4

Решение. Обозначим реакции опор балки  $R_A$  и  $M_A$  (т.к. все нагрузки, действующие на балку, перпендикулярны оси балки, то  $X_A = 0$  и уравнение  $\sum P_X = 0$  можно не составлять).

Опорную реакцию  $R_A$  и момент  $M_A$  определим из следующих уравнений

равновесия:

$$\sum P_Y = 0: \quad R_A - q \cdot 1,5 - P = 0 \Rightarrow R_A = q \cdot 1,5 + P = 2 \cdot 1,5 + 3 = 6 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A + M - q \cdot 1,5 \cdot 2,25 - P \cdot 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_A = -M + q \cdot 1,5 \cdot 2,25 + P \cdot 4 = -5 + 2 \cdot 1,5 \cdot 2,25 + 3 \cdot 4 = 13,75 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### 10.3 Внутренние усилия при изгибе

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия – поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M_{изг}$ . Для их определения применяется метод сечений.

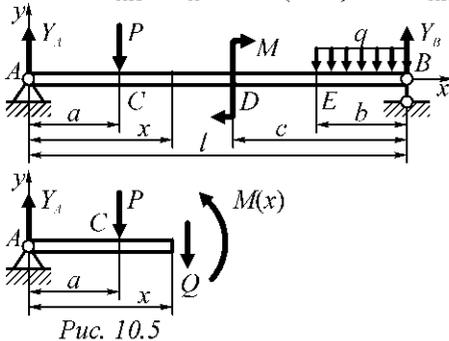
**Пример 10.3.** Для заданной балки определить поперечную силу  $Q$  и изгибающий момент  $M_{изг}$  на расстоянии  $x$  от левой опоры (см. рис. 10.5).

Составим два уравнения равновесия, из которых определим  $Q$  и  $M_{изг}$ :

$$\sum P_Y = 0: \quad Y_A - P - Q = 0 \Rightarrow Q = Y_A - P \text{ или } Q = \sum P_{Yk};$$

$$\sum M_O = 0: \quad -Y_A x + P(x - a) + M_{изг} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{изг} = Y_A \cdot x - P(x - a) \text{ или } M_{изг} = \sum M_O(P_k).$$



Решение. Для определения поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M_{изг}$  в заданном сечении балка мысленно рассекается. Откидывается одна из частей балки (по условию задачи правая) и рассматривается равновесие оставшейся левой части. Действие правой части балки на левую заменяется внутренними усилиями – поперечной силой  $Q$  и изгибающим моментом  $M_{изг}$ .

Таким образом, при анализе полученных уравнений можно сделать следующие выводы:

- поперечная сила  $Q$  в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, которые действуют с одной стороны от сечения;

- изгибающий момент  $M_{изг}$  в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил и моментов, действующих с одной стороны от данного сечения, вычисленные относительно центра  $O$ .

Определим общие принципы решения задач на изгиб.

Установим правило знаков для  $Q$  и  $M_{изг}$  в балках.

Поперечная сила  $Q$  в сечении считается положительной, если её вектор пытается повернуть часть балки, которая рассматривается, по направлению движения часовой стрелки (см. рис. 10.6, а), и отрицательной, если её вектор пытается повернуть часть балки против направления движения часовой стрелки.

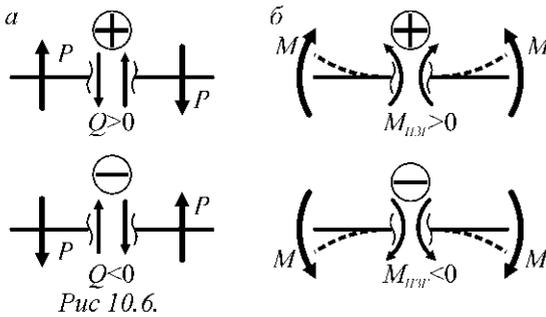


Рис 10.6.

Изгибающий момент  $M_{изг}$  в сечении считается положительным, если внешняя сила (момент) пытается изогнуть часть балки, которая рассматривается, выпуклостью вниз (см. рис. 55.6, б), и отрицательной, если внешняя сила (момент) пытается изогнуть часть балки выпуклостью вверх.

В случае действия распределенной нагрузки картина возникновения внутреннего изгибающего момента и поперечной силы отличается от рассмотренных выше.

Для установления картины возникновения внутреннего изгибающего момента и поперечной силы при действии распределенной нагрузки рассмотрим балку (см. рис. 10.7, а). Будем считать распределенную нагрузку положительной, если она направлена вверх.

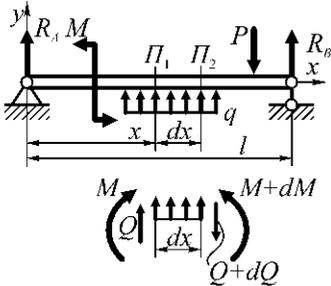


Рис. 10.7.

$$\sum P_y = 0: \quad Q + qdx - (Q + dq) = 0;$$

$$\sum M_{\Pi 2} = 0: \quad -M - Qdx - qdx \frac{dx}{2} + (M + dm) = 0.$$

Из первого уравнения находим:  $\frac{dQ}{dx} = q$ , то есть – производная от поперечной силы вдоль абсциссы сечения балки равняется интенсивности распределенной нагрузки.

Из второго уравнения, пренебрегая членом  $qdx \frac{dx}{2}$ , находим:  $\frac{dM}{dx} = Q$ , то есть – производная от изгибающего момента вдоль абсциссы сечения балки равняется поперечной силе (теорема Жуковского).

Из последних зависимостей следует, что  $\frac{d^2M}{dx^2} = q$ , то есть – вторая производная от изгибающего момента вдоль абсциссы сечения балки равняется интенсивности распределенной нагрузки.

#### 10.4 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

К изгибу балки приводят два случая действия внешних сил – действие поперечной силы и действие изгибающего момента. Для наглядного представления их изменения в разных сечениях балки строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Эпюра поперечных сил  $Q$  – это график, который показывает закон изменения величины поперечной силы вдоль балки.

Эпюра изгибающих моментов  $M_{изг}$  – это график, который показывает закон изменения величины изгибающего момента вдоль балки.

Рекомендуется следующий порядок построения эпюр  $Q$  и  $M_{изг}$ .

1. Составить уравнения равновесия балки, из которых определить значение опорных реакций.

2. Балку разбить на участки, границами которых будут её характерные сечения – места приложения внешних сосредоточенных сил и моментов, а также начала и конца действия распределенной нагрузки. Обозначить участки. Указать начало и направление отсчета координат  $x$  (расстояний) для каждого участка.

3. Составить уравнение поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_{изг}$  для каждого участка балки. По полученным уравнениям вычислить значение  $Q$  и  $M_{изг}$  для всех сечений балки.

4. Определить характерные сечения – такие, в которых поперечные силы равны нулю – именно в этих сечениях действуют  $M_{изгmax}$  и  $M_{изгmin}$ ; вычислить значение  $M_{изгmax}$  и  $M_{изгmin}$ .

5. Провести осы эпюр  $Q$  и  $M_{изг}$  параллельно оси балки и по полученным значениям ординат построить эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$ . Ординаты эпюр, соответствующие положительным значениям  $Q$  и  $M_{изг}$ , откладывать вверх от осей этих эпюр, отрицательным – вниз.

Ниже приведены несколько примеров, в которых решаются несложные задачи с построением эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

**Пример 10.4.** Построить эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  для консольной балки, которая нагружена сосредоточенным моментом на свободном конце (рис. 10.8).

Решение. Назначаем координатные оси. Их начало закрепляем в крайней левой точке  $A$  балки, ось  $x$  направляем вдоль оси балки вправо.

Определим реакцию опоры – реакцию жесткой заделки. Очевидно, что этой реакцией будет только момент  $M_B = -M$ .

Балка имеет один участок, для которого  $0 \leq x < l$ .

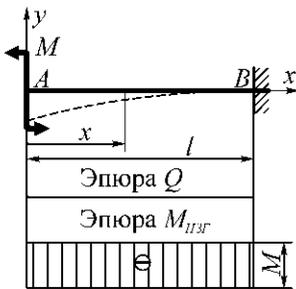


Рис. 10.8

Определим значение поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M_{изг}$  в произвольном сечении с координатой  $x$ , для чего составим соответствующие уравнения:

$$Q(x) = 0 = \text{const}; \quad M_{изг}(x) = +M = \text{const}.$$

Из анализа уравнений следует, что и поперечная сила, и изгибающий момент постоянны во всех сечениях балки, поэтому и эпюра  $Q$ , и эпюра  $M_{изг}$  имеют вид прямоугольника.

Подставляем в полученные уравнения переменное значение  $x$  и по результатам расчетов строим эпюры « $Q$ » и « $M_{изг}$ ».

*Прим.* Так как в любом сечении балки действует лишь изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю, то такое состояние балки называется «чистый изгиб».

На рис. 10.8 штриховой линией показана балка в деформированном состоянии.

**Пример 10.5.** Построить эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  для консольной балки, которая нагружена сосредоточенной силой на свободном конце (рис. 10.9).

Решение. Назначаем координатные оси. Их начало закрепляем в крайней левой точке  $A$  балки, ось  $x$  направляем вдоль оси балки вправо.

Определим реакцию опоры – реакцию жесткой заделки. Очевидно, что этой реакцией будет момент  $\vec{M}_B = -\vec{M}$  и сила  $\vec{R}_B = -\vec{P}$ .

Балка имеет один участок, для которого  $0 \leq x < l$ .

По полученным данным строим эпюры « $Q$ » и « $M_{изг}$ ».

*Прим.* Так как в любом сечении балки кроме изгибающего момента действует и поперечная сила, то такое состояние балки называется «поперечный изгиб».

На рис. 10.9 штриховой линией показана балка в деформированном состоянии.

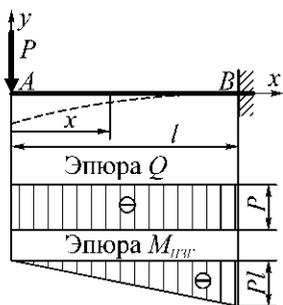


Рис. 10.9

Определим значение поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M_{изг}$  в произвольном сечении с координатой  $x$ , для чего составим соответствующие уравнения:

$$Q(x) = -P = \text{const}; \quad M_{изг}(x) = -Px = \text{const}.$$

Из анализа уравнений следует, что поперечная сила постоянна во всех сечениях балки, поэтому эпюра  $Q$  имеет вид прямоугольника. Зависимость  $M_{изг}(x)$  линейная, поэтому для ее построения достаточно определить две точки – в начале и в конце участка:

$$\text{– при } x = 0: \quad M_{изг}(x=0) = -P \cdot 0 = 0;$$

$$\text{– при } x = l: \quad M_{изг}(x=l) = -P \cdot l = -Pl.$$

**Пример 10.6.** Построить эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  для консольной балки, которая нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 10.10).

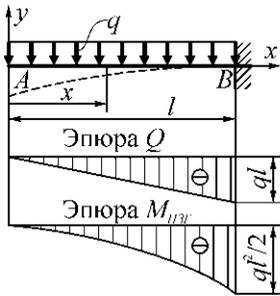


Рис. 10.10

Из анализа уравнений следует, что поперечная сила меняется линейно в зависимости от значения  $x$ , поэтому эпюра  $Q$  имеет вид треугольника. Зависимость  $M_{изг}(x)$  выражается параболической линией, (для её построения необходимо определить две точки – в начале и в конце участка):

$$\begin{aligned} \text{– при } x=0: \quad Q_{(x=0)} &= q \cdot 0 = 0; & M_{изг(x=0)} &= -q \frac{0^2}{2} = 0; \\ \text{– при } x=l: \quad Q_{(x=l)} &= q \cdot l = ql; & M_{изг(x=l)} &= -q \frac{l^2}{2} = -\frac{ql^2}{2}. \end{aligned}$$

*Прим.* Так как в любом сечении балки кроме изгибающего момента действует и поперечная сила, то такое состояние балки называется «поперечный изгиб».

По полученным данным строим эпюры « $Q$ » и « $M_{изг}$ ».

На рис. 10.10 штриховой линией показана балка в деформированном состоянии.

Из анализа расчетной схемы следует, что балка имеет два характерных участка.

Для первого участка:  $0 \leq x_1 < a$ ,

$$Q(x_1) = R_A = \frac{Pb}{l} = \text{const}; \quad M_{изг}(x_1) = R_A x_1 = \frac{Pb}{l} x_1.$$

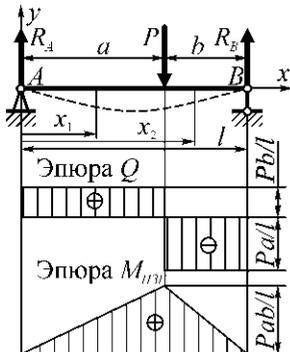


Рис. 10.11

**Пример 10.7.** Построить эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  для двухопорной балки, которая нагружена локальной силой (см. рис. 10.11).

Решение. Назначаем координатные оси. Их начало закрепляем в крайней левой точке  $A$  балки, ось  $x$  направляем вдоль оси балки вправо.

Составим уравнение равновесия и из них определим реакции опор:

$$\sum M_A = 0: \quad -Pa + R_B l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{Pa}{l};$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A l + Pb = 0 \Rightarrow R_A = \frac{Pb}{l}.$$

Определим значение поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M_{изг}$  в произвольном сечении с координатой  $x$ , для чего составим соответствующие уравнения.

Из анализа уравнений следует, что поперечная сила постоянна в сечениях всего первого участка балки, поэтому эпюра  $Q$  имеет вид прямоугольника. Зависимость  $M_{изг}(x)$  линейная, поэтому для её построения достаточно вычислить две точки – в начале и в конце участка:

$$\text{– при } x_1 = 0: \quad M_{(x_1=0)} = \frac{Pb}{l} \cdot 0 = 0;$$

$$\text{– при } x_1 = a: \quad M_{(x_1=a)} = \frac{Pb}{l} \cdot a = \frac{Pab}{l}.$$

Для второго участка:  $a \leq x_2 < l$ ;

$$Q(x_2) = R_A - P = \frac{Pb}{l} - P = \text{const};$$

$$M_{изг}(x_2) = R_A x_2 - P(x_2 - a) = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a).$$

Из анализа уравнений следует, что поперечная сила постоянна в сечениях всего второго участка балки, поэтому эпюра  $Q$  имеет вид прямоугольника. Зависимость  $M_{изг}(x)$  линейная, поэтому для её построения достаточно вычислить две точки – в начале и в конце участка:

$$\text{– при } x_2 = a: \quad M_{изг(x_2=a)} = \frac{Pb}{l} \cdot 0 = 0;$$

$$\text{– при } x_2 = l: \quad M_{изг(x_2=l)} = \frac{Pb}{l} \cdot a = \frac{Pab}{l}.$$

По полученным данным строим эпюры « $Q$ » и « $M_{изг}$ ».

На рис. 10.11 штриховой линией показана балка в деформированном состоянии.

**Пример 10.8.** Построить эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  для двухопорной балки, которая нагружена равномерно распределенной нагрузкой (рис. 10.12).

Решение. Назначаем координатные оси. Их начало закрепляем в крайней левой точке  $A$  балки, ось  $x$  направляем вдоль оси балки вправо.

Определим реакции опор, для чего составим уравнения равновесия и решим их:

$$\sum M_A = 0: \quad R_B l - (ql) \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{ql}{2};$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A l + (ql) \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{ql}{2}.$$

Балка имеет один участок, для которого  $0 \leq x < l$ .

Определим значение поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M_{изг}$  в произвольном сечении с координатой  $x$ , для чего составим соответствующие уравнения:

$$Q(x) = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$M_{изг}(x) = R_A x - qx \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}.$$

Из анализа уравнений следует, что зависимость  $Q(x)$  линейная, а зависи-

мость  $M(x)$  выражается параболической линией, поэтому для их построения достаточно вычислить две точки – в начале и в конце участка:

$$\text{– при } x = 0: Q_{(x=0)} = \frac{ql}{2} - q \cdot 0 = \frac{ql}{2}; \quad M_{изг(x=0)} = \frac{ql}{2} \cdot 0 - \frac{q \cdot 0^2}{2} = 0;$$

$$\text{– при } x = l: Q_{(x=l)} = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}; \quad M_{изг(x=l)} = \frac{ql}{2} \cdot l - \frac{q \cdot l^2}{2} = 0.$$

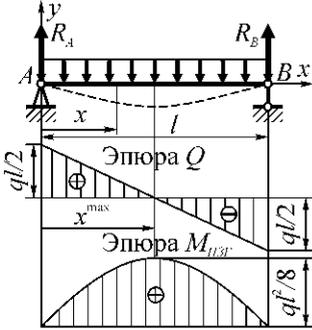


Рис. 10.12

$$Q(x) = \frac{ql}{2} - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}.$$

$$\text{Тогда } M_{изг(x=l/2)} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q(l/2)^2}{2} = \frac{ql^2}{8}.$$

По полученным данным строим эпюры « $Q$ » и « $M_{изг}$ ».

На рис. 10.12 штриховой линией показана балка в деформированном состоянии.

Балка имеет два участка.

Определим значение поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M_{изг}$  в произвольном сечении с координатой  $x$ , для чего составим соответствующие уравнения.

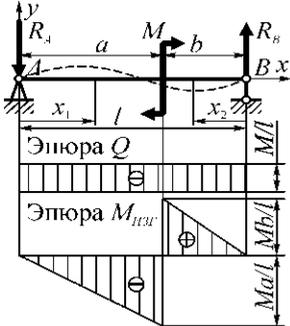


Рис. 10.13

$$\sum M_A = 0: R_B l - M = 0 \Rightarrow R_B = \frac{M}{l};$$

Координату  $x_{max}$  наибольшего значения (экстремума) эпюры изгибающих моментов можно определить, если продифференцировать уравнение  $M_{изг}(x)$ , приравнять его нулю и при этом условии определить значение  $x_{max}$ . Заведомо известно, что координата  $x_{max}$  равна той координате  $x_0$ , при которой значение поперечной силы равно нулю. Поэтому для определения координаты  $x_{max}$  достаточно уравнение  $Q(x)$  приравнять нулю и при этом условии определить значение  $x_0$ :

**Пример 10.9.** Построить эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  для двухопорной балки, которая нагружена сосредоточенным моментом (рис. 10.13).

Решение. Назначаем координатные оси. Их начало закрепляем в крайней левой точке  $A$  балки, ось  $x$  направляем вдоль оси балки вправо.

Определим реакции опор, для чего составим уравнения равновесия и решим их:

$$\sum M_B = 0: \quad R_A l - M = 0 \Rightarrow R_A = \frac{M}{l}.$$

Для первого участка:  $0 \leq x_1 < a$ ;

$$Q(x_1) = -R_A = -\frac{M}{l} = \text{const};$$

$$M_{изг}(x_1) = -R_A x_1 = -\frac{M}{l} x_1.$$

Из анализа уравнений следует, что поперечная сила постоянна в сечениях всего первого участка балки, поэтому эпюра  $Q$  имеет вид прямоугольника. Зависимость  $M_{изг}(x)$  линейная, поэтому для ее построения достаточно определить две точки – в начале и в конце участка:

$$\text{– при } x_1 = 0: \quad M_{изг}(x_1=0) = \frac{M}{l} \cdot 0 = 0;$$

$$\text{– при } x_1 = a: \quad M_{изг}(x_1=a) = -\frac{M}{l} \cdot a.$$

Для второго участка:  $0 \leq x_2 < b$ ;

$$Q(x_2) = -R_B = -\frac{M}{l} = \text{const};$$

$$M_{изг}(x_2) = R_B x_2 = \frac{M}{l} x_2.$$

Из анализа уравнений следует, что поперечная сила постоянна в сечениях всего второго участка балки, поэтому эпюра  $Q$  имеет вид прямоугольника. Зависимость  $M_{изг}(x)$  линейная, поэтому для ее построения достаточно определить две точки – в начале и в конце участка:

$$\text{– при } x_2 = 0: \quad M_{изг}(x_2=0) = \frac{M}{l} \cdot 0 = 0;$$

$$\text{– при } x_2 = b: \quad M_{изг}(x_2=b) = \frac{M}{l} \cdot b.$$

По полученным данным строим эпюры « $Q$ » и « $M_{изг}$ ».

На рис. 10.13 штриховой линией показана балка в деформированном состоянии.

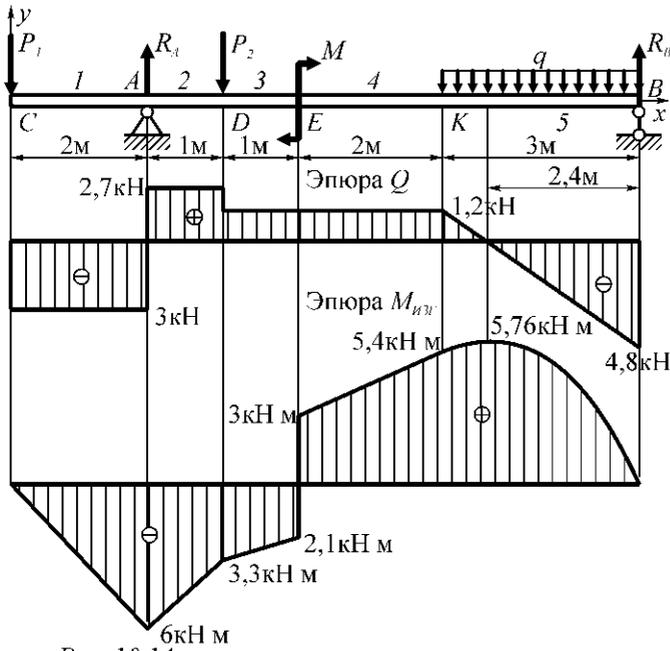


Рис. 10.14

### Пример 10.10.

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной двухопорной балки (см. рис. 10.14), на которую действуют две сосредоточенные силы  $P_1 = 3$  кН и  $P_2 = 1,5$  кН, момент (пара сил)  $M = 5,1$  кН·м и распределенная нагрузка  $q = 2$  кН/м.

Решение. Составим уравнения равновесия, из которых определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0: P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 1 - M - q \cdot 5,5 + R_B \cdot 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_B = \frac{-P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 1 + M + q \cdot 3 \cdot 5,5}{7} = \frac{-5 \cdot 2 + 1,5 \cdot 1 + 5,1 + 2 \cdot 3 \cdot 5,5}{7} = \frac{33,6}{7} = 4,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: P_1 \cdot 9 - P_2 \cdot 6 - M + q \cdot 3 \cdot 1,5 - R_A \cdot 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{P_1 \cdot 9 + P_2 \cdot 6 - M + q \cdot 3 \cdot 1,5}{7} = \frac{3 \cdot 9 + 1,5 \cdot 6 - 5,1 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5}{7} = \frac{39,9}{7} = 5,7 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum P_Y = R_A + R_B - P_1 - P_2 - q \cdot 3 = 5,7 + 4,8 - 3 - 1,5 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил  $Q$ .

На участках 1, 2, 3, 4 эпюра  $Q$  ограничена прямыми линиями, параллельными оси балки, так как на этих участках отсутствует распределенная нагрузка:

$$Q_{CA} = -P_1 = -3 \text{ кН};$$

$$Q_{CD} = -P_1 + R_A = -3 + 5,7 = 2,7 \text{ кН};$$

$$Q_{DE} = -P_1 + R_A - P_2 = -3 + 5,7 - 1,5 = 1,2 \text{ кН};$$

$$Q_{EK} = -P_1 + R_A - P_2 = -3 + 5,7 - 1,5 = 1,2 \text{ кН}.$$

На участке 5 поперечная сила уменьшается от левого конца участка (где она равна 1,2 кН) до правого конца участка линейно (т.к.  $q = \text{const}$ ). На правом конце участка 5 поперечная сила определяется по формуле:

$$Q_B = -P_1 + R_A - P_2 - q \cdot 3 = -R_B = -4,8 \text{ кН}.$$

Построим эпюры изгибающих моментов  $M_{изг}$ .

На участках балки 1, 2, 3 и 4 эпюра  $M_{изг}$  ограничена прямыми линиями, т.к. на этих участках поперечная сила постоянна. Для строительства эпюры необходимо вычислить значение  $M_{изг}$  в начале и в конце каждого участка.

$$\text{Участок 1: } M_C = 0;$$

$$M_A = -P_1 \cdot 2 = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок 2:  $M_A = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$$M_D = -P_1 \cdot 3 + R_A \cdot 1 = -3,2 + 5,7 = -3,3 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок 3:  $M_D = -3,3 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$$M_{E(\text{ЛЕВО})} = P_1 \cdot 4 + R_A \cdot 2 - P_2 \cdot 1 = -3,4 + 5,7 - 1,5 = -2,1 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок 4:  $M_{E(\text{ПРАВО})} = -P_1 \cdot 4 + R_A \cdot 2 - P_2 \cdot 1 + M =$   
 $= -3,4 + 5,7 \cdot 2 - 1,5 - 1 + 5,1 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$$M_K = -P_1 \cdot 6 + R_A \cdot 4 - P_2 \cdot 3 + M =$$

$$= -5,6 + 5,7 - 4 - 1,5 \cdot 3 + 5,1 = 5,4 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок 5:  $M_K = 5,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$$M_B = 0.$$

На участке 5 эпюра  $M_{ИЗГ}$  является квадратичной параболой.

Из анализа эпюры  $Q$  следует, что поперечная сила на участке 5 равна нулю в координате  $x_0$ . Определим её значение, для чего уравнение эпюры  $Q$  на участке 5 приравняем нулю:

$$Q(x_0) = -R_B + qx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{4,8}{2} = 2,4 \text{ м.}$$

В этом сечении (при  $x = x_0$ ) изгибающий момент  $M_{ИЗГ}$  имеет максимальное значение. Определим его, для чего в уравнение эпюры  $M_{ИЗГ}$  для участка 5 подставим значение  $x = x_0$ :

$$M_{5\text{max}} = R_B x_0 - qx_0 \frac{x_0}{2} = R_B x_0 - q \frac{x_0^2}{2} = 4,8 \cdot 2,4 - \frac{2 \cdot 2,4^2}{2} = 5,76 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По полученным значениям  $Q$  и  $M_{ИЗГ}$  построим соответствующие эпюры.

### 10.5 Закономерности построения эпюр $Q$ и $M_{ИЗГ}$

На участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  ограничена прямыми, параллельными оси, а эпюра  $M_{ИЗГ}$  – наклонными прямыми линиями.

На участках балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка  $q$ , эпюра  $Q$  ограничена наклонными прямыми, а эпюра  $M_{ИЗГ}$  – квадратичными параболом. Выпуклость параболы направлена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки.

На участках балки, на которых  $Q = 0$ , значение  $M_{ИЗГ} = \text{const}$ , а эпюра  $M_{ИЗГ}$  ограничена прямой, параллельной оси.

В сечении балки, в которых  $Q$  равна нулю, будут экстремумы  $M_{ИЗГ}$ : если  $Q$  меняет знак с положительного на отрицательный, наблюдается максимальное значение  $M_{ИЗГ\text{max}}$ ; если  $Q$  меняет знак с отрицательного на положительный, наблюдается минимальное значение  $M_{ИЗГ\text{min}}$ .

На участках, на которых  $Q > 0$ ,  $M_{ИЗГ}$  возрастает, а на которых  $Q < 0$ ,  $M_{ИЗГ}$  убывает.

В сечениях балки, в которых приложены сосредоточены силы, на эпюре  $Q$  будут наблюдаться скачки на величину приложенных сил в направлении их действия, а на эпюре  $M_{ИЗГ}$  в этих сечениях будут «переломы», причем острие «перелома» будет направлено против направления действия силы.

В сечениях балки, в которых приложены сосредоточенные моменты, на эпюру  $M_{ИЗГ}$  будут наблюдаться скачки на величину этих моментов. На эпюре  $Q$

изменений в этих сечениях не будет.

Если на конце консоли и конечной опоре к балке приложен сосредоточенный момент, то  $M_{изг}$  на этом конце будет равен внешнему моменту. Если на конце консоли или на конечной опоре балка не нагружена внешним моментом, то на этом конце  $M_{изг}$  будет равен нулю.

Эпюры  $Q$  и  $M_{изг}$  можно строить, не составляя уравнений для эпюр  $Q$  и  $M_{изг}$ , а ограничиться вычислением значений  $Q$  и  $M_{изг}$  в характерных сечениях балки и использовать выводы из дифференциальных зависимостей между  $M_{изг}$ ,  $Q$  и  $q$ .

### 10.6 Нормальные напряжения при изгибе

При чистом изгибе из шести внутренних силовых факторов только изгибающий момент не равен нулю.

Если на поверхность балки нанести сетку и подвергнуть ее чистому изгибу, то можно наблюдать следующую картину искажения линий сетки (см. рис. 10.15).

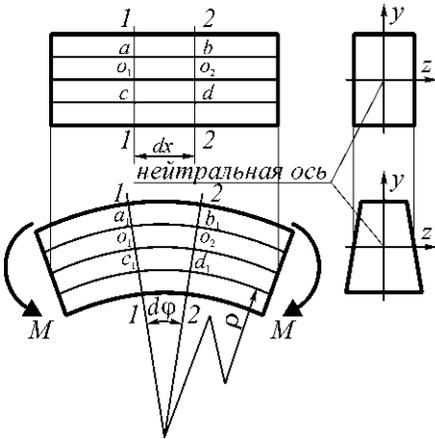


Рис. 10.15

Прямые линии 1-1 и 2-2 на поверхности балки (следы поперечных сечений) после деформации остаются прямыми, но поворачиваются на некоторый угол  $d\phi$  вокруг центров  $O$ . Поворот сечений происходит вокруг их нейтральных осей. При этом сами сечения остаются плоскими как до деформации, так и после деформации.

Таким образом, волокна балки деформируются по-разному: большую деформацию испытают волокна более отдаленные от нейтрального слоя, через который проходит ось  $z$ .

Нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y,$$

где  $M_z$  – изгибающий момент в поперечном сечении;

Линия  $ab$  на выпуклой стороне балки удлиняется, что свидетельствует о растяжении этой части балки. Линия  $cd$  на вогнутой стороне балки укорачивается, что свидетельствует о сжатии этой части балки. Длина линии  $O_1O_2$  остается неизменной, что свидетельствует о том, что эта часть балки не растягивается и не сжимается.

Слой волокон балки, который при изгибе не растягивается и не сжимается, называется нейтральным слоем (см. рис. 10.15). Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки называется нейтральной осью (линией).

$I_z$  – осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси  $z$ ;  
 $y$  – расстояние от нейтральной оси  $z$  до точки, в которой определяется напряжение.

Максимальные нормальные напряжения при изгибе определяются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{I_z} y_{\max},$$

где  $M_{z\max}$  – максимальный по абсолютной величине изгибающий момент;  
 $y_{\max}$  – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения.

Обозначим  $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$ , и тогда получим  $\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z}$ .

Величина  $W_z$  называется моментом сопротивления при изгибе.

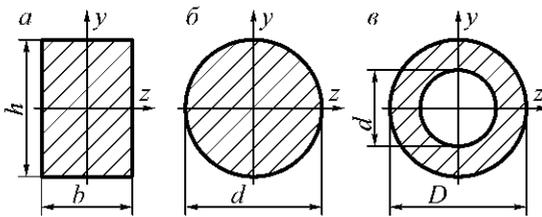


Рис. 10.16

Момент сопротивления при изгибе для прямоугольного поперечного сечения шириной  $b$  и высотой  $h$  (рис. 10.16, а) равен:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12h/2} = \frac{bh^2}{6};$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

Момент сопротивления при изгибе для круглого поперечного сечения диаметром  $d$  (рис. 10.16, б) равен:

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\pi d^4}{64d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

Момент сопротивления при изгибе для кольцевого поперечного сечения внешним диаметром  $D$  и внутренним диаметром  $d$  (рис. 10.16, в) равен:

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\pi D^4}{64D/2} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4)$$

Момент сопротивления при изгибе для сечений, несимметричных относительно нейтральной оси, существует два момента сопротивления при изгибе:

$$W_z^{(1)} = \frac{I_z}{y_{\max}^{(1)}};$$

$$W_z^{(2)} = \frac{I_z}{y_{\max}^{(2)}},$$

где  $y_{\max}^{(1)}$  и  $y_{\max}^{(2)}$  – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленным растянутым и сжатым волокнам.

## 10.7 Расчеты на прочность при изгибе по нормальным напряжениям

Расчеты балок на прочность выполняются по наибольшему нормальному

напряжению, возникающему в любых поперечных сечениях балки.

Условие прочности имеет вид:  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ , где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение.

Пластические материалы оказывают одинаковое сопротивление как растяжению, так и сжатию. В связи с этим балки из пластических материалов имеют симметричные относительно своих нейтральных осей поперечные сечения. В таких балках возникают одинаковые максимальные напряжения растяжения и сжатия. В этом случае опасным является поперечное сечение балки, в котором возникает наибольший по абсолютному значению изгибающий момент. Опасными являются точки поперечного сечения, наиболее отдалённые от нейтральной оси.

С учётом вышесказанного условие прочности примет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{Z \max}}{W_Z} \leq [\sigma].$$

*Прим.* Если балка из пластического материала будет иметь несимметричное поперечное сечение, то в последнюю формулу необходимо подставлять момент сопротивления при изгибе относительно оси, лежащей в силовой плоскости.

Подбирая сечения балки, необходимо добиваться того, чтобы при минимальной его площади получался наибольший момент сопротивления при изгибе. Для этого необходимо как можно большую часть площади поперечного сечения расположить как можно дальше от нейтральной оси.

Хрупкие материалы работают на сжатие значительно лучше, чем на растяжение. Балки из таких материалов целесообразно выполнять несимметричного относительно нейтральной оси поперечного сечения, например, таврового или несимметричного двутаврового, П-образного и др.

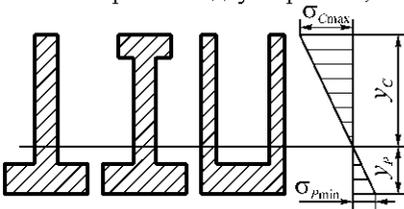


Рис. 10.17.

$$\begin{cases} \sigma_P = \frac{M_{Z \max}}{I_Z} y_P \leq [\sigma_P]; \\ \sigma_C = \frac{M_{Z \max}}{I_Z} y_C \leq [\sigma_C], \end{cases}$$

где  $y_P$  и  $y_C$  – соответственно расстояние от нейтральной оси до наиболее отдаленных точек растянутой и сжатой зон сечения.

### 10.8 Расчеты на прочность при изгибе по касательным напряжениям

При поперечном изгибе в сечениях балки действуют поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M_{изг}$ , которые вызывают соответственно касательные и нормальные напряжения.

Формула для определения касательных напряжений при изгибе имеет вид:

$$\tau = \frac{QS_Z(y)}{I_Z b(y)},$$

где  $Q$  – поперечная сила в сечении, в котором определяются касательные напряжения;

$S_Z(y)$  – статический момент относительно нейтральной оси части площади поперечного сечения, которая находится между линией, на которой определяется  $\tau$ , и краем сечения;

$I_Z$  – осевой момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$b(y)$  – ширина поперечного сечения на уровне, на котором определяется  $\tau$ .

Если балка относительно короткая и нагружена значительными по величине сосредоточенными силами, то поперечные силы также могут иметь значительную величину. В этом случае необходимо определить максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  в том поперечном сечении, в котором поперечная сила  $Q$  имеет наибольшее значение.

Условие прочности по касательным напряжениям в этом случае имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_Z}{I_Z b(y)} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  – допустимое касательное напряжение.

Для балок прямоугольного и круглого поперечного сечения, которые изготовлены с дерева, условие прочности по касательным напряжениям имеет вид соответственно

$$\tau_{\max(\text{прямоуг})} = \frac{3Q}{2F} \leq [\tau];$$

$$\tau_{\max(\text{кругл})} = \frac{4Q}{3F} \leq [\tau].$$

**Пример 10.11.** Для балки, расчетная схема которой приведена на рис. 10.18, подобрать профиль двутаврового, круглого и прямоугольного поперечного сечения (для прямоугольного сечения принять отношение высоты балки к её ширине  $h/b = 2$ ) и определить вес балок, если  $M = 50$  кН·м,  $P = 40$  кН,  $q = 30$  кН/м. Проверить балки на прочность по касательным напряжениям. Материал балок – Ст3, для которой  $[\sigma] = 160$  МПа,  $[\tau] = 50$  МПа, плотность стали  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Решение. Из уравнений равновесия определяем опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ :

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: & -(q \cdot 2)1 + (q \cdot 0,5)0,25 + M + R_B \cdot 2,5 - P \cdot 3,5 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_B = & \frac{(q \cdot 2)1 - (q \cdot 0,5)0,25 - M + P \cdot 3,5}{2,5} = \frac{(30 \cdot 2)1 - (30 \cdot 0,5)0,25 - 50 + 40 \cdot 3,5}{2,5} = 57,84 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0: & (q \cdot 2)1,5 + (q \cdot 0,5)2,75 - R_A \cdot 2,5 + M - P \cdot 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_A = & \frac{(q \cdot 2)1,5 + (q \cdot 0,5)2,75 + M - P \cdot 1}{2,5} = \frac{(30 \cdot 2)1,5 + (30 \cdot 0,5)2,75 + 50 - 40 \cdot 1}{2,5} = 60,16 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверим правильность вышеприведенного решения:

$$\sum P_y = R_A + R_B - q \cdot 2,6 - P = 60,16 + 57,84 - 30 \cdot 2,6 - 40 = 0, \text{ то есть решение}$$

уравнений равновесия решено верно.

Вычислим поперечные силы. Для этого выделим 5 характерных участков балки – по признакам мест приложения силовых факторов – сил или моментов.

Для первого участка значения координаты меняется в пределах от 0 м до 0,6 м, то есть  $0 \leq x_1 < 0,6$  м.

Уравнение для определения поперечной силы на первом участке имеет вид:

$$Q_{(x_1)} = -qx_1 \text{ (уравнение прямой линии).}$$

$$\text{При } x_1 = 0: \quad Q_{(x_1=0)} = -30 \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 0,6 \text{ м: } \quad Q_{(x_1=0,6)} = -30 \cdot 0,6 = -18 \text{ кН.}$$

Для второго участка:  $0,6 \leq x_2 < 1,6$ ;

$$Q_{(x_2)} = -qx_2 + R_A \text{ (уравнение прямой линии).}$$

$$\text{При } x_2 = 0,6 \text{ м: } \quad Q_{(x_2=0,6)} = -30 \cdot 0,6 + 60,16 = 42,16 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x_2 = 1,6 \text{ м: } \quad Q_{(x_2=1,6)} = -30 \cdot 1,6 + 60,16 = 12,16 \text{ кН.}$$

Для третьего участка:  $1,6 \leq x_3 < 2,6$ ;

$$Q_{(x_3)} = -qx_3 + R_A \text{ (уравнение прямой линии).}$$

$$\text{При } x_3 = 1,6 \text{ м: } \quad Q_{(x_3=1,6)} = -30 \cdot 1,6 + 60,16 = 12,16 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x_3 = 2,6 \text{ м, } \quad Q_{(x_3=2,6)} = -30 \cdot 2,6 + 60,16 = 17,84 \text{ кН.}$$

Для четвертого участка:  $1 \leq x_4 < 1,5$ ;

$$Q_{(x_4)} = P - R_B \text{ (уравнение прямой линии).}$$

$$\text{При } x_4 = 1 \text{ м: } \quad Q_{(x_4=1)} = 40 - 57,84 = -17,84 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x_4 = 1,5 \text{ м: } \quad Q_{(x_4=1,5)} = 40 - 57,84 = -17,84 \text{ кН.}$$

Для пятого участка:  $0 \leq x_5 < 1$  м;

$$Q_{(x_5)} = P \text{ (уравнение прямой линии).}$$

$$\text{При } x_5 = 0 \text{ м и при } x_5 = 1 \text{ м: } \quad Q_{(x_5=0)} = Q_{(x_5=1)} = 40 \text{ кН.}$$

Выбираем удобный масштаб и строим эпюру поперечных сил (см. рис. 10.18).

Вычислим изгибающие моменты. Для этого воспользуемся разделением балки на пять характерных участков, который выполнен выше.

Для первого участка:  $0 \leq x_1 < 0,6$  м;

$$M_{изг}(x_1) = -qx_1 \frac{x_1}{2} = q \frac{x_1^2}{2} \text{ (уравнение параболы).}$$

$$\text{При } x_1 = 0 \text{ м: } \quad M_{изг}(x_1 = 0) = -\frac{30 \cdot 0^2}{2} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м;}$$

$$\text{При } x_1 = 0,6 \text{ м: } \quad M_{изг}(x_1 = 0,6) = -\frac{30 \cdot 0,6^2}{2} = -5,4 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Для второго участка:  $0,6 \leq x_2 < 1,6$  м;

$$M_{изг}(x_2) = q \frac{x_2^2}{2} + R_A(x_2 - 0,6) \text{ (уравнение параболы).}$$

$$\text{При } x_2 = 0,6 \text{ м: } \quad M_{изг}(x_2 = 0,6) = -\frac{30 \cdot 0,6^2}{2} + 60,16(0,6 - 0,6) = -5,4 \text{ кН}\cdot\text{м;}$$

$$\text{при } x_2 = 1,6 \text{ м: } \quad M_{изг}(x_2 = 1,6) = -\frac{30 \cdot 1,6^2}{2} + 60,16(1,6 - 0,6) = -21,76$$

кН·м.

Для третьего участка:  $1,6 \leq x_3 < 2,6$  м;

$$M_{изг}(x_3) = -\frac{qx_3^2}{2} + R_A(x_3 - 0,6) - M \quad (\text{уравнение параболы}).$$

При  $x_3 = 1,6$  м:  $M_{изг}(x_3 = 1,6) = -\frac{30 \cdot 1,6^2}{2} + 60,16(1,6 - 0,6) - 50 = 28,24$

кН·м;

При  $x_3 = 2,6$  м:  $M_{изг}(x_3 = 2,6) = -\frac{30 \cdot 2,6^2}{2} + 60,16(2,6 - 0,6) - 50 = 31,08$

кН·м.

Определяем экстремальное значение  $M_{изг}$  при значении координаты  $x_3$ , при котором  $Q$  равняется нулю. Определим для этого значения координату  $x_3$  (для этого можно приравнять нулю или уравнение  $Q(x_3)$ , или производную  $M_{изг}(x_3)$ ):

$$\frac{dM_{изг}(x_3)}{dx_3} = 0 \Leftrightarrow -qx_3 + R_A = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{R_A}{q} = \frac{60,16}{30} \approx 2 \text{ м},$$

при  $x_3 = 2$  м:  $M_{изг}(x_3 = 2) = -\frac{30 \cdot 2^2}{2} + 60,16(2 - 0,6) - 50 = 25,8$  кН·м.

Для четвертого участка:  $1 \leq x_4 < 1,5$  м;

$$M_{изг}(x_4) = -Px_4 + R_B(x_4 - 1) \quad (\text{уравнение прямой линии}).$$

При  $x_4 = 1$  м:  $M_{изг}(x_4=1) = -40 \cdot 1 + 57,84(1 - 1) = -40$  кН·м;

При  $x_4 = 1,5$  м:  $M_{изг}(x_4=1,5) = -40 \cdot 1,5 + 57,84(1,5 - 1) = -31,08$  кН·м.

Для пятого участка:  $0 \leq x_5 < 1$  м;

$$M_{изг}(x_5) = -Px_5 \quad (\text{уравнение прямой линии}).$$

При  $x_5 = 0$  м:  $M_{изг}(x_5=0) = -40 \cdot 0 = 0$  кН·м;

при  $x_5 = 1$  м:  $M_{изг}(x_5=1) = -40 \cdot 1 = -40$  кН·м.

Выбираем удобный масштаб и строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 10.18).

Опасным сечением балки является такое, в котором действует наибольший абсолютный изгибающий момент. Таким является сечение в точке  $B$ , в котором действует изгибающий момент, имеющий значение 40 кН·м. Это значения  $M_{изг\max} = 40$  кН·м будет использовано при определении конструктивных параметров балок различных поперечных сечений.

Из уравнения прочности по нормальным напряжениям при изгибе определим момент сопротивления изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{изг\max}}{W_Z} \leq [\sigma] \Rightarrow W_Z = \frac{M_{изг\max}}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

По таблице ГОСТ 8239-72 подбираем двутавр № 22а, для которого  $W_Z = 254 \text{ см}^3 = 2,54 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , вес одного метра  $Q_{дв} = 258$  Н.

Определим поперечные размеры балки прямоугольного поперечного сечения при  $h/b = 2$ :

$$W_Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2}{3}b^3 \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{3W_Z}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{2}} = 0,072 \text{ м},$$

$$h = 2b = 2 \cdot 0,072 = 0,144 \text{ м}.$$

Определим диаметр балки круглого поперечного сечения:

$$W_Z \approx 0,1d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{W_Z}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{2,5 \cdot 10^{-4}}{0,1}} = 0,136 \text{ м.}$$

Определим массы балок различных сечений, учитывая при этом, что длина балки  $l$  равна 4,1 м:

– масса двутавровой балки:

$$G_{\text{ДУТАВР}} = Q_{\text{ДВ}} l = 258 \cdot 4,1 = 106 \text{ кг,}$$

– масса балки прямоугольного поперечного сечения:

$$G_{\text{ПРЯМОУГ.}} = b h l \rho = 0,072 \cdot 0,144 \cdot 4,1 \cdot 7800 = 332 \text{ кг,}$$

– масса балки круглого поперечного сечения:

$$G_{\text{КРУГЛ.}} = \frac{\pi d^2}{4} l \rho = \frac{\pi 0,136^2}{4} \cdot 4,1 \cdot 7800 = 465 \text{ кг.}$$

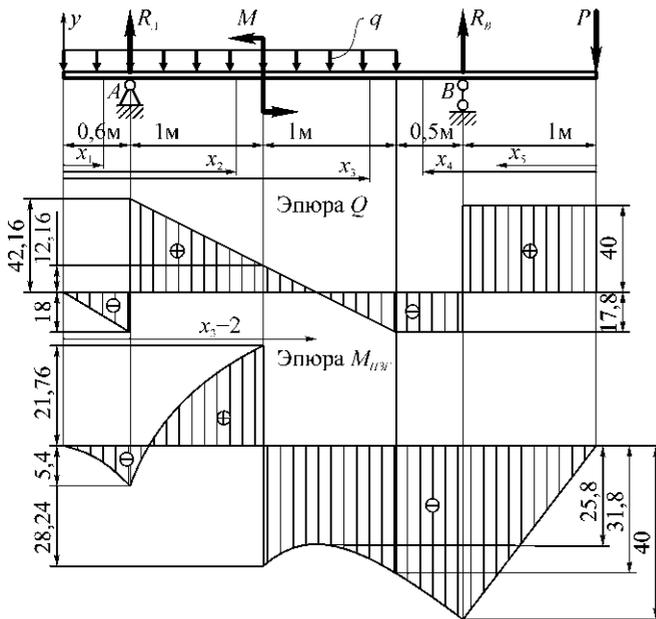


Рис. 10.18.

Проверим балку двутаврового поперечного сечения на прочность по касательным напряжениям. Наибольшие касательные напряжения возникают на нейтральной оси поперечного сечения.

Из эпюры поперечных сил определим наибольшее абсолютное значение поперечной силы:  $Q_{\text{max}} = 42,16 \text{ кН.}$

Из таблицы ГОСТ на прокатную сталь для двутаврового профиля №22а определяем:  $S_Z = 143 \text{ см}^3 = 143 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ,  $I_Z = 2790 \text{ см}^4 = 2790 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $b(y) = d = 0,54 \text{ см} = 0,54 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$

Из условия прочности по касательным напряжениям определяем:

Примем вес двутавровой балки за 100%, тогда вес балки прямоугольного поперечного сечения будет больше в  $\frac{332}{106} = 3,13$  раза, а вес

балки круглого поперечного сечения больше в  $\frac{465}{106} = 4,39$

раза веса балки двутаврового поперечного сечения.

Итак, с целью экономии материала целесообразно применить балку двутаврового поперечного сечения.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_Z}{I_Z b(y)} = \frac{42,16 \cdot 10^3 \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^{-8} \cdot 0,54 \cdot 10^{-2}} = 40,01 \text{ МПа} < [\tau] = 50 \text{ МПа}.$$

Таким образом, двутавровая балка, которая была выбрана по нормальным напряжениям, имеющим доминирующую роль в прочностном расчете балки на изгиб, также удовлетворяет и условию прочности по касательным напряжениям.

### 10.9 Определение перемещений при изгибе

Рассмотрим деформацию балки при плоском изгибе (рис. 10.19).



Рис. 10.19

Согнутая ось балки (показана штриховой линией) называется упругой линией. Перемещение центра тяжести поперечного сечения по направлению, перпендикулярному оси балки, называется прогибом балки в данном сечении (обозначен  $y$ ).

Наибольший прогиб балки называется стрелой прогиба (обозначен  $f$ ). Угол, на который поперечное сечение поворачивается относительно своего первоначального положения, называется углом поворота сечения.

Расположим начало координат на левом конце балки, ось  $x$  направим по оси балки в правую сторону, ось  $y$  – вверх. Прогиб  $y$  будем считать положительным, если перемещение сечения происходит вверх. Угол поворота  $\varphi$  будем считать положительным при повороте сечения против хода часовой стрелки.

Прогиб  $y$  и угол поворота  $\varphi$  определяются при помощи приближительного дифференциального уравнения согнутой оси балки:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_Z},$$

где  $M(x)$  – изгибающий момент в сечении, в котором определяются перемещения балки;

$EI_Z$  – жесткость поперечного сечения балки.

### 10.10 Определение перемещений в балках по методу начальных параметров

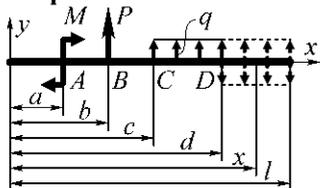


Рис. 10.20.

Рассмотрим балку длиной  $l$  (см. рис. 10.20), которая находится в равновесии. Условимся считать направления нагрузок, которые показаны на рисунке, положительными.

Метод определения перемещений в балках по методу начальных параметров основан на следующих положениях.

Начало координат располагается на левом конце балки, ось  $x$  направляется в правую сторону, ось  $y$  – вверх.

Уравнение для изгибающего момента  $M(x)$  составляется путем вычисления моментов сил, которые расположены слева от рассматриваемого сечения.

Если действует внешний сосредоточенный момент  $M$ , приложенный на расстоянии  $a$  от начала координат, то его умножают на множитель  $(x - a)^0$ , который

равняется единице.

В случае обрыва распределенной нагрузки её удлиняют до конца рассматриваемого участка, а для восстановления фактически действующей на балку нагрузки вводят нагрузку обратного направления (эти нагрузки принято показывать штрихами).

Интегрирование уравнений на всех участках делается без раскрытия скобок.

При таком подходе уравнения изгибающего момента на любом участке представлены через все силовые факторы, в том числе – через изгибающий момент  $M_0$  и поперечную силу  $Q_0$ , которые действуют в сечении, совпадающем с началом координат. Величины  $M_0$  и  $Q_0$ , прогиб  $y_0$  и угол поворота  $\varphi_0$  в начале координат называются начальными координатами.

Для статически определенной балки начальные параметры  $M_0$  и  $Q_0$  определяются по помощи уравнений равновесия. Начальные параметры  $\varphi_0$  и  $y_0$  определяются из условий упрочения балки на опорах. Если левый конец жестко зашпелён, то  $\varphi_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ . Если левый конец балки опирается на шарнирную опору, то  $y_0 = 0$ ,  $\varphi_0 \neq 0$ . Угол  $\varphi_0$  определяется из условия, что прогиб на второй опоре равен нулю. Если левый конец балки свободный, то  $\varphi_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$ . Параметры  $\varphi_0$  и  $y_0$  определяются из условий, что прогибы на опорах равны нулю.

Уравнение для определения углов поворота балки имеет вид:

$$EI_Z \varphi(x) = EI_Z \varphi_0 + \sum M(x-a) + \sum P \frac{(x-b)^2}{2} + \sum q \frac{(x-c)^3}{6} - \sum q \frac{(x-d)^3}{6}.$$

Уравнение для определения прогибов балки имеет вид:

$$EI_Z y(x) = EI_Z y_0 + EI_Z \varphi_0 x + \sum M \frac{(x-a)^2}{2} + \sum P \frac{(x-b)^3}{6} + \sum q \frac{(x-c)^4}{24} - \sum q \frac{(x-d)^4}{24}.$$

В этих уравнениях  $\varphi_0$  и  $y_0$  – начальные параметры, соответственно угол поворота и прогиб в начале координат;  $M$ ,  $P$ ,  $q$  – внешние сосредоточенные моменты, сосредоточенные силы (включая  $Q_0$  и  $M_0$ ) и распределенные нагрузки, приложенные только слева от сечения;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  – абсциссы точек приложения соответственно сосредоточенных моментов и сил, начала и конца участков, на которые действует равномерно распределенная нагрузка.

### 10.11 Понятие о составных балках

Иногда балки составляют из нескольких балок, которые «положены» друг на друга. Примером такой балки может быть автомобильная рессора и рессора железнодорожного локомотива.

Работу составных балок рассмотрим на примере трехслойной балки прямоугольного поперечного сечения (как рессора автомобиля или железнодорожного локомотива). Если отдельные слои балки между собой не связаны и силы трения между ними отсутствуют, то каждый из них деформируется как отдельная балка, которая имеет свой нейтральный слой. Нагрузка между этими тремя балками распределяется пропорционально их жесткостям при изгибе (в этом случае поворну). Это означает, что моменты инерции и моменты сопротивления трех балок, деформирующиеся независимо одна от одной, должны быть просуммированы (в нашем случае – утроены), то есть

$$J_X = 3 \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{4}; \quad W_X = 3 \frac{bh^2}{6} = \frac{bh^2}{2}.$$

Если скрепить балки, например, сваркой, болтами или другим способом, или взять одну балку утроенной высоты, то балка будет работать как монолитная с моментом инерции и моментом сопротивления, которые будут равны:

$$J_X = \frac{b(3h)^3}{12} = 2,25bh^3; \quad W_X = \frac{b(3h)^2}{6} = 1,5bh^2.$$

Анализируя две последних группы уравнений, можно сделать вывод о том, что жесткость монолитной балки больше жесткости «трёхслойной» балки в 9 раз, а прочность – больше в 3 раза.

### **Проверь свои знания!**

1. Что называется прямым и косым изгибом?
2. Что называется чистым и поперечным изгибом?
3. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях балки при чистом и поперечном изгибах?
4. Какие правила знаков приняты для изгибающего момента и поперечной силы?
5. Как вычисляются момент и поперечная сила в поперечных сечениях балки?
6. Какие типы опор применяются для упругости балок?
7. По каким уравнениям определяются опорные реакции балок?
8. Как проверить правильность определения опорных реакций балки?
9. Что представляют собой эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?
10. Почему при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для консольной балки можно не определять опорные реакции?
11. Какие зависимости существуют между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки?
12. Как проверить правильность построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил?
13. Как определить положение сечения, в котором действует максимальный изгибающий момент?
14. Что представляют собой нейтральный слой и нейтральная ось и как они расположены?
15. Чему равна кривизна оси балки при чистом изгибе?
16. Что называется жесткостью поперечного сечения балки при изгибе?
17. По какой формуле определяются нормальные напряжения при изгибе балок? Как меняются напряжения по высоте поперечного сечения?
18. Что называется моментом сопротивления при изгибе?
19. По какой формуле определяются касательные напряжения при изгибе?
20. Как выполняются расчеты на прочность балок из пластических и хрупких материалов?
21. Как перемещаются поперечные сечения балки при прямом изгибе?
22. Что представляют собой уравнение метода начальных параметров и по-

чему они так называются?

## Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 11 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 11.1 Общие понятия о сложном сопротивлении

Если на тело одновременно действуют несколько силовых факторов, каждый из которых приводит к простой деформации (растяжения или сжатия, сдвига, смятию, кручению, изгибу), то тело находится в состоянии сложного сопротивления.

Задачи сложного сопротивления решаются согласно принципу независимости действия сил и деформаций (принципа суперпозиции). Решаются они с использованием метода сечений, с помощью которого определяются внутренние усилия и напряжения в поперечных сечениях тела (стержня, балки, вала), которые возникают от действия каждого силового фактора отдельно. После построения эпюр определяется картина их распределения вдоль тела (конструкции, детали) от действия каждого силового фактора также отдельно. Определяется и исследуется распределение нормальных и касательных напряжений в опасных (наиболее напряженных) сечениях, что позволяет установить опасное сечение, в котором суммарные (эквивалентные) напряжения достигают наибольшего значения. В зависимости от вида напряженного состояния для опасного сечения составляется и решается условие прочности.

В общем случае состояния сложного сопротивления в поперечном сечении тела возникают шесть внутренних силовых факторов, а именно (см. рис. 11.1):

$N_x$  – продольная сила, вызывающая деформацию растяжения или сжатия;

$Q_y$  и  $Q_z$  – поперечные силы, вызывающие деформацию сдвига;

$M_x$  – крутящий момент, вызывающий деформацию кручения;

$M_y$  и  $M_z$  – изгибающие моменты, вызывающие деформацию изгиба.

Продольная сила и изгибающие моменты вызывают в сечении нормальные напряжения. Поперечные силы и крутящий момент вызывают касательные напряжения.

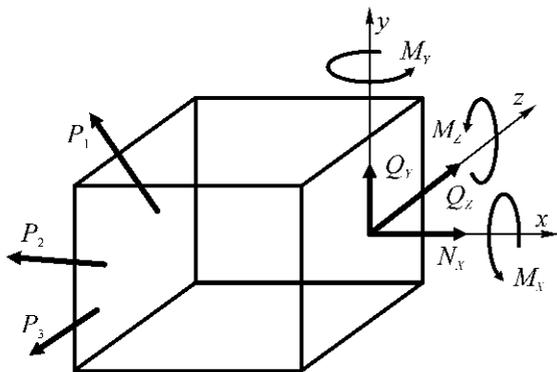


Рис. 11.1

$y$  и  $z$  – координаты точки поперечного сечения, в которой определяются напряжения.

В любой точке сечения полное касательное напряжение определяется как геометрическая сумма касательных напряжений от действия силовых факторов  $Q_Y$ ,  $Q_Z$  и  $M_X$  отдельно:

$$\tau = \sqrt{\tau_Y^2 + \tau_Z^2},$$

где  $\tau_Y$  и  $\tau_Z$  – соответственно сумма проекций суммарных напряжений на оси  $y$  и  $z$ .

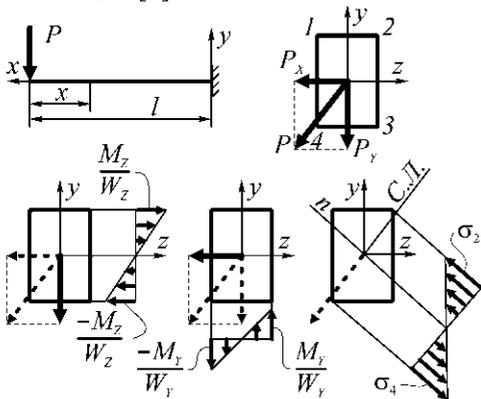
В точках поперечного сечения возникает плоское напряженное состояние. Главные напряжения определяются по следующим формулам:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right],$$

$$\sigma_2 = 0.$$

Расчеты на прочность выполняется по наибольшему эквивалентному (приведенному) напряжению  $\sigma_{ЭКВ}$ , которое рассчитывается в зависимости от принятой теории прочности. При этом должно выполняться условие прочности:

$$\Sigma_{ЭКВ} \leq [\sigma].$$



## 11.2 Косой изгиб

Косой сгиб – такой изгиб балки, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента не проходит через главные центральные оси инерции поперечного сечения (см. рис. 11.2 здесь  $n$  – нейтральная ось;  $C.L.$  – силовая линия).

При плоском косом сгибе силы, действующие на балку, расположены в одной плоскости, не совпадающей с плоскостью действия на-

грузки, а изогнутая ось балки представляет собой плоскую (двухмерную) кривую.

При пространственном косом изгибе силовые факторы, которые действуют на балку, расположены в разных плоскостях. При этом плоскости изгибающих моментов в разных сечениях по разному сориентированы относительно главных осей инерции, а изогнутая ось балки представляет собой пространственную кривую. Косой изгиб рассматривается как совокупность двух прямых изгибов в главных плоскостях. Для объяснения этого рассмотрим консольную балку, которая нагружена силой  $P$ , действующей под углом  $\alpha$  к оси  $y$  (см. рис. 11.2).

Разложим силу  $P$  на две составляющих, направленных по главным осям инерции. Сила  $P_Y = P \cos \alpha$  изгибает балку в вертикальной плоскости относительно оси  $z$ , что вызывает в сечении  $x$  изгибающий момент, вычисляемый по формуле:

$$M_Z = P_Y x = P x \cos \alpha = M \cos \alpha.$$

Сила  $P_Z = P \sin \alpha$  изгибает балку в горизонтальной плоскости относительно оси  $y$ , вызывая в сечении  $x$  изгибающий момент, вычисляемый по формуле:

$$M_Y = P_Z x = P x \sin \alpha = M \sin \alpha.$$

В точке  $A$  возникает напряжение как от действия момента  $M_Z$ , так и от действия момента  $M_Y$ :

$$\sigma_{M_Z} = \frac{M_Z}{I_Z} y; \quad \sigma_{M_Y} = \frac{M_Y}{I_Y} z.$$

Эпюра напряжений  $\sigma_{M_Z}$  показана на рис. 11.2. Наибольшие напряжения возникают в крайних верхних и нижних волокнах, вычисляемые по формуле:

$$\sigma_{M_Z} = \pm \frac{M_Z}{W_Z}.$$

Эпюра напряжений  $\sigma_{M_Y}$  показана на рис. 11.2. Наибольшие напряжения возникают в крайних правых и левых волокнах, вычисляемые по формуле:

$$\sigma_{M_Y} = \pm \frac{M_Y}{W_Y}.$$

Суммарные напряжения в любой точке поперечного сечения определяются по формуле:

$$\sigma = \sigma_{M_Z} + \sigma_{M_Y} = \pm \frac{M_Z}{I_Z} y \pm \frac{M_Y}{I_Y} z.$$

Наибольшие суммарные напряжения возникают в угловых точках сечения: растягивающие – в точке 2, сжимающие – в точке 4, а именно:

$$\sigma_2 = \sigma_{\max} = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_Y}{W_Y}; \quad \sigma_4 = \sigma_{\min} = -\frac{M_Z}{W_Z} - \frac{M_Y}{W_Y}.$$

Расположение нейтральной оси (рис. 11.2) определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_Z}{I_Y}.$$

Нейтральная ось  $n-n$  всегда отклоняется от оси  $z$  на угол  $\beta$  в ту сторону, в которую отклоняется силовая плоскость  $P-P$  от оси  $y$  на угол  $\alpha$ . Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.

После определения расположения нейтральной оси можно построить эпюру полных (суммарных) напряжений (рис. 11.2). Для этого перпендикулярно к нейтральной оси проводится прямая и две касательные, которые параллельны нейтральной линии. Определяются координаты точек касания 2 и 4 и вычисляются напряжения в них. В точках  $a$  и  $b$  по масштабу перпендикулярно линии  $ab$  откладывается напряжение  $\sigma_2$  и  $\sigma_4$  с учетом их знаков. Соединяются точки  $c$  и  $d$  и в результате получается эпюра напряжений. Из эпюры напряжений определяются напряжения в любой точке поперечного сечения.

Пространственная эпюра полных напряжений при косом сгибе приведена на рис. 11.2.

Условие прочности при косом сгибе имеет вид

$$\sigma = \pm \frac{M_Z}{W_Z} \pm \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma].$$

Если материал хрупкий ( $[\sigma_P] < [\sigma_{СЖ}]$ ), а сечение несимметричное, то прочность проверяется отдельно для растянутой и сжатой зон.

При подборе поперечного сечения предварительно принимается отношение  $k = W_Z / W_Y$ , которое зависит от формы сечения. Для прямоугольника  $k = h / b$ , для двутавров  $k = 8$ , для швеллеров  $k = 6,5$ . Подбор сечений выполняется из условия прочности

$$W_Z = \frac{M_Z + kM_Y}{[\sigma]}.$$

После подбора профиля соответствующей формы сечения необходимо сделать проверку на прочность и в случае потребности сделать коррективы, чтобы не допустить как их перенапряжения, так и излишнего запаса прочности.

Прогибы балки при косом изгибе определяются отдельно для каждой главной плоскости (рис. 11.2). Суммарный (полный) прогиб определяется как геометрическая сумма отдельных прогибов:

$$f = \sqrt{f_Y^2 + f_Z^2},$$

где  $f_Y$  – прогиб в вертикальной плоскости;

$f_Z$  – прогиб в горизонтальной плоскости.

Полный прогиб наблюдается в плоскости, которая перпендикулярна нейтральной оси. Если косой сгиб балки вызван двумя различными системами внешних сил, лежащих в её главных плоскостях инерции, то расположение линии полного прогиба определяется по следующей формуле:  $\text{tg}\beta = \frac{f_Z}{f_Y}$ .

**Пример 11.1.** Деревянная балка, защемлённая одним концом, изгибается силами  $P_1 = 0,8$  кН и  $P_2 = 1,65$  кН (рис. 11.3). Определить размеры прямоугольного поперечного сечения балки и полный прогиб ее свободного конца, если  $h = 2b$ ,  $[\sigma] = 10$  МПа.

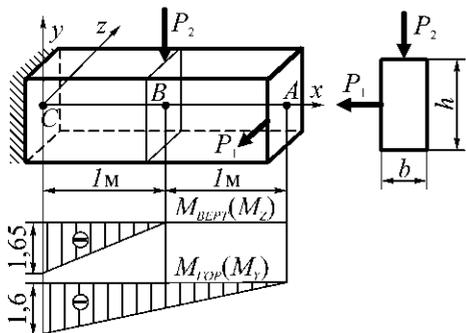


Рис. 11.3

Решение. Вычисляем изгибающие моменты в вертикальной плоскости балки, потом – в горизонтальной, и построим эпюры:

$$M_{BEPT.} = 0: M_C = -P_2 \cdot 1 = -1650 \cdot 1 = -1650 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{GOP.} = 0: M_C = -P_1 \cdot 2 = -800 \cdot 2 = -1600 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определим размеры  $h$  и  $b$  поперечного сечения с условия прочности балки:

$$\sigma = \frac{M_Z}{M_Z} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma].$$

Так как задано  $h = 2b$ , и известно, что для прямоугольного сечения  $W_Z = \frac{bh^2}{6}$ ;  $W_Y = \frac{hb^2}{6}$ , то  $W_Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$  и  $W_Y = \frac{hb^2}{6} = \frac{(2b)b^2}{6} = \frac{b^3}{3}$ .

Тогда

$$\sigma = \frac{3M_Z}{2b^3} + \frac{3M_Y}{b^3} \leq [\sigma] \Leftrightarrow \sigma = \frac{1,5M_Z}{b^3} + \frac{3M_Y}{b^3} \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{1,5M_Z + 3M_Y}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot 1650 + 3 \cdot 1600}{10 \cdot 10^6}} = 0,09 \text{ м};$$

$$h = 2b = 2 \cdot 0,09 = 0,18 \text{ м}.$$

Определим прогиб сечения  $A$  методом начальных параметров сначала в вертикальной, а затем – в горизонтальной плоскости:

$$EI_Z Y_A^{BEPT.} = 0 + 0 - M_A^{BEPT.} \frac{(2-0)^2}{2} + R_Y \frac{(2-0)^3}{6} - P_2 \frac{(2-1)^3}{6} =$$

$$= -1650 \cdot \frac{2^2}{2} + 1650 \cdot \frac{2^3}{6} - 1650 \cdot \frac{1^3}{6} = -1375 \text{ Н}\cdot\text{м}^3;$$

$I_Z = \frac{bh^3}{12} = \frac{9 \cdot 10^{-2} \cdot (18 \cdot 10^{-2})^3}{12} = 4,374 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$  (осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси  $z$ );

$$Y_A^{BEPT.} = \frac{-1375 \cdot 10^3}{EI_Z} = \frac{1375}{1 \cdot 10^{10} \cdot 4,374 \cdot 10^{-5}} = -3,14 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$EI_Y Y_A^{GOP.} = 0 + 0 - M_A^2 \frac{(2-0)^2}{2} + R_Z \frac{(2-0)^3}{6} = -1600 \cdot \frac{2^2}{2} + 800 \cdot \frac{2^3}{6} = -2133 \text{ Н}\cdot\text{м}^3.$$

$$I_Y = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,18 \cdot 0,09^3}{12} = 1,09 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4 \text{ (осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси } y);$$

$$Y_A^{ГОР.} = \frac{-2133}{EI_Y} = -\frac{2133}{1 \cdot 10^{10} \cdot 1,09 \cdot 10^{-5}} = -0,0196 \text{ м.}$$

Полный прогиб определяем как геометрическую сумму прогибов в горизонтальной и вертикальной плоскостях по формуле:

$$Y_A = \sqrt{(Y_A^{ВЕРТ.})^2 + (Y_A^{ГОР.})^2} = \sqrt{(3,14 \cdot 10^{-3})^2 + (0,0196)^2} = 0,0198 \text{ м.}$$

Угол и направление полного прогиба относительно оси  $y$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y_A^{ГОР.}}{Y_A^{ВЕРТ.}} = \frac{0,0196}{\pi \cdot 10^{-3}} = 6,24 \Rightarrow \alpha = 80^\circ 54'.$$

**Пример 11.2.** Определить номер двутавровой балки, нагруженной силой  $P_1 = 60 \text{ кН}$  в вертикальной плоскости и силой  $P_2 = 10 \text{ кН}$  в горизонтальной плоскости (см. рис. 11.4). Допустимое напряжение материала балки  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Решение. Определяем опорные реакции в вертикальной плоскости.

$$\sum M_A = 0: B_{ВЕРТ.} \cdot 4 - P_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow B_{ВЕРТ.} = \frac{P_1 \cdot 1}{4} = \frac{60 \cdot 1}{4} = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -A_{ВЕРТ.} \cdot 4 + P_1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow A_{ВЕРТ.} = \frac{P_1 \cdot 3}{4} = \frac{60 \cdot 3}{4} = 45 \text{ кН.}$$

$$M_{ИЗГ(C)}^{ГОР.} = A_{ГОР.} \cdot 1 = 2,5 \cdot 1 = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ИЗГ(D)}^{ГОР.} = B_{ГОР.} \cdot 1 = 7,5 \cdot 1 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ИЗГ(B)}^{ГОР.} = 0.$$

Из эпюры изгибающих моментов видно, что опасным сечением может быть сечение  $C$  или  $D$ .

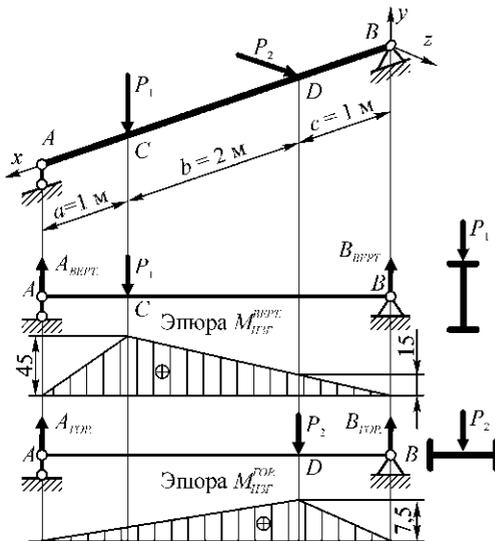


Рис. 11.4

Определяем изгибающие моменты в вертикальной плоскости и строим эпюру:

$$M_{ИЗГ(A)}^{ВЕРТ.} = 0;$$

$$M_{ИЗГ(C)}^{ВЕРТ.} = A_{ВЕРТ.} \cdot 1 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ИЗГ(D)}^{ВЕРТ.} = B_{ВЕРТ.} \cdot 1 = 15 \cdot 1 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{ИЗГ(B)}^{ВЕРТ.} = 0.$$

Определяем опорные реакции и изгибающие моменты в горизонтальной плоскости и строим эпюру.

$$\sum M_A = 0: B_{ГОР.} \cdot 4 - P_2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{ГОР.} = \frac{P_2 \cdot 3}{4} = \frac{10 \cdot 3}{4} = 7,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -A_{ГОР.} \cdot 4 + P_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ГОР.} = \frac{P_2 \cdot 1}{4} = \frac{10 \cdot 1}{4} = 2,5 \text{ кН.}$$

$$M_{\text{ИЗГ}(A)}^{\text{ГОР.}} = 0;$$

Предположим сначала, что опасным является сечение  $C$ , в котором действуют изгибающие моменты  $M_{\text{БЕРТ.}} = M_Z = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_{\text{ГОР.}} = M_Y = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Из условия прочности определяем необходимый момент сопротивления сечения, принимая ориентировочно  $W_Z / W_Y = 9$  и  $W_Y / W_Z = 9$ :

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma] \Leftrightarrow \sigma_C = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{9M_Y}{W_Z} \leq [\sigma] \Rightarrow \\ \Rightarrow W_Z &= \frac{M_Z + 9M_Y}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3 + 9 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 4,21 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 421 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Этой величине отвечает двутавр №30, для которого  $W_Z = 472 \text{ см}^3 = 472 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$  и  $W_Y = 49,9 \text{ см}^3 = 49,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ .

Проверим пригодность этого профиля, вычислив максимальные напряжения в сечениях  $C$  и  $D$ .

$$\sigma_C = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_Y}{W_Y} = \frac{45 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 1,45 \cdot 10^8 \text{ Па} < 160 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_Y}{W_Y} = \frac{15 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 1,82 \cdot 10^8 \text{ Па} > 160 \text{ МПа}.$$

Максимальное напряжение в сечении  $D$  превышает допустимое. Итак, опасным сечением является сечение  $D$ .

Подберем номер двутавра для сечения  $D$ , для которого  $M_Z = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$  и  $M_Y = 7,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Из условия прочности определим необходимый момент сопротивления сечения  $D$ :

$$\begin{aligned} \sigma_D &= \frac{M_Y}{W_Z} + \frac{9M_Y}{W_Z} \leq [\sigma] \Rightarrow \\ \Rightarrow W_Z &= \frac{M_Z + 9M_Y}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^3 + 9 \cdot 7,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 516 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 516 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Такому моменту сопротивления отвечает двутавр №30а, для которого  $W_Z = 518 \text{ см}^3 = 518 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$  и  $W_Y = 60,1 \text{ см}^3 = 60,1 \text{ м}^3$ .

Проверяем достаточность прочности этого профиля:

$$\sigma_D = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{518 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot 10^3}{60,1 \cdot 10^{-6}} = 1,54 \cdot 10^8 \text{ Па} < 160 \text{ МПа}.$$

Избранный профиль отвечает условию прочности на изгиб в опасном сечении  $D$ . Напряжение в сечении  $C$  будет меньше допустимого, поэтому определять его не нужно.

### 11.3 Изгиб с растяжением (сжатием)

Изгиб с растяжением (сжатием) наблюдается тогда, когда в поперечных сечениях стержня одновременно возникают изгибающий момент и продольная сила.

Рассмотрим балку, защемлённую одним концом и нагруженную силой  $P$ , действующей в плоскости симметрии под углом  $\alpha$  к оси балки (см. рис. 11.5).

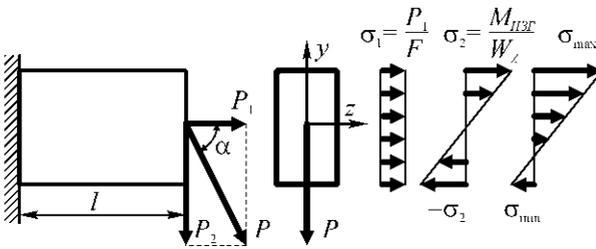


Рис. 11.5

Разложим силу  $P$  на две составляющих  $P_1$  и  $P_2$ :

$$P_1 = P \cos \alpha, P_2 = P \sin \alpha.$$

Сила  $P_1$ , действующая вдоль оси балки, вызывает её растяжение. Сила  $P_2$ , действующая перпендикулярно оси балки, вызывает в ней изгиб.

Нормальное напряжение, вызванное растягивающей силой  $P_1$  во всех поперечных сечениях балки одинаковое и распределяется по сечению равномерно. Значение этого напряжения определяется по формуле:

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} = \frac{P_1}{F},$$

где  $N = P_1$  – продольная сила;  $F$  – площадь поперечного сечения балки.

Значение напряжения от изгиба определяются по формуле:

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_{изг}}{I_Z} y = \pm \frac{M_Z}{I_Z} y.$$

Суммарные напряжения в любой точке поперечного сечения балки от изгиба и растяжения будут одинаковые и определяются по формуле:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{N}{F} \pm \frac{M_Z}{I_Z} y.$$

В данном случае опасным сечением является сечение возле защемления, где действует максимальный изгибающий момент, равный  $M_{\max} = P_2 l$ . В этом сечении наиболее нагруженными точками будут верхние точки балки, так как в них одновременно действуют напряжения от растяжения и наибольшее напряжение изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_Z}{W_Z}.$$

В нижних точках напряжения будет наименьшими:

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{F} - \frac{M_Z}{W_Z}.$$

Если материал балки пластичен, для которого  $[\sigma_P] = [\sigma_{сж}] = [\sigma]$ , то условие прочности будет иметь следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_Z}{W_Z} \leq [\sigma].$$

Если продольная и поперечная нагрузки сложные, то для определения опасного сечения необходимо построить эпюры продольных сил и изгибающих моментов.

В случае совместного действия растяжения и косоугольного изгиба условие прочности и напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z.$$

Для стержней, изготовленных из хрупких материалов, для которых  $[\sigma_{\text{изг}}] < [\sigma_{\text{сж}}]$ , проверка на прочность должна выполняться на растяжение и на сжатие.

### 11.4 Внецентренное сжатие

*Внецентренное сжатие* – это такой случай сжатия стержня, когда сжимающая сила параллельна оси стержня, но точка её приложения не совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

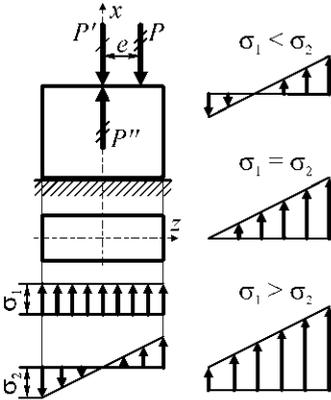


Рис. 11.6

Рассмотрим стержень с приложенной к нему силой  $P$ , линия действия которой не совпадает с центром тяжести поперечного сечения (см. рис. 11.6).

Расстояние  $e$  между точкой приложения силы и центром тяжести сечения стержня называется эксцентриситетом.

Приложим в центре веса верхнего сечения две силы  $P'$  и  $P''$ , по величине равные  $P$ , и направленные в противоположные стороны (это не нарушит первоначального состояния равновесия стержня). Сила  $P'$  вызывает осевое сжатие, а пара сил  $PP''$  вызывает чистый изгиб с моментом  $M = Pe$ , где  $e$  – эксцентриситет.

Нормальные напряжения от сжатия стержня одинаковы по всему сечению, а вычисляются они по формуле  $\sigma_1 = -\frac{P}{F}$  (здесь  $F$  – площадь поперечного сечения стержня).

Нормальные напряжения от изгиба для любой точки поперечного сечения определяется по формуле  $\sigma_2 = \pm \frac{M}{I_z} y$  (здесь  $I_z$  – осевой момент инерции сечения относительно оси  $z$ ,  $y$  – расстояние от нейтральной оси  $z$  до точки, в которой определяется напряжение).

Наибольшие нормальные напряжения изгиба возникают в наиболее отдаленных точках от нейтральной оси  $z$ , а вычисляются они по формуле  $\sigma_{2\max} = \pm \frac{M}{I_z} y_{\max} = \pm \frac{M}{W_z}$  (здесь  $W_z$  – момент сопротивления изгиба поперечного сечения относительно нейтральной оси  $z$ ).

Суммарные напряжения от сжатия и изгиба определяются по формуле

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{P}{F} \pm \frac{M}{I_z} y.$$

При определении суммарных напряжений  $\sigma$  в зависимости от значений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  возможны три случая: 1 – максимальные напряжения от изгиба по абсолютному значению больше, чем напряжение от сжатия:  $\sigma_{2\max} > \sigma_1$ ; 2 – максимальные напряжения от изгиба по абсолютному значению равняются напряжениям от сжатия:  $\sigma_{2\max} = \sigma_1$ ; 3 – максимальные напряжения от изгиба по абсолютному значению меньше, чем напряжение от сжатия:  $\sigma_{2\max} < \sigma_1$  (эпюры суммарных напряжений для этих трех случаев приведены на рис. 11.6).

Расчетные уравнения на прочность для опасных точек при внецентренном сжатии имеют следующий вид:

$$\sigma_{\min} = -\frac{P}{F} - \frac{M}{W_Z} \leq [\sigma_{CT}]; \quad \sigma_{\max} = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W_Z} \leq [\sigma_P].$$

### 11.5 Изгиб с кручением

Общее действие изгиба и кручения происходит, когда в поперечных сечениях бруса (вала) одновременно возникают изгибающие и крутящие моменты. Такому деформированию чаще всего подвергаются валы (не торсионные валы!), которые не только передают крутящий момент, но и удерживают детали.

Рассмотрим брус круглого поперечного сечения (т.е. вал), который нагружен силой  $P$  и моментом  $M$  (рис. 11.7). Для этого случая эпюры внутренних усилий показаны на том же рисунке ниже. Их численные значения равны: поперечная сила  $Q = P = \text{const}$ ; изгибающий момент в правом сечении  $M_{ИЗГ} = 0$ , в левом защемлённом сечении  $M_{ИЗГ} = -P\ell$ ; крутящий момент на правом участке  $M_K = 0$ , на левом участке  $M_K = M$ .

Касательные напряжения изгиба  $\tau_{ИЗГ}$  не принимаются к вниманию из-за их малости. Таким образом, в опасном сечении действуют нормальное напряжение изгиба  $\sigma_{ИЗГ}$  и касательное напряжение кручения  $\tau_K$ .

Расчеты на прочность валов из пластических материалов выполняется по третьей или четвертой теории прочности. При этом рассчитывается эквивалентное напряжение  $\sigma_{ЭКВ}$  (которое является равнобезопасным в случае растяжения вала), по следующим формулам:

$$\sigma_{ЭКВ}^{(3)} = \sqrt{\sigma_{ИЗГ}^2 + \tau_K^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{ИЗГ}}{W_X}\right)^2 + \left(\frac{M_K}{W_P}\right)^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{ЭКВ}^{(4)} = \sqrt{\sigma_{ИЗГ}^2 + 0,75\tau_K^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{ИЗГ}}{W_X}\right)^2 + 0,75\left(\frac{M_K}{W_P}\right)^2} \leq [\sigma].$$

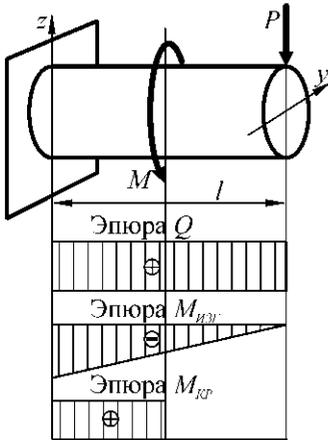


Рис. 11.7

Опасным сечением является левое сечение, в котором действуют максимальные усилия  $Q$ ,  $M_{изг}$  и  $M_K$ .

Касательные напряжения от поперечной силы  $Q$  равны  $\tau_{изг} = \frac{QS_z}{I_z B_y}$ .

Нормальные напряжения от изгибающего момента  $M_{изг}$  равны  $\sigma_{изг} = \pm \frac{M_{изг}}{W_z}$ .

Касательные напряжения от крутящего момента  $M_K$  равны  $\tau_K = \frac{M_K}{W_p}$ .

Если учесть, что  $W_x \approx 0,1d^3$  и  $W_p = 2W_x = 0,2d^3$  (здесь  $d$  – диаметр вала), то получим следующие зависимости:

$$\sigma_{ЭKB}^{(3)} = \sqrt{\left(\frac{M_{изг}}{0,1d^3}\right)^2 + \left(\frac{M_K}{0,2d^3}\right)^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{ЭKB}^{(4)} = \sqrt{\left(\frac{M_{изг}}{0,1d^3}\right)^2 + 0,75\left(\frac{M_K}{0,2d^3}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Если в поперечном сечении действуют изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях, то суммарный момент определяется как их геометрическая сумма по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_{изг(верт)}^2 + M_{изг(гор)}^2}.$$

**Пример 11.3.** На вал, закреплённый в двух подшипниках, действуют три силы, имеющие значение 10 кН, и три крутящих момента  $M_1 = 4$  кН·м,  $M_2 = 10$  кН·м,  $M_3 = 6$  кН·м (см. рис. 11.8). Определить диаметр вала по третьей и четвертой теориям прочности, если коэффициент запаса прочности  $n = 2$ , а для материала вала значения предела текучести  $[\sigma_T] = 350$  МПа.

Определим изгибающие моменты в характерных точках:

$$M_C^{GOP} = 0;$$

$$M_A^{GOP} = 0;$$

$$M_D^{GOP} = R_A^{GOP} \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН·м};$$

$$M_B^{GOP} = 0;$$

$$M_E^{GOP} = 0.$$

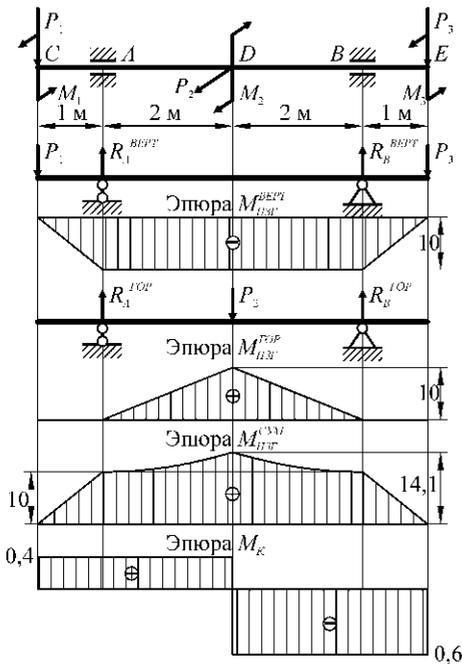


Рис. 11.7

Построим эпюру изгибающих моментов от горизонтальных сил (см. рис. 11.7).

Определяем суммарные изгибающие моменты и строим их эпюру:

$$M_C^{СУМ} = 0;$$

$$M_A^{СУМ} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_D^{СУМ} = \sqrt{(M_D^B)^2 + (M_D^Г)^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определяем крутящие моменты на участках вала и строим эпюру:

$$M_{K\ CD} = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{K\ CD} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из анализа эпюр  $M_{изг}^{СУМ}$  и  $M_K$  следует, что опасным сечением является сечение  $D$ , в котором действуют наибольшие изгибающий момент  $M_{изг}^{СУМ} = 14,1$  кН·м и крутящий момент  $M_K = 6$  кН·м. Определим диаметр вала в этом сечении.

Допускаемое напряжения для материала вала с учетом коэффициента запаса прочности:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{350}{2} = 175 \text{ МПа}.$$

Из уравнения прочности при кручении определим диаметр вала  $d$ :

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_Z} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1d^3} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1[\sigma]}}.$$

Определим для сечения  $D$  эквивалентный момент  $M_{\text{ЭКВ}}$  и диаметр вала  $d$  в

Решение. Рассмотрим вал в проекции на вертикальную плоскость и определим опорные реакции:

$$R_A^{BEPT} = R_B^{BEPT} = \frac{P_1 + P_3}{2} = \frac{10 + 10}{2} = 10 \text{ кН}.$$

Определим изгибающие моменты в характерных точках:

$$M_C^{BEPT} = 0;$$

$$M_A^{BEPT} = -P_1 \cdot 1 = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_B^{BEPT} = -P_3 \cdot 1 = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_E^{BEPT} = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов от вертикальных сил (см. рис. 11.7).

Рассмотрим вал в проекции на горизонтальную плоскость и определим опорные реакции:

$$R_A^{ГОВ} = R_B^{ГОВ} = \frac{P_2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кН}.$$

соответствии с третьей и четвертой теориями прочности:

$$M_{\text{ЭKB}}^{(3)} = \sqrt{(M_D^{\text{СУМ}})^2 + (M_K)^2} = \sqrt{14,1^2 + 6^2} = 15,32 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$d^{(3)} = \sqrt[3]{\frac{15,32 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,101 \text{ м};$$

$$M_{\text{ЭKB}}^{(4)} = \sqrt{(M_D^{\text{СУМ}})^2 + 0,75(M_K)^2} = \sqrt{14,1^2 + 0,75 \cdot 6^2} = 15,03 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$d^{(4)} = \sqrt[3]{\frac{15,03 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,100 \text{ м}.$$

### Проверь свои знания!

1. Какой изгиб называется косым?
2. Сочетанием каких видов изгиба является кривой изгиб?
3. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать кривой изгиб?
4. По каким формулам определяются нормальные напряжения при кривой изгибе?
5. Как определяется расположение нейтральной оси при кривой изгибе?
6. Как определяется перемещение точек оси балки при кривой изгибе?
7. В каких случаях возникает одновременное действие изгиба и растяжения (сжатия)?
8. Что называется внецентренным растяжением (сжатием)?
9. По каким формулам определяются нормальные напряжения при одновременном действии изгиба и растяжения (сжатия)?
10. По каким формулам определяются нормальные напряжения при внецентренном растяжении (сжатии)?
11. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса при изгибе с кручением?
12. Как определяется местоположение опасного сечения бруса круглого поперечного сечения при изгибе с кручением?
13. Как определяется величина эквивалентного момента при изгибе с кручением по разным теориям прочности?
14. Какая последовательность расчетов на прочность брусьев при изгибе с кручением?

### Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 12 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### 12.1 Критическая сила и критическое напряжение

Из теоретической механики известно, что равновесие абсолютно твердого тела может быть устойчивым, безразличным и неустойчивым. Например, шарик,

лежащий на вогнутой поверхности, находится в состоянии устойчивого равновесия (см. рис. 12.1, а), и если его незначительно отклонить от этого положения и отпустить, то он снова вернется к своему первоначальному положению. Шарик, лежащий на горизонтальной поверхности, находится в состоянии безразличного равновесия (рис. 12.1, б), и если его отклонить от этого положения, то он в первоначальное положение не вернется. Шарик, лежащий на выпуклой поверхности, находится в состоянии неустойчивого равновесия (рис. 12.1, в), и если его даже незначительно отклонить от первоначального положения, то он будет продолжать двигаться дальше и назад не вернется.

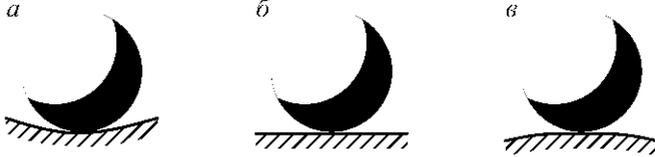


Рис. 12.1

Такое же явление равновесия можно наблюдать, когда длинные прямолнейные стержни сжимать центральной силой, то есть – силой, линия действия которой совпадает с продольной осью стержня (см. рис. 12.2). Стержни остаются прямолинейными и находятся в состоянии устойчивого равновесия при действии относительно небольшой силы  $P$  (такое состояние показано на рис. 12.2 утолщенной линией). При увеличении силы может наступить безразличное или неустойчивое равновесие, а продольная ось стержня при этом перестает быть прямолинейной (показано штриховой линией). Стержни изгибаются в плоскости наименьшей жесткости, поэтому они работают на сжатие с изгибом.

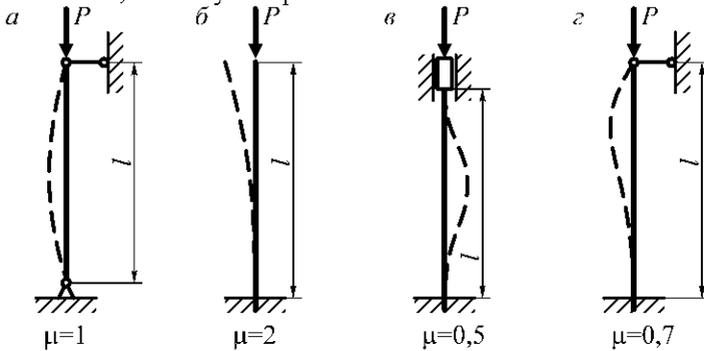


Рис. 12.2

Наименьшее значение центральной сжимающей силы, при которой форма продольной оси стержня может стать искривленной (равновесие становится неустойчивым), называется критической силой  $P_{кр}$ .

Величина критической силы  $P_{кр}$  определяется или по формулой Эйлера, или по формулой Ф.С. Ясинского в зависимости от соотношения значения гибкости стержня  $\lambda$  и его предельного значения  $\lambda_{пред}$ :

$$\lambda = \frac{l_{\Pi}}{i_{\min}}; \quad \lambda_{\text{ПРЕД}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{ПЦ}}}}$$

где  $l_{\Pi}$  – приведенная длина стержня,  $l_{\Pi} = \mu l$ ;

$\mu$  – коэффициент приведения, зависящий от способа закрепления концов стержня (на рис. 12.2 указаны несколько простейших способов закрепления концов стержня и соответствующие им значения коэффициента приведения  $\mu$ );

$l$  – длина стержня;

$i_{\min}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения,  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}$ ;

$I_{\min}$  – наименьший из всех возможных моментов инерции поперечного сечения стержня;

$F$  – площадь поперечного сечения стержня;

$E$  – модуль упругости первого рода материала стержня;

$\sigma_{\text{ПЦ}}$  – предел пропорциональности материала стержня.

Например, для Ст.3  $\lambda_{\text{ПРЕД}} \approx 80$ , для дерева  $\lambda_{\text{ПРЕД}} \approx 110$ .

Если  $\lambda > \lambda_{\text{ПРЕД}}$ , то критические напряжения  $\sigma_{\text{КР}}$  и сила  $P_{\text{КР}}$  определяются по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{КР}} = \frac{P_{\text{КР}}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2};$$

$$P_{\text{КР}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{\Pi}^2}.$$

Если гибкость стержня  $\lambda < \lambda_{\text{ГРАН}}$ , то сначала определяется критическое напряжение  $\sigma_{\text{КР}}$  по эмпирической формуле Ф.С. Ясинского, а затем – критическая сила  $P_{\text{КР}}$ :

$$\sigma_{\text{КР}} = a - b\lambda \quad (\text{для чугуна: } \sigma_{\text{КР}} = a - b\lambda + 0,53 \lambda^2);$$

$$P_{\text{КР}} = \sigma_{\text{КР}} F = (a - b\lambda) F,$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, которые определяются экспериментально и зависят от свойств материала стержня.

Значение коэффициентов  $a$  и  $b$  для некоторых материалов приведены в табл. 12.1.

Табл. 12.1 – Значение коэффициентов  $a$  и  $b$ .

Материал	$\lambda_{\text{ГРАН}}$	Значение коэффициентов, МПа	
		$a$	$b$
Ст3	80	364	3,26
Ст40	90	321	1,16
Кремнистая сталь	100	589	3,82
Дерево (сосна)	110	29,3	0,194
Чугун	80	776	12

Графическое толкование области применимости расчетов устойчивости стержня при его продольном сжатии можно уяснить из графика зависимости критического напряжения  $\sigma_{KP}$  от гибкости стержня  $\lambda$  (см. рис. 12.3). График имеет три области:

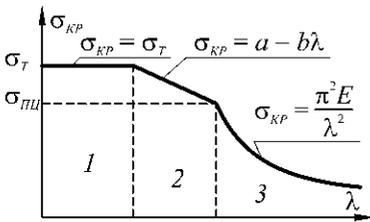


Рис. 12.3

1 – область пластических деформаций, в которой работают короткие стойки (стержни) на сжатие без потери устойчивости (здесь  $\sigma_{KP} = \sigma_T$ );

2 – область упруго-пластических деформаций; критическое напряжение в этой области определяется по формуле Ясинского (уравнение прямой линии);

3 – область упругих деформаций – область Эйлера; критическое напряжение в этой области определяется по формуле Эйлера.

## 12.2 Расчеты сжатых стержней на устойчивость

При расчетах сжатых стержней проверяется условие прочности для материала стержня и условие его устойчивости:

$$\sigma = \frac{P_{KP}}{F} \leq [\sigma]_{CT};$$

$$P_{KP} \leq [P]_{CT},$$

где  $P_{KP}$  – критическая сила, которая определяется в зависимости от гибкости по формуле Эйлера или по формуле Ф.С. Ясинского;

$$[P]_{уст} - \text{допустимая сила без потери устойчивости, } [P]_{уст} = \frac{P_{KP}}{[n]_{уст}};$$

$$[\sigma]_{уст} - \text{допустимое напряжение без потери устойчивости, } [\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{KP}}{[n]_{уст}};$$

$[n]_{уст}$  – допустимый коэффициент запаса устойчивости.

При расчетах на устойчивость рекомендуется принимать значение допустимого коэффициента запаса устойчивости для стали  $[n]_{уст} = 2$ , для чугуна  $[n]_{уст} = 5$ , для дерева  $[n]_{уст} = 3$ .

Расчеты сжатых стержней на устойчивость можно также выполнить с помощью коэффициентов уменьшения допустимого напряжения по формуле

$$\sigma_{уст} = \frac{P}{F} \leq \psi [\sigma]_{CT},$$

где  $\psi$  – коэффициент уменьшения допустимого напряжения при сжатии в расчетах на устойчивость.

Значение коэффициентов  $\psi$  в зависимости от материала стержня и его гибкости приведены в табл. 12.2.

Табл. 12.2 - Значение коэффициента  $\psi$

Гибкость	Значение коэффициента $\psi$ для материалов
----------	---

	Ст.ОС, Ст.2...4	Ст. 5	Стап ь Ст45	Чу- гун	Де- рево	Бе- тон	ле- лезо- бе- тон	мен- ная клад
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99	0,99	0,99	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97	0,96	0,98	0,96
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93	0,90	0,97	0,91
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87	0,83	0,94	0,85
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80	0,76	0,88	0,78
60	0,86	0,92	0,79	0,44	0,71	0,69	0,82	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60	0,63	0,72	0,65
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48	0,56	0,64	0,58
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38	0,51	0,57	0,52
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31	0,45	0,52	0,47
110	0,52	0,43	0,35	–	0,25	–	–	0,42
120	0,45	0,36	0,30	–	0,22	–	–	0,38
130	0,40	0,33	0,26	–	0,18	–	–	0,34
140	0,36	0,29	0,23	–	0,16	–	–	0,31
150	0,32	0,26	0,21	–	0,14	–	–	0,28
160	0,29	0,24	0,19	–	0,12	–	–	–
170	0,26	0,21	0,17	–	0,11	–	–	–
180	0,23	0,19	0,15	–	0,10	–	–	–
190	0,21	0,17	0,14	–	0,09	–	–	–
200	0,19	0,16	0,13	–	0,08	–	–	–

**Определение допустимой силы.** Если для стержня, который рассчитывается на устойчивость, известны его длина  $l$ , способ закрепления его концов и соответствующий ему коэффициент приведения  $\mu$ , форма поперечного сечения и параметры  $F$ ,  $I_{\min}$ ,  $i_{\min}$  стержня, параметры  $E$ ,  $[\sigma]_{уст}$  материала стержня, то определение допустимой силы  $[P]$  выполняется одним из двух следующих способов.

Первый способ расчетов – при известном значении  $[n]_{уст}$ . Последовательно определяются:  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ ,  $\sigma_{кр}$  и, в зависимости от полученного значения  $\lambda$  – по формуле Эйлера или Ясинского определяется критическая сила  $P_{кр} = \sigma_{кр} F$  и допустимая сила  $[P] = \frac{P_{кр}}{[n]_{кр}}$ .

Второй способ расчетов – с помощью таблицы зависимости  $\psi(\lambda)$ . Последовательно определяются  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ , коэффициент  $\psi$ ,  $\sigma_{KP}$  и, в зависимости от полученного значения  $\lambda$  – по формуле Эйлера или Ясинского определяются  $[\sigma]_{уст}$ ,  $[P] = [\sigma]_{уст} F = \psi [\sigma]_{уст} F$ .

**Проверка сжатых стержней на устойчивость** выполняется одним из двух следующих способов, в которых проверяется условие прочности.

Первый способ – при известном  $[n]_{уст}$ :  $\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{уст}}{[n]_{уст}}$ .

Второй способ – с помощью таблицы зависимости  $\psi(\lambda)$ :  $\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{уст} = \gamma [\sigma]_{уст}$ .

**Определение поперечного сечения стержня** для случая, когда известны его длина  $l$ , способ закрепления его концов и соответствующий ему коэффициент приведения  $\mu$ , параметры  $E$ ,  $[\sigma]_{уст}$  материала стержня, форма поперечного сечения, сжимающая сила  $P$ , выполняется методом последовательного приближения (из-за неопределенности условия устойчивости) одним из трех способов, приведенных ниже, с последующей проверкой.

Первый способ – при известном  $[n]_{уст}$ . Расчеты выполняются в предположении о справедливости формулы Эйлера. Последовательно определяются  $I_{\min}$ ,  $F$ ,  $i_{\min}$ ,  $\lambda$ . Если окажется, что  $\lambda > \lambda_{ПРЕД}$ , то расчет считают законченным, а если  $\lambda < \lambda_{ПРЕД}$ , то расчет выполняется с использованием формулы В.Ф. Ясинского.

Второй способ – с помощью таблицы зависимости  $\psi(\lambda)$  в такой последовательности: назначается значение коэффициента  $\psi = 0,5 \dots 0,6$ ; определяются  $[\sigma]_{уст} = \psi [\sigma]_{уст}$  и  $F = \frac{P}{[\sigma]_{уст}}$ , подбирается размер сечения или номер профиля,

для которого определяются  $I_{\min}$ ,  $i_{\min}$ ,  $\lambda$ ; определяется новое значение  $\psi_1$ . Если новое значение  $\psi_1$  отличается от  $\psi$  больше, чем на 5%, то выполняется вторая попытка расчетов, для которой принимается  $\psi_2 = 0,5(\psi + \psi_1)$ . Иногда необходимо провести еще несколько попыток расчетов. Сечение считают подобранным удовлетворительно, если  $\sigma$  и  $[\sigma]_{уст}$  отличаются меньше, чем на 5%.

Третий способ – смешанный, состоит в том, что принимается коэффициент  $[n]_{уст}$ , затем первый подбор сечения выполняется по формуле Эйлера, а конечный выбор выполняется по таблицам зависимости  $\psi(\lambda)$ . Порядок расчетов следующий: принимается коэффициент  $[n]_{уст}$  (для стали  $[n]_{уст} = 2$ , для чугуна  $[n]_{уст} = 5$ , для дерева  $[n]_{уст} = 3$ ); по формуле Эйлера определяется  $I_{\min}$ ; подбирается размер сечения (или выбирается номер профиля стандартного проката) и устанавливается для него значения  $F$ ,  $I_{\min}$ ,  $i_{\min}$ ,  $\lambda$ ; определяются коэффициент  $\psi$  и

$[\sigma]_{уст}$ , проверяется условие устойчивости  $\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{уст}$ . Если условие устойчивости выполняется, то расчеты заканчиваются. Если условие устойчивости не выполняется, то подбор сечения продолжается, приняв новое значение коэффи-

циента  $\psi$  (см. второй способ выше), или путем замены размеров сечения (номера профиля стандартного проката).

**Пример 12.1.** Для стойки (см. рис. 12.2, а) длиной 4 м определить допустимую силу  $[P]$ , если форма её поперечного сечения – прямоугольник с размерами  $b \times h = 100 \times 180$  мм<sup>2</sup>, материал – Ст.3, для которой  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Принять  $[n]_{УСТ} = 3$ .

Решение. Минимальный момент инерции  $I_{\min}$ , площадь поперечного сечения  $F$ , радиус инерции поперечного сечения  $i_{\min}$ , гибкость  $\lambda$  и критическая сила  $P_{КР}$  составляют:

$$I_{\min} = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,18 \cdot 0,10^3}{12} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$F = bh = 0,10 \cdot 0,18 = 0,018 \text{ м}^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^{-5}}{0,018}} = 0,029 \text{ м};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 4}{0,029} = 138.$$

Так как  $\lambda = 138 > \lambda_{ГРАН} = 80$ , то критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$P_{КР} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}}{(1 \cdot 4)^2} = 1,85 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1,85 \text{ МН}.$$

Допустимая сила

$$[P] = \frac{P_{КР}}{[n]_{СТ}} = \frac{1,85 \cdot 10^6}{3} = 6,17 \cdot 10^5 \text{ Н} = 617 \text{ кН}.$$

**Пример 12.2.** Для стойки (см. рис. 12.2, а) длиной 2 м определить допустимую силу  $[P]$  и коэффициент запаса  $[n]_{УСТ}$ , если материал – сосна, для которой  $E = 10^4$  МПа,  $[\sigma]_{УСТ} = 10$  МПа, форма поперечного сечения – круг диаметром 200 мм.

Решение. Для круглого сечения минимальный радиус инерции и гибкость стержня:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{0,2}{4} = 0,05 \text{ м};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2}{0,05} = 40.$$

Для дерева при  $\lambda = 40$ :  $\psi = 0,87$  (см. табл. 12.2).

Тогда допустимое напряжение  $[\sigma]$  в стойке и допустимое усилие  $[P]$ , которое можно приложить к ней, равны:

$$[\sigma] = \psi[\sigma]_{УСТ} = 0,87 \cdot 10 \cdot 10^6 = 8,7 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$[P] = [\sigma]F = [\sigma] \frac{\pi d^2}{4} = 8,7 \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 2,7 \cdot 10^5 \text{ Н} = 270 \text{ кН}.$$

Определим  $[n]_{УСТ}$ . Так как  $\lambda < \lambda_{ГРАН}$ , то  $\sigma_{КР}$  определяем по формуле

Ф.С. Ясинского (для этого предварительно установим значение коэффициентов из табл. 12.1):

$$\sigma_{KP} = a - b\lambda = 29,3 - 0,194 \cdot 40 = 21,54 \text{ МПа};$$

$$[n]_{CT} = \frac{\sigma_{KP}}{[\sigma]} = \frac{21,54}{8,7} = 2,48.$$

**Пример 12.3.** Для двух стоек с разными способами закрепления концов (один – в соответствии с рис. 12.2, а, второй – в соответствии с рис. 12.2, з) длиной 1,8 м из двутавра № 16 определить допустимую силу  $[P]$ , если  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент запаса устойчивости  $[n]_{уст} = 3$ .

Решение. Из таблицы на прокатную сталь для двутавра №16 определяем:

$$F = 20,2 \text{ см}^2 = 2,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, I_{CT} = I_{\min} = 58,6 \text{ см}^4 = 5,86 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4, i_{CT} = i_{\min} = 1,7 \text{ см} = 0,017 \text{ м}.$$

Определим допустимую нагрузку для случая закрепления стержня в соответствии с рис. 12.2, а.

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{\Pi}}{i_{\min}} = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 180}{1,7} = 106 \text{ (здесь } \mu = 1 \text{ – коэффициент приведения длины}$$

стержня, у которого концы закреплены шарнирно).

Так как  $\lambda > \lambda_{ГРАНЬ}$ , то критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$P_{KP} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 5,86 \cdot 10^{-7}}{(1 \cdot 1,8)^2} = 3,75 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Допустимая нагрузка стержня с учетом коэффициента запаса  $[n]_{CT} = 3$ :

$$[P] = \frac{P_{KP}}{[n]_{CT}} = \frac{3,75 \cdot 10^5}{3} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Определим допустимую нагрузку для случая закрепления стержня в соответствии с рис. 12.2, з.

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 180}{1,7} = 74 \text{ (здесь } \mu = 0,7 \text{ – коэффициент приведения длины}$$

стержня, у которого концы закреплены шарнирно).

Так как  $\lambda < \lambda_{ГРАНЬ}$ , то допустимая нагрузку определяем по формуле Ф.С. Ясинского:

– критическое напряжение:  $\sigma_{KP} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 74 = 225,6$  МПа;

– критическая сила:  $P_{KP} = \sigma_{KP} F = 226,6 \cdot 10^6 \cdot 2,02 \cdot 10^{-3} = 4,56 \cdot 10^5$  Н;

– допустимая нагрузка:  $[P] = \frac{P_{KP}}{[n]_{CT}} = \frac{4,56 \cdot 10^5}{3} = 1,52 \cdot 10^5$  Н.

**Пример 12.4.** Для стойки из прокатной стали двутаврового профиля, закрепленного в соответствии с рис. 12.2, а, определить номер двутавра, если действующая сила  $P = 400$  кН,  $[\sigma]_{СЖ} = 160$  МПа,  $l = 2$  м.

Решение. Назначаем  $\varphi = 0,6$ . Тогда

$$[\sigma] = \varphi [\sigma]_{СЖ} = 0,6 \cdot 160 \cdot 10^6 = 96 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$F = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{400^3}{96 \cdot 10^6} = 4,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

По таблице сортамента определим двутавр, для которого площадь поперечного сечения будет ближайшей к вычисленной: двутавр №27, для которого  $F = 42 \text{ см}^2 = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ;  $i_{\min} = i_{CT} = 2,54 \text{ см} = 0,0254 \text{ м}$ .

Определяем гибкость стойки:

$$\lambda = \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 200}{2,54} = 78,7.$$

По таблице для Ст3 определяем: для  $\lambda = 78,7$  значение  $\varphi \approx 0,758$ .

$$\text{Определяем } \varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0,6 + 0,758}{2} = 0,679.$$

Тогда  $[\sigma] = 0,679 \cdot 160 \cdot 10^6 = 1,086 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ;

$$F = \frac{400 \cdot 10^3}{1,086 \cdot 10^8} = 3,68 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 36,8 \text{ см}^2.$$

По таблице сортамента определим двутавр, для которого площадь поперечного сечения будет ближайшей к вычисленной: двутавр №24, для которого  $F = 34,8 \text{ см}^2 = 3,48 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ;  $i_{\min} = i_{CT} = 2,37 \text{ см} = 0,0237 \text{ м}$ .

Определяем гибкость стойки:

$$\lambda = \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 200}{2,37} = 84,4.$$

По таблице для Ст3 определяем: для  $\lambda = 84,4$  значение  $\varphi = 0,723$ .

Тогда допустимое напряжение равно

$$[\sigma] = 0,723 \cdot 160 \cdot 10^6 = 1,157 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Определяем напряжение  $\sigma$ , которое действует в стойке, и недонапряжение  $\Delta\sigma$  в нем:

$$\sigma = \frac{400 \cdot 10^3}{3,48 \cdot 10^{-3}} = 1,15 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma - [\sigma]_{CT}}{[\sigma]_{CT}} \cdot 100\% = \frac{1,15 \cdot 10^8 - 1,157 \cdot 10^8}{1,157 \cdot 10^8} \cdot 100\% = -0,6\%, \text{ что допускается.}$$

### Проверь свои знания!

1. В чем проявляется явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Что называется критической силой и критическим напряжением?
3. Что называется гибкостью стержня?
4. Какой вид имеет формула Эйлера, по которой определяется величина критической силы?
5. Что представляет собой коэффициент приведения длины и чему он равен при разных способах закрепления концов сжатого стержня?
6. Как устанавливается граница применения формулы Эйлера?
7. Что называется предельной гибкостью?
8. Какой вид имеет формула Ф.С. Ясинского и что по ней определяется?
9. Как определяется критическая сила с применением формулы

Ф.С. Ясинского?

10. Какой порядок расчетов сжатых стержней на устойчивость с помощью коэффициентов уменьшения допустимых напряжений на сжатие?

11. Как подбирается поперечное сечение стержня при расчете на устойчивость с помощью коэффициентов уменьшения допустимых напряжений на сжатие?

### Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 13 ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

Динамические нагрузки возникают в случае действия на детали или элементы конструкции ускорений, которые, в свою очередь, возникают при неравномерном движении. Общий метод расчетов динамических нагрузок основан на принципе Даламбера, который известен из теоретической механики. Этот принцип заключается в том, что движущуюся систему можно в любой момент времени рассматривать как неподвижную и уравновешенную, если к действующим на систему известным силам добавить силы инерции. Сила инерции равна произведению массы тела на него ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению. Силы инерции и есть теми силами, которые противодействуют ускорению или замедлению движения тела или детали механизма. В зависимости от кинематической схемы конкретного механизма динамические нагрузки могут возникать в различных его элементах или деталях. Эти нагрузки, как правило, превышают статические и способствуют повышенному износу деталей, а иногда – мгновенному выходу их из строя.

### 13.1 Динамические нагрузки при поступательном движении системы.

Динамические нагрузки при движении первого тела возникают в случае его ускорения или замедления и действуют на второе тело, которое ускоряет или замедляет движение первого тела. В примере, который приведен ниже, первым телом является груз, а вторым – канат.

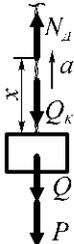


Рис. 13.1

**Пример 13.1.** Груз весом  $Q$  поднимается с ускорением  $a$  (рис. 13.1). Определить напряжение в канате.

Решение. Прикладываем к грузу силу инерции  $P$ , которая направлена вниз:  $P = ma = \frac{Q + Q_k}{g} a$ , где  $Q_k$  – вес каната,  $Q_k = F\gamma x$ ;  $F$  – площадь поперечного сечения каната;  $\gamma$  – объемный вес каната, тогда

$$P = \frac{Q + F\gamma x}{g} a .$$

Применяя метод сечений, определяем динамическую продольную силу  $N_d$  в сечении с координатой  $x$ :

$$\sum P_X = 0: \quad N_D - Q - Q_K - P = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_D = Q + Q_K + \frac{Q + Q_K}{g} a = (Q + Q_K) \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = (Q + F\gamma x) \left( 1 + \frac{a}{g} \right).$$

Введем обозначение:  $(Q + Q_K) = N_{CT}$  (продольная сила при статической нагрузке):  $K_D = 1 + \frac{a}{g}$  (динамический коэффициент при равноускоренном движении).

Тогда последнее уравнение примет вид:  $N_D = N_{CT} K_D$ .

Динамическое напряжение при равноускоренном движении вычисляется по формуле:

$$\sigma_D = \frac{N_D}{F} = \frac{N_{CT} K_D}{F} = \sigma_{CT} K_D.$$

Если учесть, что  $\sigma_{CT} = \frac{N_{CT}}{F}$  – напряжение при статическом действии груза,

то  $\sigma_D = \sigma_{CT} K_D$ .

**Пример 13.2.** Шахтная подъемная машина равноускоренно поднимает клеть (груз) весом  $Q = 250$  кН. За первые три секунды груз проходит расстояние  $S = 18$  м. Длина каната  $l = 300$  м. Удельный вес материала каната  $\gamma = 76,5$  кН/м<sup>3</sup>, допустимое напряжение материала каната с учетом запаса прочности  $[\sigma] = 200$  МПа. Определить необходимую наименьшую площадь поперечного сечения каната с учетом его собственного веса и без её учета.

Решение. Определим ускорение подъема груза

$$S = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2S}{t^2} = \frac{2 \cdot 18}{3^2} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Определим площадь поперечного сечения каната из условия прочности без учета его собственного веса:

$$\sigma_D = \sigma_{CT} K_D \leq [\sigma] \quad \text{или}$$

$$\sigma_D = \frac{Q}{F} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \leq [\sigma] \Rightarrow F = \frac{Q}{[\sigma]} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = \frac{250 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} \left( 1 + \frac{4}{9,81} \right) = 1,76 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Определим площадь поперечного сечения каната из условия прочности с учетом его собственного веса:

$$F = \frac{Q \left( 1 + \frac{a}{g} \right)}{[\sigma] - \gamma l \left( 1 + \frac{a}{g} \right)} = \frac{250 \cdot 10^3 \left( 1 + \frac{4}{9,81} \right)}{200 \cdot 10^6 - 76,5 \cdot 10^3 \cdot 300 \left( 1 + \frac{4}{9,81} \right)} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Таким образом, если учитывать, что подъемный канат нагружается не только весом клетки, а и весом самого себя, то площадь его поперечного сечения (или его прочность) необходимо увеличивать.

### 13.2 Динамические нагрузки при вращательном движении системы

Рассмотрим стрежень  $AB$  постоянного сечения  $F$  и длиной  $l = 2R$ , который равномерно вращается вокруг вертикальной оси (см. рис. 13.2). Разделим его на

элементарные частицы площадью  $F$ .

Тогда при  $r = 0$ :  $q = 0$ ; при  $r = R$ :  $q = q_{\max} = F\gamma\omega^2$ .

Эпюра  $q$  изображена на рис. 13.2. Полученные формулы можно использовать при определении сил инерции, которые действуют на тела, которые вращаются вокруг любой оси.

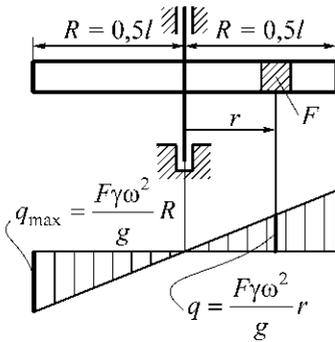


Рис. 13.2.

При равномерном вращении стержня, элементарные частицы которого расположены на расстояния  $r$  от оси вращения, касательные ускорения будут равны нулю, а нормальные (центростремительные) могут быть определены по формуле  $a_n = \omega^2 r$ , где  $\omega$  – угловая скорость.

Силы инерции (центробежные силы) направлены вдоль радиусов от оси вращения. Их величина, отнесенная к единице длины стержня, может быть определена по формуле

$$q = F\gamma a_n = F\gamma\omega^2 r.$$

### 13.3 Динамические нагрузки при ударе

Груз может действовать не только статически на опору (связь), но и динамически, например, упасть с высоты на опору.

Рассмотрим случай удара, когда груз весом  $P$  без начальной скорости падает с высоты  $h$  на упругую конструкцию. На рис. 13.3, *а* изображена схема такого удара, при котором растягивается стержень, на рис. 13.3, *б* – схема удара, при котором изгибается балка, на рис. 13.3, *в* – схема удара, при котором наблюдаются деформации кручения и изгиба одновременно.

Ударное действие груза можно описать динамическим коэффициентом  $K_D$ , который характеризует кратность увеличения действия силы при ударе по сравнению со статическим действием силы веса того же груза.

Динамический коэффициент  $K_D$  при ударе определяется по формуле

$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{CT}}}$ , где  $\delta_{CT}$  – деформация тела при статическом действии силы веса груза.

Учитывая, что  $h = \frac{V^2}{2g}$  (здесь  $V$  – скорость падающего груза в начале удара),

получим:  $K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\delta_{CT}}}$ .

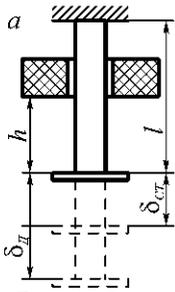
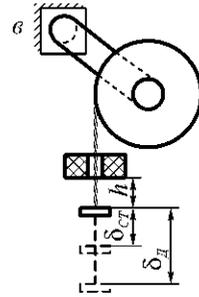
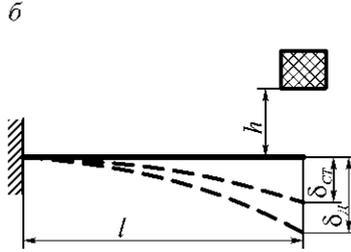


Рис. 13.3



Во всех случаях динамическая деформация  $\delta_D$ , динамическое усилие  $P_D$  и динамическое напряжение  $\sigma_D$ , вызванные ударом груза весом  $P$ , можно определить путем умножения на динамический коэффициент  $K_D$  при ударе соответствующих параметров, то есть:

$$\delta_D = \delta_{CT} K_D, \quad P_D = P_{CT} K_D, \quad \sigma_D = \sigma_{CT} K_D,$$

где  $\delta_{CT}$ ,  $P_{CT}$ ,  $\sigma_{CT}$  – соответственно деформация, усилие и напряжение при статическом действии нагрузки.

*Прим.* Здесь динамический коэффициент учитывает лишь ударное действие груза по конструкции, и при этом не учитывается ни «обратное» ударное действие конструкции по грузу, ни ее масса, ни другие динамические процессы.

**Пример 13.3.** На стальной ступенчатый стержень падает груз весом  $P = 400$  Н (рис. 13.4). Определить наибольшее сжимающее напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня. Принять модуль упругости стержня  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

Решение. Из анализа кинематической схемы следует, что максимальное статическое сжимающее напряжение возникает в сечении верхней (тонкой) части стержня:

$$\sigma_{CT} = \frac{N}{F} = \frac{P}{F^2} = \frac{400}{5 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Статическое перемещение в месте удара равно сокращению стержня при статическом приложении груза:

$$\delta_{CT} = \sum \Delta l_{CT} = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Pl_2}{EF_2} = \frac{400 \cdot 0,7}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{400 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент при ударе вычисляется по формуле

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{5,4 \cdot 10^{-6}}} = 273,2.$$

Динамическое напряжение (или наибольшее сжимающее напряжение) равно

$$\sigma_D = \sigma_{CT} K_D = 8 \cdot 10^5 \cdot 273,2 = 2,19 \cdot 10^8 \text{ Па.}$$

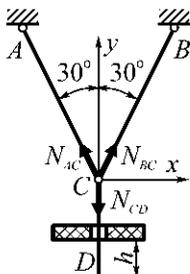


Рис. 13.5

**Пример 13.4.** Определить величину динамических напряжений, возникающих в стержнях подвески при падении груза весом  $Q = 250$  Н с высоты  $H = 1$  см (рис. 13.5). Стержни  $AC$  и  $BC$  изготовлены с меди, а стержень  $CD$  – из стали. Площадь поперечного сечения каждого из них равна  $0,25$  см<sup>2</sup>. Длина стержней  $AC$  и  $BC$  равна  $2$  м, а  $CD$  –  $1$  м.

Решение. Определяем статические усилия в стержнях.

В стержне  $CD$ :  $N_{CD} = Q = 250$  Н.

Для определения усилия в стержнях  $AC$  и  $BC$  воспользуемся теоремой о трех непараллельных сходящихся силах:

$$\vec{N}_{CD} = \vec{Q} = \vec{N}_{AC} + \vec{N}_{BC} \quad \text{или} \quad \vec{Q} = 2\vec{N}_{AC} = 2\vec{N}_{BC}.$$

Если спроецировать последнее уравнение на вертикальную ось  $y$ , то получим:

$$-Q + 2N_{AC} \cos 30 = 0 \Rightarrow N_{AC} = \frac{Q}{2 \cos 30} = \frac{250}{2 \cos 30} = 144,3 \text{ Н.}$$

Определим статические напряжения в стержнях:

$$\sigma_{CT(CD)} = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{250}{0,25 \cdot 10^{-4}} = 10 \cdot 10^6 \text{ Па;}$$

$$\sigma_{CT(AC)} = \sigma_{CT(BC)} = \frac{N_{AC}}{F_{AC}} = \frac{N_{BC}}{F_{BC}} = \frac{144,3}{0,25 \cdot 10^{-4}} = 5,772 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Статическое перемещение  $\delta_{CT}$  точки  $D$  (при статическом действии веса груза) складывается из перемещения точки  $D$  за счет удлинения  $\delta_{1CT}$  стержня  $CD$  и перемещение точки  $D$  за счет удлинения  $\delta_{2CT}$  стержней  $AC$  и  $BC$ :

$$\delta_{CT} = \delta_{1CT} + \delta_{2CT};$$

$$\delta_{1CT} = \Delta l_{CD} = \frac{Q_{CD} l_{CD}}{E_{CD} F_{CD}} = \frac{250 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,25 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м;}$$

$$\delta_{2CT} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{E_{AC} F_{AC} \cdot \cos 30} = \frac{144,3 \cdot 2}{1 \cdot 10^{11} \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 30} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ м;}$$

$$\delta_{CT} = 5 \cdot 10^{-5} + 1,67 \cdot 10^{-4} = 2,17 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент равен

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,0287}} = 9,4.$$

Динамическое напряжение в стержнях, вызванное ударом груза:

$$\sigma_{D(CD)} = \sigma_{CT(CD)} K_D = 10 \cdot 10^6 \cdot 9,4 = 9,4 \cdot 10^7 \text{ Па;}$$

$$\sigma_{D(AC)} = \sigma_{D(BC)} = \sigma_{CT(AC)} K_D = 5,772 \cdot 10^6 \cdot 9,4 = 5,43 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

**Пример 13.5.** На стальную балку двухтаврового поперечного сечения № 24 длиной  $l = 3$  м посередине пролета падает груз  $P = 1$  кН с высоты  $10$  мм (рис. 13.6). Сопоставить наибольшие динамические напряжения в поперечном сечении балки, а также прогиб под грузом, в случаях изгиба балки в плоскости наибольшей и наименьшей жесткости.

Решение. Данные из справочников для двутавра № 24:  $I_z = 3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $W_z = 289 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ,  $I_y = 198 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $W_y = 34,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ .

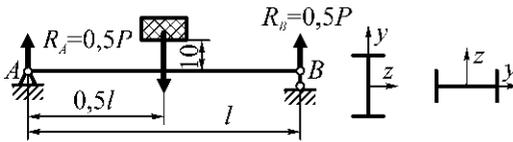


Рис. 13.6

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении посередине пролета (в месте падения груза) и равен

$$M_{\text{изmax}} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 3}{4} = 750 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Рассмотрим сначала случай изгиба балки в плоскости наибольшей жесткости. Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки при статической нагрузке составит

$$\sigma_{CT} = \frac{M_{\text{изmax}}}{W_z} = \frac{750}{289 \cdot 10^{-6}} = 2,75 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Динамический коэффициент определяется по формуле:

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{CT}}},$$

где  $\delta_{CT} = y_{CT}$  – прогиб средней части пролета балки при статической нагрузке,

$$\delta_{CT} = y_{CT} = \frac{Pl^3}{48EI_z} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-5}}} = 16,8$$

Наибольшие динамические напряжения  $\sigma_D$  и изгиб  $u_D$  составляют:

$$\sigma_D = K_D \sigma_{CT} = 16,8 \cdot 2,75 \cdot 10^6 = 4,62 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$u_D = K_D \delta_{CT} = 16,8 \cdot 8 \cdot 10^{-5} = 1,344 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Эти же параметры при изгибе балки в плоскости наименьшей жесткости составляют:

$$\sigma_{CT} = \frac{M_{\text{изmax}}}{W_y} = \frac{750}{34,5 \cdot 10^{-6}} = 2,17 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\delta_{CT} = y_{CT} = \frac{PL^3}{48EI_z} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{1,42 \cdot 10^{-3}}} = 4,9;$$

$$\sigma_D = K_D \sigma_{CT} = 4,9 \cdot 2,17 \cdot 10^7 = 1,06 \cdot 10^8 \text{ Па};$$

$$u_D = K_D \delta_{CT} = 4,9 \cdot 1,42 \cdot 10^{-3} = 6,96 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

При статическом действии нагрузки напряжения во втором случае больше, чем в первом в 7,89 раза, а при ударном воздействии – лишь в 2,3 раза. Это различие объясняется тем, что во втором случае жесткость поперечного сечения балки намного (в 17,5 раз) меньше, чем в первом, что приводит к существенному уменьшению динамического коэффициента.

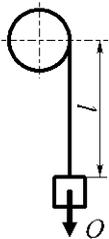


Рис. 13.7

**Пример 13.6.** Определить напряжение в стальном канате, который опускает груз весом  $Q = 250$  кН со скоростью  $V = 1$  м/с в случае внезапной остановки в момент, когда груз опустится на 10 м (рис. 13.7.). Площадь поперечного сечения каната  $F = 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ , модуль упругости каната  $E = 1,05 \cdot 10^{11}$  Па.

Решение. Определяем статическую деформацию и напряжение каната:

$$\delta_{CT} = \frac{Ql}{EF} = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 10}{1,05 \cdot 10^{11} \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 2,38 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\sigma_{CT} = \frac{Q}{F} = \frac{250 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^{-4}} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Коэффициент динамичности равен

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{\delta_{CT}g}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2,38 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}} = 7,62.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_D = K_D \sigma_{CT} = 2,5 \cdot 10^7 \cdot 7,62 = 1,91 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Такое значительное (почти восьмикратное) увеличение напряжения при резком торможении может привести к обрыву каната, что необходимо учитывать при эксплуатации подъемных машин.

**Пример 13.7.** Решить предыдущую задачу при условии, что между канатом и грузом установлена пружина предохранительного устройства, которая под действием груза 250 кН удлиняется на 0,2 м.

Решение. Определим совместную  $\delta_{CT}$  статическую деформацию каната  $\delta_{CT,K}$  и пружины  $\delta_{CT,П}$ , а также динамический коэффициент  $K_D$  и динамическое напряжение  $\sigma_D$  в канате:

$$\delta_{CT} = \delta_{CT,K} + \delta_{CT,П} = 2,38 \cdot 10^{-3} + 0,2 = 0,20238 \text{ м},$$

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{\delta_{CT}g}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{0,20238 \cdot 9,81}} = 2,23;$$

$$\sigma_D = K_D \sigma_{CT} = 2,23 \cdot 2,5 \cdot 10^7 = 5,58 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Таким образом, наличие пружины между канатом и грузом существенным образом (в 3,4 раза) снизило динамическое напряжение при резком торможении груза. В данном случае пружина была амортизатором, который часто применяют в технике для смягчения толчков, а следовательно – уменьшения возникающих динамических напряжений.

### Проверь свои знания!

1. Какие нагрузки называются статическими, а какие – динамическими?
2. В чем заключается принцип Даламбера при рассмотрении динамических нагрузок?
3. Что называется динамическим коэффициентом при равноускоренном движении?
4. В какой последовательности выполняется расчет на прочность с учетом

сил инерции при равноускоренном движении?

5. Что называется динамическим коэффициентом при ударе?
6. Что представляет собой «внезапное действие нагрузки» и чему равен динамический коэффициент при таком действии?
7. Как определяется перемещение и напряжение при ударе?
8. Применение каких конструктивных мер позволяет уменьшить напряжение при ударном действии нагрузки?
9. Зависит ли величина напряжения при ударе от модуля упругости материала системы, которая подлежит удару?

### Литература

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## 14 ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАПРЯЖЕНИИ

### 14.1 Явление усталости

В процессе работы в конструкциях возникают разные по знаку и величине напряжения. Например, рельс железнодорожной дороги подвергается периодической нагрузке от действия на него колес вагонов и локомотива. Больше половины деталей двигателя внутреннего сгорания тоже подвергаются периодическим нагрузкам. Экспериментально установлено, что элементы конструкции под действием знакопеременного напряжения разрушаются при действиях напряжения, меньшем границы пропорциональности.

*Разрушение материала под действием знакопеременного напряжения называется усталостным разрушением.*

Усталостное разрушение начинается с появления в наиболее слабом месте детали сначала микро-, а затем макротрещин, которые при переменной нагрузке имеют тенденцию прогрессивно развиваться. Развитие трещин идет особенно интенсивно, если напряжение меняется не только по величине, но и по знаку.

На рис. 14.1 приведены диаграммы зависимости периодических напряжений, возникающих в детали или конструкции, от времени.

Если максимальное  $\sigma_{\max}$  и минимальное  $\sigma_{\min}$  значение напряжения численно равны между собой, но противоположны по знаку, то цикл изменения напряжения называется симметричным циклом (рис. 14.1, а). Если же максимальное и минимальное напряжения не равны между собой, то цикл называется асимметричным (рис. 14.1, б).

Степень асимметрии определяется коэффициентом асимметрии  $R_{\sigma} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ .

Коэффициент асимметрии симметричного цикла  $R_{\sigma} = -1$ , отнулевого цикла  $R_{\sigma} = 0$ .

Цикл, минимальное напряжение которого равно нулю, называется отнулевым (рис. 14.1, в). Коэффициент асимметрии отнулевого цикла  $R_{\sigma} = 0$ .

Величина  $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$  называется амплитудой напряжения цикла, а

величина  $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$  называется средним напряжением цикла.

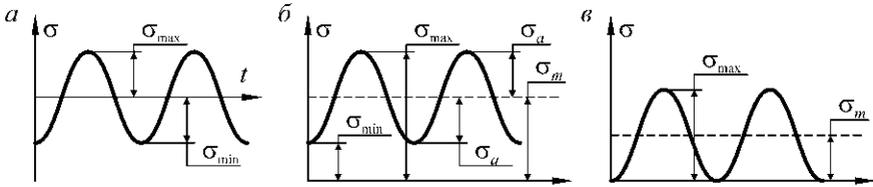


Рис. 14.1

Экспериментально установлено, что число циклов, при котором происходит разрушение, зависит не только от величины максимального (по абсолютному значению) напряжения, но и от амплитуды напряжения  $\sigma_a$ : чем больше  $\sigma_a$  при одном и том же  $\sigma_{\max}$ , тем меньше изменений нагрузки выдержит материал. Поэтому из всех циклов наиболее опасным является симметричный.

## 14.2 Определение предела выносливости

*Предел выносливости* – это наибольшее по абсолютному значению напряжения цикла, при котором образец выдерживает базовое число нагрузок без усталостного разрушения. Ее обозначают символами  $\sigma_R$  и  $\tau_R$  с указанием в индексе значения коэффициента асимметрии цикла, для которого эти величины определялись. Так,  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  являются пределами выносливости при симметричном цикле.

Предел выносливости материала определяется путем испытания образцов при разных значениях  $\sigma_{\max}$  и регистрации количества циклов, при которой происходит разрушения каждого образца.

Первый образец испытываемой партии нагружается так, чтобы максимальное напряжение превышало границу выносливости при заданном коэффициенте асимметрии цикла, и устанавливается количество циклов, которое выдержал образец до разрушения. *Количество циклов  $N$ , которое выдерживает образец до разрушения, называется циклической долговечностью.* В каждом следующем испытании в образце при том же коэффициенте асимметрии цикла создается максимальное напряжение меньше, чем в предыдущем испытании.

Эксперименты показывают, что образцы из большинства черных металлов, которые выдержали  $10^7$  циклов, как правило, не разрушаются при дальнейшем увеличении числа изменений нагрузки. Кривая усталости для таких материалов асимптотично приближается к горизонтальной прямой. Отрезок, который отсекается этой прямой на оси ординат, определяет границу выносливости материала  $\sigma_r$  или  $\tau_r$  при указанном коэффициенте асимметрии цикла  $R$  (см. рис. 14.2).

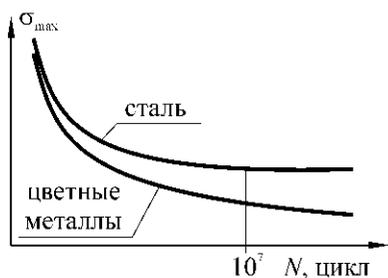


Рис. 14.2

Для цветных металлов, как правило, не существует такого числа циклов, выдержав которые образец не разрушается при дальнейшем испытании. Кривые усталости цветных металлов не имеют горизонтальной асимптоты. В таких случаях можно говорить лишь о границе ограниченной выносливости.

*Границей ограниченной выносливости называется максимальное напряжение цикла, при котором материал выдерживает  $N = 10^7$  циклов до разрушения образца.* Число циклов  $N$  называется базой испытания.

В справочной литературе приводятся значения  $\sigma_{-1}$ , которые получены по результатам испытаний на циклический изгиб. Результаты экспериментальных исследований показали, что границы выносливости одного и того же материала при растяжении в 1,25... 1,4 раза меньше, а при кручении — в 1,4... 2,5 раза меньше границы выносливости при изгибе.

### 14.3 Влияние различных факторов на усталостное сопротивление

**Концентрация напряжения** возникает в местах деталей, имеющих изменение формы. Например, концентрация напряжений возникает, если балка, подвергающаяся испытанию на изгиб, имеет ослабление в виде отверстия или надпила; если вал имеет резкий переход с одного диаметра на другой; если деталь сложной формы имеет переходы формы по малым радиусам; если на полированной поверхности детали есть риски, царапины или другие шероховатости. Именно те места детали, на которых действуют концентрации напряжений, называются концентраторами напряжений.

При действии переменных нагрузок концентрация напряжения снижает предел выносливости для разных материалов. Влияние концентрации напряжения на предел выносливости зависит от чувствительности материала к концентрации напряжения и учитывается в расчетах с помощью эффективного коэффициента концентрации.

*Эффективный коэффициент концентрации напряжения  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$  является отношением предела выносливости  $\sigma_{-1}$  образца без концентратора напряжения к пределу выносливости  $(\sigma_{-1})_K$  образца с концентратором напряжения, то есть*

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_K}; \quad K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(\tau_{-1})_K}.$$

Чувствительность материала к концентрации напряжений зависит, прежде всего, от свойств материала и возрастает с повышением предела прочности. Поэтому применение высокопрочных материалов при переменных нагрузках не всегда является целесообразным.

Как показывает опыт, чувствительность материала к концентрации напряжений также зависит от размеров детали и её формы. Поэтому в практических расчетах целесообразнее пользоваться эффективными коэффициентами  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$ , установленными экспериментальным путем.

**Масштабный фактор**  $K_D$  показывает, в сколько раз предел выносливости штучного образца диаметром  $D$  больше, чем предел выносливости стандартного образца диаметром  $d$ , то есть:  $K_D = \frac{(\sigma_{-1})_D}{(\sigma_{-1})_d} < 1$ .

**Состояние поверхности.** Опытами установлено, что предел выносливости образцов с полированной поверхностью выше, чем шлифованных, а шлифованных выше, чем в обработанных резцом, и т.д. Влияние чистоты поверхности, а также её дефектов, на предел выносливости оценивается коэффициентом  $K_F$ , равным отношению предела выносливости образца с заданной обработкой поверхности к пределу выносливости такого же образца, но с тщательно отшлифованной поверхностью. Коэффициент  $K_F$  определяется по графикам или таблицам.

**Температура.** Испытание образцов из стали и легких сплавов показали, что при температурах до 200°C предел выносливости существенным образом не меняется. При высоких температурах кривая усталости для сталей не имеет горизонтальной асимптоты. В этом случае оценки проводят только с учетом предела ограниченной выносливости. При низких температурах предел выносливости повышается.

**Внешняя среда.** Например, коррозия существенным образом снижает сопротивление усталости, особенно легких сплавов, поэтому, что корродированная поверхность имеет сниженную чистоту (повышенную шероховатость). Снижение предела выносливости от коррозии высококачественных сталей значительнее, чем других сталей.

При наличии агрессивной среды на сопротивление усталости влияет и частота изменения напряжений: разрушительное число циклов уменьшается при уменьшении частоты изменения напряжения, а кривая усталости в этом случае даже для черных металлов не имеет горизонтальной асимптоты. Количественные характеристики снижения выносливости зависят от агрессивности внешней среды и учитываются в расчетах соответствующими коэффициентами.

### **Проверь свои знания!**

1. В чем сущность явления усталости?
2. Что такое цикл нагрузки? Какими бывают циклические нагрузки?
3. Что такое предел выносливости и предел ограниченной выносливости и как они определяются?
4. Как возникает концентрация напряжений? Что является фактором его возникновения?
5. Как определяется эффективный коэффициент концентрации напряжения?
6. Какие факторы влияют на предел выносливости?

### **Литература**

Для успешного изучения темы необходимо изучить соответствующие разделы [1], [4... 11]

## Литература.

1. Теоретическая и прикладная механика: Учебное пособие для студентов направления подготовки «Профессиональное обучение (по отраслям)» ( в 3-х частях). Часть 1 «Теоретическая механика»: Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им.В.Даля», 2021. - 139с.
2. Журнал лабораторных работ по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки «Профессиональное обучение (по отраслям)». Раздел «Прикладная механика». - Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. - 25с.
3. Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки «Профессиональное обучение (по отраслям)», (раздел «Прикладная механика»). - Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. Даля», 2021. -39 с.
4. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили: «Информационные технологии и системы», «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» (в 2-х частях). Часть 1. «Теоретическая механика». - Стаханов: ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. В. ДАЛЯ», 2022. - 54 с.
5. Сопротивление материалов /Под ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. - 5-е изд., перераб. и доп. -Киев: Высшая шк., 1986. -775 с.
6. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: Учебник для техн. вузов. -5-е изд., перераб. и доп. -М.: Высшая шк., 1989. -624 с.
7. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. -544 с.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 1999. – 592 с.
9. Сборник задач по сопротивлению материалов /Под редакцией А.С. Вальмира. -М.: Наука, 1984. -408 с.
10. Справочник по сопротивлению материалов /Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.П. Матвеев. Под ред. Г.С. Писаренко. - 2-е изд., перераб. и доп. -Киев: Научная мысль, 1988. -736 с.
11. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для техн. вузов /И.Н. Миролубов, С.А. Енгаличев, Н.Д. Сергиевский и др. – 5-е изд., перераб. и доп. -М.: Высшая шк., 1985. -399 с.

## АЛФАВИТ

ЛАТИНСКИЙ				ГРЕЧЕСКИЙ			
<i>A a</i>	а	<i>N n</i>	эн	$\text{A } \alpha$	альфа	$\text{N } \nu$	ню
<i>B b</i>	бе	<i>O o</i>	о	$\text{B } \beta$	бета	$\Xi \xi$	кси
<i>C c</i>	цэ	<i>P p</i>	пе	$\Gamma \gamma$	гамма	$\text{П } \pi$	пи
<i>D d</i>	дэ	<i>Q q</i>	ку	$\Delta \delta$	дельта	$\text{P } \rho$	ро
<i>E e</i>	е	<i>R r</i>	эр	$\text{E } \varepsilon$	эпсилон	$\Sigma \sigma$	сигма
<i>F f</i>	эф	<i>S s</i>	эс	$\text{Z } \zeta$	зета	$\text{T } \tau$	тау
<i>G g</i>	же	<i>T t</i>	тэ	$\text{H } \eta$	эта	$\Phi \phi$	фи
<i>H h</i>	аш	<i>U u</i>	у	$\Theta \theta$	тета	$\text{X } \chi$	хи
<i>I i</i>	и	<i>V v</i>	вэ	$\text{I } \iota$	йота	$\Upsilon \upsilon$	ипсилон
<i>J j</i>	йот (жи)	<i>W w</i>	дубль-вэ	$\text{K } \kappa$	каппа	$\Psi \psi$	пси
<i>K k</i>	ка	<i>X x</i>	икс	$\Lambda \lambda$	лямбда	$\Omega \omega$	омега
<i>L l</i>	эль	<i>Y y</i>	игрек	$\text{M } \mu$	мю		
<i>M m</i>	эм	<i>Z z</i>	зет				



## УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Конспект лекций по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» для студентов направления подготовки Профессиональное обучение (по отраслям), профили «Электроснабжение», «Безопасность технологических процессов и производств», «Горное дело. Подземная разработка пластовых месторождений», «Горное дело. Электромеханическое оборудование, автоматизация процессов добычи полезных ископаемых и руд», «Горное дело. Технологическая безопасность и горноспасательное дело» (в 2-х частях). Часть 2.2. Сопротивление материалов.

С о с т а в и т е л ь:  
Валентин Иванович Сафонов

Печатается в авторской редакции.  
Компьютерная верстка и оригинал-макет автора.

Подписано в печать \_\_\_\_\_  
Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типограф. Гарнитура Times  
Печать офсетная. Усл. печ. л. \_\_\_\_\_. Уч.-изд. л. \_\_\_\_\_  
Тираж 100 экз. Изд. № \_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_. Цена договорная.

Издательство Луганского государственного  
университета имени Владимира Даля

*Свидетельство о государственной регистрации издательства  
МИ-СРГ ИД 000003 от 20 ноября 2015 г.*

**Адрес издательства:** 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а  
**Телефон:** 8 (0642) 41-34-12, **факс:** 8 (0642) 41-31-60  
**E-mail:** izdat.lguv.dal@gmail.com **http:** //izdat.dahluniver.ru/